Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Экстремумы полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 790–794

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:53:32

© 2002 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

ЭКСТРЕМУМЫ ПОЛЕЙ ДРОБОВОГО ШУМА В СЛУЧАЕ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ ХВОСТОВ¹⁾

Рассматриваются поля дробового шума с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд. Для супремумов поля по ограниченному измеримым областям, монотонно растущим в смысле Ван Хова, получен невырожденный предельный закон при линейной нормировке.

Ключевые слова и фразы: поле дробового шума, экстремумы, правильно меняющиеся хвосты, невырожденный предельный закон, линейная нормировка.

1. Введение. Экстремумы процессов дробового шума с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд и финитными функциями отклика рассматривались в [1]. Ранее в [2] экстремумы подобных процессов изучались и для некоторых функций отклика с неограниченным носителем (в частности, для показательной функции), но в случае единичных амплитуд.

Настоящая работа направлена на обобщение результатов [1], а также собственных результатов автора [3] и посвящена исследованию экстремумов (супремумов) полей дробового шума с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд и функциями отклика (влияния) с неограниченным носителем. Процессы дробового шума на прямой представляются как важный частный случай.

Рассмотрим евклидово пространство $E = \mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, и пусть $\{\tau_k\}$ — стационарное пуассоновское точечное поле в E интенсивности $\lambda > 0$. Определим формально поле

$$X(t) = \sum_k \xi_k f(t - \tau_k), \quad t \in E, \quad (1)$$

где ξ_k — независимые неотрицательные случайные величины (называемые амплитудами), имеющие распределение A с хвостом $\bar{A}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$, $x \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$, L — медленно меняющаяся функция [4, с. 317]; $\{\xi_k\}$ и $\{\tau_k\}$ независимы; f — измеримая функция на E (называемая функцией отклика или влияния), обладающая следующими свойствами: а) $f(t) \geq 0$, $\forall t \in E$; б) $f(0) = 1$, $f(t) \leq 1$, $\forall t \in E$; в) существует $\delta < \min\{1, \alpha\}$ такое, что $\int_E f(t)^\delta dt < \infty$; г) существует такая неубывающая неотрицательная функция $q(r)$, что $q(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, и $|f(t_1) - f(t_2)| \leq f(t_1)q(\|t_1 - t_2\|)$, $\forall t_1, t_2 \in E$; д) f не имеет точек локального максимума кроме $t = 0$.

Условия а)–в) обеспечивают существование поля дробового шума $X(t)$ в смысле абсолютной сходимости ряда в (1) п.н. [5].

Определим теперь для ограниченной измеримой по Лебегу области $G \subset E$ супремум поля $X(t)$ на ней:

$$M(G) = \sup_{t \in G} X(t).$$

Предположим, что задана последовательность таких областей, монотонно стремящаяся к бесконечности в смысле Ван Хова [6, с. 30] (что обозначим $G \rightarrow \infty$). Напомним это понятие. Рассмотрим разбиение пространства E правильной решеткой из одинаковых прямоугольных параллелепипедов P_n . Пусть $N^-(G)$ — число P_n , входящих в G , и $N^+(G)$ — число P_n , пересекающихся с G , тогда стремление к бесконечности в смысле Ван Хова означает, что для любого такого разбиения

$$\lim_{G \rightarrow \infty} N^+(G) = +\infty, \quad \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{N^-(G)}{N^+(G)} = 1. \quad (2)$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00131.

В дальнейшем для простоты вместо произвольных параллелепипедов будем рассматривать только правильные кубы C_n со стороной l .

Обозначим лебегову меру множества G через $|G|$, тогда из (2) следует, что

$$N^-(G) \sim \frac{|G|}{l^d}, \quad N^+(G) \sim \frac{|G|}{l^d}, \quad G \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\alpha(d-1) < 1$ и $u(s)$ — положительная неубывающая функция такая, что $s\bar{A}(u(s)) \rightarrow 1$, $s \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{M(G)}{u(\lambda|G|)} \leq x \right\} = \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad \forall x > 0. \quad (4)$$

Следует отметить, что традиционные для исследования экстремумов одномерного дробового шума методы не работают в многомерном случае: рекордные значения поля достигаются не обязательно на множестве точек $\{\tau_k\}$; отсутствует какое-либо выделенное направление (как на временной оси) и связанные с ним свойства f ; границы областей представляют собой многообразия, а не сводятся к отдельным точкам. Эти трудности преодолеваются за счет довольно грубых двусторонних оценок (которые при определенных условиях оказываются асимптотически точными).

Заметим также, что при $\alpha < 2$ распределения амплитуд не принадлежат области притяжения нормального закона, так что нормальная сходимости [7] поля дробового шума исключена. Асимптотические методы, разработанные для гауссовских полей, в данном случае неприменимы.

2. Леммы и доказательства. Изучим сначала свойства f , следующие из а)–д). Очевидно, из г) следует непрерывность f .

Обозначим $I_p = \int_E f(t)^p dt$. Из а)–в) следует, что $I_p < \infty$, $\forall p \geq \delta$.

Пусть $f_n^+ = \sup_{t \in C_n} f(-t)$, $f_n^- = \inf_{t \in C_n} f(-t)$. В силу непрерывности эти значения принимаются $f(-t)$ на C_n .

Рассмотрим ряды $S_p^+ = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^+)^p$ и $S_p^- = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^-)^p$.

Лемма 1. Для любого $p \geq \delta$ ряды S_p^+ , S_p^- сходятся и $S_p^+, S_p^- \sim l^{-d} I_p$, $l \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $K = 1 + q(l\sqrt{d})$. Из г) следует: $K^{-1}f(-t) \leq f_n^- \leq f(-t) \leq f_n^+ \leq Kf(-t)$, $\forall t \in C_n$. Возводя в степень и интегрируя, получаем $K^{-p}I_p \leq l^d S_p^- \leq I_p \leq l^d S_p^+ \leq K^p I_p$, где $K \rightarrow 1$, $l \rightarrow 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Функциями, удовлетворяющими а)–д), являются, например, $f(t) = \exp\{-a\|t\|\}$ и $f(t) = (1 + a\|t\|)^{-b}$, $b > d/\delta$, $a > 0$.

Обозначим через Ψ распределение $X(0)$. В силу однородности поля это будет также распределение $X(t)$ в любой точке t .

Введем случайные величины $\eta_n = \sum_{\tau_k \in C_n} \xi_k$. По свойству суммы пуассоновского числа независимых слагаемых, имеющих распределение с правильно меняющимся хвостом [4, с. 330],

$$\mathbf{P}\{\eta_n > x\} \sim \lambda l^d \bar{A}(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Лемма 2. $\bar{\Psi}(x) \sim \lambda I_\alpha \bar{A}(x)$, $x \rightarrow \infty$.

Доказательство. Имеем

$$X^- = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n f_n^- \leq X(0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n f_n^+ = X^+.$$

В силу соотношения (5) с учетом леммы 1 по теореме 2.3 [8] (см. также [9, с. 227]) получаем

$$\mathbf{P}\{X^- > x\} \sim \lambda l^d S_\alpha^- \bar{A}(x), \quad \mathbf{P}\{X^+ > x\} \sim \lambda l^d S_\alpha^+ \bar{A}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{A}(x)} \geq \lambda l^d S_\alpha^-, \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Psi}(x)}{\bar{A}(x)} \leq \lambda l^d S_\alpha^+,$$

откуда по лемме 1 при $l \rightarrow 0$ получаем утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть граница замкнутой области G покрывается шарами радиуса r с центрами в точках $O_1, \dots, O_m$. Тогда

$$M(G) \leq \sum_{\tau_k \in G} \xi_k + (1 + q(r)) \sum_{i=1}^m X(O_i).$$

Доказательство. Очевидно,

$$M(G) \leq \sum_{\tau_k \in G} \xi_k + \sup_{t \in G} \sum_{\tau_k \notin G} \xi_k f(t - \tau_k),$$

так что достаточно оценить второе слагаемое в правой части. Заметим, что функции $\tilde{f}_k(t) = f(t - \tau_k)$ на G при $\tau_k \notin G$, по свойству д) и в силу непрерывности, достигают максимального значения на границе. Обозначим точки, в которых это происходит, через γ_k . В r -окрестности каждой из них есть хотя бы один из центров покрывающих границу шаров — обозначим его номер i_k . Применяя свойство г), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{t \in G} \sum_{\tau_k \notin G} \xi_k f(t - \tau_k) &\leq \sum_{\tau_k \notin G} \xi_k \sup_{t \in G} f(t - \tau_k) = \sum_{\tau_k \notin G} \xi_k f(\gamma_k - \tau_k) \\ &\leq (1 + q(r)) \sum_{\tau_k \notin G} \xi_k f(O_{i_k} - \tau_k) \leq (1 + q(r)) \sum_k \xi_k \sum_{i=1}^m f(O_i - \tau_k) \\ &= (1 + q(r)) \sum_{i=1}^m X(O_i), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Далее полагаем $x > 0$. Обозначим $u_G = u(\lambda|G|)$.

Сначала оценим $M(G)$ снизу максимумом амплитуд по точкам, попавшим в область G . Имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G) \leq xu_G\} &\leq \limsup_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{\tau_k \in G} \xi_k \leq xu_G\right\} \\ &= \exp\left\{-\lim_{G \rightarrow \infty} \lambda|G| \bar{A}(xu_G)\right\} = \exp\{-x^{-\alpha}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь оценим $M(G)$ сверху. Обозначим $\mu_n = M(C_n)$. Пусть l целое, тогда граница любого куба C_n покрывается $m = (l+1)^d - (l-1)^d$ шарами радиуса $r = 1$, откуда $m \sim 2dl^{d-1}$, $l \rightarrow \infty$. Обозначим $K_1 = 1 + q(1)$. Пусть $\varepsilon > 0$. По леммам 2, 3 и в силу (5) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_n > x\} &\leq \mathbf{P}\{\eta_n > x(1 - \varepsilon)\} + m \bar{\Psi}\left(\frac{K_1^{-1} \varepsilon x}{m}\right) \\ &\sim \lambda \left(l^d (1 - \varepsilon)^{-\alpha} + m^{1+\alpha} \varepsilon^{-\alpha} K_1^\alpha I_\alpha\right) \bar{A}(x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть G^+ — объединение C_n , пересекающихся с G , тогда $G \subset G^+$. Воспользуемся понятием ассоциированности (положительной зависимости) [10]. Следуя [11], можно показать, что поле дробового шума $X(t)$ ассоциировано. Случайные величины $M(C_n)$ также ассоциированы как монотонно возрастающие функции от поля. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{M(G^+) \leq x\} \geq (\mathbf{P}\{\mu_n \leq x\})^{N^+(G)}.$$

С учетом (3), (5) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G) \leq xu_G\} &\geq \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G^+) \leq xu_G\} \geq \liminf_{G \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\mu_n \leq xu_G\})^{N^+(G)} \\ &= \exp\left\{-\limsup_{G \rightarrow \infty} |G| l^{-d} \mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\}\right\} \\ &\geq \exp\left\{-((1 - \varepsilon)^{-\alpha} + l^{-d} m^{1+\alpha} \varepsilon^{-\alpha} K_1^\alpha I_\alpha) x^{-\alpha}\right\}, \end{aligned}$$

откуда, переходя к пределу по $l \rightarrow \infty$ и затем по $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G) \leq x u_G\} \geq \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad (8)$$

что в сочетании с (6) и доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть f удовлетворяет только свойствам а)–в), но для любого $\varepsilon > 0$ существует f_ε , удовлетворяющая а)–д), такая, что $f \leq (1 + \varepsilon)f_\varepsilon$. Тогда верно (4).

Доказательство. Очевидно, по функции f_ε можно построить на том же вероятностном пространстве поле дробового шума X_ε такое, что $X \leq (1 + \varepsilon)X_\varepsilon$ п.н. Из оценки $M(G) \leq (1 + \varepsilon)M_\varepsilon(G)$ п.н. и (4) для M_ε следует

$$\liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{M(G)}{u(\lambda|G|)} \leq x\right\} \geq \exp\{-x^{-\alpha}(1 + \varepsilon)^\alpha\},$$

откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем (8). С другой стороны, оценка (6) остается верной, так как не использует свойства г) и д). Таким образом, следствие доказано.

Например, $\exp\{-\|x\|^2\} \leq (1 + \varepsilon) \exp\{-c_\varepsilon \|x\|\}$, где $c_\varepsilon = 2\sqrt{\ln(1 + \varepsilon)}$.

З а м е ч а н и е 1. Следствие позволяет расширить сферу действия теоремы на некоторые функции, тождественно равные нулю вне какой-либо (ограниченной или неограниченной) области. В частности, можно рассмотреть ситуацию, когда одна из координат представляет собой время и f отлична от нуля только в полупространстве или в некотором конусе (при конечной скорости распространения сигнала). Случай финитных функций влияния уже был изучен автором в [3]: показано, что тогда верно (4) без ограничений на $\alpha > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Ограничение сверху на α в условии теоремы, возможно, не имеет абсолютного характера, а является следствием грубости оценки (7). Таким образом, дальнейшие исследования могут быть связаны с ослаблением или устранением этого условия.

3. Одномерный случай. Рассмотрим теперь особый случай $d = 1$ (т.е. процесс дробового шума на всей действительной прямой).

При $d = 1$ ограничение сверху на α в условии теоремы полностью снимается. Легко показать, что можно избавиться также от условия г), заменив его вместе с в) и д) непосредственной интегрируемостью f^δ по Риману [4, с. 410], из которой, в свою очередь, следует непосредственная интегрируемость по Риману для f^p , $p \geq \delta$, что полностью совпадает с утверждением леммы 1. Поскольку C_n представляют собой отрезки, то в качестве точек γ_1, γ_2 будут фигурировать их концы, которые также можно выбрать и за O_1, O_2 . Таким образом, необходимость г) в лемме 3 также отпадает.

От процесса дробового шума на действительной прямой можно перейти к соответствующему процессу на неотрицательной полупрямой и том же вероятностном пространстве, а именно,

$$X_0(t) = \sum_{\tau_k \in [0, t]} \xi_k f(t - \tau_k), \quad \forall t \geq 0.$$

Очевидно, $X_0(t) \leq X(t)$ п.н. и $M_0([0, t]) \leq M([0, t])$ п.н. Однако для $M_0([0, t])$ остается верной оценка снизу (6). Таким образом, для процесса дробового шума на полупрямой остается верным (4).

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCormick W. P. Extremes for shot noise processes with heavy tailed amplitudes. — J. Appl. Probab., 1997, v. 34, № 3, p. 643–656.
2. Doney R. A., O'Brien G. L. Loud shot noise. — Ann. Appl. Probab., 1991, v. 1, № 1, p. 88–103.

3. Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума. — Фундам. и прикл. матем., 2001, т. 7, № 4, с. 1081–1090.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
5. Westcott M. On the existence of a generalized shot-noise process. — Studies in Probability and Statistics. Amsterdam: North-Holland, 1976, p. 74–88.
6. Рюэль Д. Статистическая механика. М.: Мир, 1971, 368 с.
7. Heinrich L., Schmidt V. Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence. — Adv. Appl. Probab., 1985, v. 17, № 3, p. 709–730.
8. Cline D. B. H. Infinite series of random variables with regularly varying tails. Technical report 83-24. Inst. Appl. Math. Univ. British Columbia, 1983, 24 p.
9. Resnick S. I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1987, 320 p.
10. Esary J., Prochan F., Walkup D. Association of random variables with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
11. Бахтин Ю. Ю. Закон повторного логарифма для решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 6, с. 812–823.

Поступила в редакцию
20.I.2000

© 2002 г.

ПЕТРОВ А. И.*

СЛУЧАЙНЫЕ КОНТЕКСТНО СВОБОДНЫЕ ГРАММАТИКИ: НАДКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ С НЕНУЛЕВОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕНИЯ

Случайные грамматики были введены в информатике, но их изучение с использованием методов статистической физики таких, как исследование термодинамического предела, техника кластерных разложений и т.д., началось недавно, см. [1]. Для контекстно-свободных грамматик в надкритическом случае с нулевой вероятностью вырождения (когда символы не умирают) в [7] исследовалось поведение при больших временах, доказывалось существование различных предельных мер и изучалась связь между ними. В данной работе мы распространим основные результаты [7] на надкритический случай с ненулевой вероятностью вырождения.

Ключевые слова и фразы: случайная контекстно свободная грамматика, ветвящийся процесс, надкритическая область, термодинамический предел.

Обозначим через $S = \{s_1, \dots, s_{|S|}\}$ конечное множество, которое мы будем называть алфавитом. Словом α над алфавитом S назовем любую линейно-упорядоченную последовательность символов из S . Длину слова α будем обозначать $|\alpha|$. Через e обозначим пустое слово, $|e| = 0$. Множество всех конечных слов над алфавитом S , включая пустое слово, мы будем обозначать через S^* ; $S^+ = S^* \setminus \{e\}$.

Для конечных слов $\alpha = x_1 \dots x_n$, $\beta = y_1 \dots y_m$, $m, n > 0$, $x_i, y_j \in S$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, их композицией $\alpha\beta$ называется слово

$$\alpha\beta = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m, \quad \alpha e = e\alpha = \alpha.$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Лаборатория больших случайных систем, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: aipetrov@lbss.math.msu.su