Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Петров, Случайные контекстно свободные грамматики: надкритический случай с ненулевой вероятностью вырождения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 794–803

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:16:30

3. Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума. — Фундам. и прикл. матем., 2001, т. 7, № 4, с. 1081–1090.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
5. Westcott M. On the existence of a generalized shot-noise process. — Studies in Probability and Statistics. Amsterdam: North-Holland, 1976, p. 74–88.
6. Рюэль Д. Статистическая механика. М.: Мир, 1971, 368 с.
7. Heinrich L., Schmidt V. Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence. — Adv. Appl. Probab., 1985, v. 17, № 3, p. 709–730.
8. Cline D. B. H. Infinite series of random variables with regularly varying tails. Technical report 83-24. Inst. Appl. Math. Univ. British Columbia, 1983, 24 p.
9. Resnick S. I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1987, 320 p.
10. Esary J., Prochan F., Walkup D. Association of random variables with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
11. Бахтин Ю. Ю. Закон повторного логарифма для решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 6, с. 812–823.

Поступила в редакцию
20.I.2000

© 2002 г.

ПЕТРОВ А. И.*

СЛУЧАЙНЫЕ КОНТЕКСТНО СВОБОДНЫЕ ГРАММАТИКИ: НАДКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ С НЕНУЛЕВОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕНИЯ

Случайные грамматики были введены в информатике, но их изучение с использованием методов статистической физики таких, как исследование термодинамического предела, техника кластерных разложений и т.д., началось недавно, см. [1]. Для контекстно-свободных грамматик в надкритическом случае с нулевой вероятностью вырождения (когда символы не умирают) в [7] исследовалось поведение при больших временах, доказывалось существование различных предельных мер и изучалась связь между ними. В данной работе мы распространим основные результаты [7] на надкритический случай с ненулевой вероятностью вырождения.

Ключевые слова и фразы: случайная контекстно свободная грамматика, ветвящийся процесс, надкритическая область, термодинамический предел.

Обозначим через $S = \{s_1, \dots, s_{|S|}\}$ конечное множество, которое мы будем называть алфавитом. Словом α над алфавитом S назовем любую линейно-упорядоченную последовательность символов из S . Длину слова α будем обозначать $|\alpha|$. Через e обозначим пустое слово, $|e| = 0$. Множество всех конечных слов над алфавитом S , включая пустое слово, мы будем обозначать через S^* ; $S^+ = S^* \setminus \{e\}$.

Для конечных слов $\alpha = x_1 \dots x_n$, $\beta = y_1 \dots y_m$, $m, n > 0$, $x_i, y_j \in S$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, их композицией $\alpha\beta$ называется слово

$$\alpha\beta = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m, \quad \alpha e = e\alpha = \alpha.$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Лаборатория больших случайных систем, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: aipetrov@lbss.math.msu.su

Слово $\alpha \in S^*$ является подсловом слова $\gamma \in S^*$, если $\gamma = \beta\alpha\delta$, где $\beta, \delta \in S^*$.

Рассмотрим марковский процесс $Z_t^{[\gamma]}$ с дискретным временем $t \geq 0$, имеющий в качестве множества состояний множество всех слов над алфавитом S . Начальное состояние при $t = 0$ есть фиксированное бесконечное слово $\gamma \equiv \gamma(0) = x_1^{[\gamma]}(0) x_2^{[\gamma]}(0) \dots$, где $x_i^{[\gamma]}(0) \in S$, $i = 1, 2, \dots$. Состоянием $Z_t^{[\gamma]}$ в момент времени $t \geq 0$ является слово

$$\gamma(t) = x_1^{[\gamma]}(t) x_2^{[\gamma]}(t) \dots, \quad \text{где } x_i^{[\gamma]}(t) \in S, \quad i = 1, 2, \dots$$

Переходные вероятности определяются следующим образом: каждый символ x слова $\gamma(t)$ в момент времени $t \geq 0$, независимо от других символов, заменяется на слово $\alpha \in S^*$ с вероятностью $\mathbf{P}\{x \rightarrow \alpha\}$. Мы будем предполагать выполнение следующих условий:

$$\forall x, s \in S: \mathbf{P}\{x \rightarrow s\} > 0, \quad (1)$$

$$\exists K \geq 1: \forall x \in S: \sum_{\alpha \in S^*, |\alpha| \leq K} \mathbf{P}\{x \rightarrow \alpha\} = 1. \quad (2)$$

Очевидно, что с вероятностью единица в любой момент времени $t \geq 0$ длина слова $\gamma(t)$ бесконечна. Случай $\forall x \in S: \mathbf{P}\{x \rightarrow \emptyset\} = 0$ был рассмотрен в [7]. Нас будет интересовать структура слова $\gamma(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Наряду с процессом $Z_t^{[\gamma]}$ рассмотрим процессы $Z_t^{[k]}$, $k = 1, \dots, |S|$, с теми же переходными вероятностями, что и у $Z_t^{[\gamma]}$, но имеющие в качестве начального состояния один символ $\gamma^{[k]}(0) \equiv x_1^{[k]}(0) = s_k \in S$. Состояние $Z_t^{[k]}$ в момент $t \geq 0$ есть слово длины $n^{[k]}(t)$:

$$\gamma^{[k]}(t) = x_1^{[k]}(t) x_2^{[k]}(t) \dots x_{n^{[k]}(t)}^{[k]}(t), \quad \text{где } x_i^{[k]}(t) \in S, \quad i = 1, 2, \dots, n^{[k]}(t),$$

$n^{[k]}(t) = 0$ при $\gamma^{[k]}(t) = \emptyset$. Введем векторы размерности $|S|$: $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ и $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ — где 1 стоит на j -м месте.

Обозначим через $n(\alpha, \gamma)$, $\alpha \in S^+$, $\gamma \in S^*$, число подслов α в слове γ . Введя

$$N_t^{[k]}(s_i) \equiv n(s_i, \gamma^{[k]}(t)), \quad s_i \in S, \quad i, k = 1, \dots, |S|, \quad (3)$$

получим, что $\vec{N}_t^{[k]} \equiv (N_t^{[k]}(s_1), \dots, N_t^{[k]}(s_{|S|}))$ есть ветвящийся процесс с $|S|$ типами частиц (см. [2], [3], [5]), начальным состоянием $\mathbf{e}_k$ и

$$p^{[k]}(j_1, \dots, j_{|S|}) = \sum_{\alpha \in S^*: n(s_1, \alpha) = j_1, \dots, n(s_{|S|}, \alpha) = j_{|S|}} \mathbf{P}\{s_k \rightarrow \alpha\}, \quad (4)$$

где $p^{[k]}(j_1, \dots, j_{|S|})$, $k = 1, \dots, |S|$, есть вероятность того, что из символа $s_k \in S$ появилось за один момент времени $j_1 \geq 0$ символов $s_1, \dots, j_{|S|} \geq 0$ символов $s_{|S|}$. Пусть $\mathcal{C}_{|S|} = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ — единичный куб в $\mathbf{R}^{|S|}$ — $|S|$ -мерном пространстве действительных чисел и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{|S|}) \in \mathcal{C}_{|S|}$, тогда $\vec{N}_1^{[k]}$ имеет производящую функцию

$$f^{[k]}(\mathbf{x}) \equiv f^{[k]}(x_1, \dots, x_{|S|}) = \sum_{j_1, \dots, j_{|S|}=0}^{\infty} p^{[k]}(j_1, \dots, j_{|S|}) x_1^{j_1} \dots x_{|S|}^{j_{|S|}}. \quad (5)$$

Производящую функцию процесса $\vec{N}_t^{[k]}$ при $t > 0$ обозначим $f_t^{[k]}(\mathbf{x})$ и введем $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = (f_t^{[1]}(\mathbf{x}), \dots, f_t^{[|S|]}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = (f^{[1]}(\mathbf{x}), \dots, f^{[|S|]}(\mathbf{x}))$. Известно (см. [2], [3], [5]), что при $t \geq 0$: $\mathbf{f}_{t+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}_t(\mathbf{x}))$. В том случае, когда начальное состояние процесса $\vec{N}_t^{[k]}$ для нас неважно, мы будем опускать верхний индекс и писать $\vec{N}_t$. Обозначим через $M = (m_{ij})$, $m_{ij} = \mathbf{E}N_1^{[i]}(s_j)$, матрицу средних ветвящегося процесса $\vec{N}_t$. Известно (см. [2], [3], [5]), что $\mathbf{E}(\vec{N}_{t+T} | \vec{N}_t) = \vec{N}_t M^T$, где $t, T \geq 0$. Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Предположение 1. $\vec{N}_t$ есть надкритический ветвящийся процесс (т.е. максимальное по модулю собственное значение ρ его матрицы средних M больше 1) (см. [2], [3], [5]) и вероятности подстановок удовлетворяют (1)–(2).

Назовем матрицу $M = (m_{ij})$ строго положительной ($M > 0$), если $\min_{i,j} (m_{ij}t) > 0$.

Определение 1. Ветвящийся процесс $\vec{N}_t$ называется *положительно регулярным*, если для его матрицы средних M выполнено: $\exists n > 0, M^n > 0$.

Ветвящийся процесс $\vec{N}_t$ называется *сингулярным*, если его производящая функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ имеет вид $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}C$, где C — некоторая постоянная матрица с неотрицательными элементами. В этом случае каждый объект имеет ровно одного потомка.

Заметим, что из предположения 1 следует, что $\vec{N}_t$ есть положительно регулярный и несингулярный ветвящийся процесс.

Определение 2. Для любого слова $\alpha = y_1 \dots y_m \in S^+$, $y_1, \dots, y_m \in S$, $m > 0$, и $t > 0$ обозначим через $p^{[\gamma]}(\alpha; t)$ — $|\alpha|$ -мерное распределение процесса $Z_t^{[\gamma]}$:

$$p^{[\gamma]}(\alpha; t) = \mathbf{P}\{x_1^{[\gamma]}(t) = y_1, \dots, x_m^{[\gamma]}(t) = y_m\}.$$

Определение 3. Для любого слова $\alpha \in S^+$ и $t > 0$ введем

$$\mu^{[k]}(\alpha; t) = \frac{\mathbf{E}n(\alpha, \gamma^{[k]}(t))}{\mathbf{E}n^{[k]}(t)}, \quad k = 1, \dots, |S|.$$

Основные результаты.

Теорема 1. Если выполнено предположение 1, то для любого слова $\alpha \in S^+$ и любого начального слова γ , $|\gamma| = \infty$, существует предел

$$\pi^{[\gamma]}(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} p^{[\gamma]}(\alpha; t).$$

Теорема 2. Если $\vec{N}_t$ есть надкритический ветвящийся процесс со строго положительной матрицей средних и вероятности подстановок удовлетворяют (2), то для любого слова $\alpha \in S^+$ существует предел

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{[k]}(\alpha; t), \quad k = 1, \dots, |S|,$$

не зависящий от k , причем $\forall \alpha \in S^+ : \mu(\alpha) > 0$.

Теорема 3. Если выполнено предположение 1, то для любого слова $\alpha \in S^+$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $L(\varepsilon, \alpha)$, $t(\varepsilon, \alpha) > 0$ такие, что для любых $L > L(\varepsilon, \alpha)$, $t > t(\varepsilon, \alpha)$, $j > 0$ и любого начального слова γ , $|\gamma| = \infty$, выполнено:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{n(\alpha, x_j^{[\gamma]}(t) \dots x_{j+L-1}^{[\gamma]}(t))}{L - |\alpha| + 1} - \mu(\alpha)\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon$$

Теорема 4. Если выполнено предположение 1, то для любого слова $\alpha = y_1 \dots y_m \in S^+$, $y_1, \dots, y_m \in S$, $m > 0$, существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_j^{[\gamma]}(t) = y_1, \dots, x_{j+m-1}^{[\gamma]}(t) = y_m\} = \mu(\alpha),$$

не зависящий от начального слова γ , $|\gamma| = \infty$.

Следствие. Если выполнено предположение 1, то $\mu(\alpha)$ является вероятностной мерой на словах фиксированной длины, т.е. $\mu(\alpha)$ неотрицательна, аддитивна и для любого $m > 0$: $\sum_{\alpha \in S^+ : |\alpha|=m} \mu(\alpha) = 1$.

Но без предположения 1, как было показано в [7], теорема 4 неверна.

Ниже мы приводим доказательства теорем 1 и 2, эти доказательства не используют результатов из [7] и, более того, потребовали применения новых методов. Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательствам соответствующих теорем для случая $\forall s \in S: \mathbf{P}\{s \rightarrow \emptyset\} = 0$ из работы [7] и мы опускаем их.

Доказательство теоремы 1. Введем обозначения: для $i = 1, \dots, |S|$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} q^{[i]} &= \mathbf{P}\{\exists t > 0: \bar{N}_t^{[i]} = \mathbf{0}\}, \quad q^{[i]}(t) = \mathbf{P}\{\bar{N}_t^{[i]} = \mathbf{0}\}, \\ \mathbf{q} &= (q^{[1]}, \dots, q^{[|S|]}), \quad \mathbf{q}(t) = (q^{[1]}(t), \dots, q^{[|S|]}(t)), \\ D &= (d_{ij})_{i,j=1,\dots,|S|}, \quad \text{где } d_{ij} = \left. \frac{df^{[i]}(\mathbf{x})}{dx_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Для векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{|S|})$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{|S|})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{|S|}$, введем следующие обозначения: $|\mathbf{x}| = \max_{i=1,\dots,|S|} |x_i|$; $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$), если $x_i < y_i$ ($x_i \leq y_i$) для $i = 1, \dots, |S|$; для $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$: $\mathbf{x}^{\mathbf{y}} = x_1^{y_1} \dots x_{|S|}^{y_{|S|}}$.

В работе [4, с. 568] была доказана следующая теорема, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема. Если $\bar{N}_t$ есть надкритический ветвящийся процесс и существует τ , $0 < \tau < 1$, такое, что $D^n \tau^{-n}$ сходится к ненулевой, конечной матрице при $n \rightarrow \infty$, то существует вектор-функция $\mathbf{Q}: \mathcal{C}_{|S|} \rightarrow \mathbf{R}^{|S|}$ такая, что для $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} < \mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{q}}{\tau^n} &\rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{Q}(\mathbf{x}) < \infty \quad &\text{для } \mathbf{q} < \mathbf{x} < \mathbf{1}, \quad |\mathbf{Q}(\mathbf{x})| < \infty \quad \text{для } \mathbf{0} \leq \mathbf{x} < \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Лемма 1. Если выполнено предположение 1, то выполнены все условия предыдущей теоремы и, следовательно, верно (6).

Доказательство. Из (1), (2), (4) и (5) следует, что матрица D строго положительная, и в силу теоремы Перрона–Фробениуса (см. [3, с. 185]) достаточно проверить, что ее максимальное по модулю собственное значение строго меньше единицы.

Учитывая (2) и используя разложение Тейлора для $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{|S|}$, представим $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) + (\mathbf{x} - \mathbf{q})B + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где B есть транспонированная матрица D (а значит, $B > 0$) и компоненты $g^{[l]}(\mathbf{x})$, $l = 1, \dots, |S|$, функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ суть линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами членов вида

$$(x_1 - q^{[1]})^{i_1} \dots (x_{|S|} - q^{[|S|]})^{i_{|S|}} \left. \frac{df^{[l]}(\mathbf{x})}{dx_1^{i_1} \dots dx_{|S|}^{i_{|S|}}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{q}},$$

где $i_j \geq 0$, $j = 1, \dots, |S|$, и $1 < i_1 + \dots + i_{|S|} \leq K$, но из (1), (2), (4) и (5) следует, что частные производные любого порядка от $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ по $x_1, \dots, x_{|S|}$ неотрицательны в точках $\mathbf{x}$, $\mathbf{0} < \mathbf{x} < \mathbf{1}$ и, значит,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{q} < \mathbf{x} < \mathbf{1}: \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}. \quad (8)$$

Так как $\mathbf{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ (см. [3, с. 186]) и $df^{[l]}(\mathbf{x})/dx_j > 0$, $\mathbf{0} < \mathbf{x} < \mathbf{1}$, $j, l = 1, \dots, |S|$, то

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{q} < \mathbf{x} < \mathbf{1}: \mathbf{q} < \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{1}. \quad (9)$$

Тогда из (8), (9) и $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}_{t-1}(\mathbf{x}))$ (см. [5, с. 36]) следует, что

$$\forall k \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{q} < \mathbf{x} < \mathbf{1}: \mathbf{g}(\mathbf{f}_k(\mathbf{x})) \geq \mathbf{0}. \quad (10)$$

Это неравенство нам понадобится ниже. Проитерировуем (7) с учетом $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}_{t-1}(\mathbf{x}))$ и $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$:

$$\forall t > 0: \mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{q} + (\mathbf{x} - \mathbf{q})B^t + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{g}(\mathbf{f}_{t-1-j}(\mathbf{x}))B^j.$$

Взяв $\mathbf{x}$: $\mathbf{q} < \mathbf{x} < \mathbf{1}$ и переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, с учетом соотношений $\forall \mathbf{x}$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} < \mathbf{1}$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ (см. [3, с. 186]) и $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((\mathbf{x} - \mathbf{q}) B^t + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{g}(\mathbf{f}_{t-1-j}(\mathbf{x})) B^j \right) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Как упоминалось выше, $B > 0$, значит, учитывая (10) и то, что $\mathbf{x} - \mathbf{q} > \mathbf{0}$, из (11) получим $\lim_{t \rightarrow \infty} B^t = 0$. Применяя теорему Перрона–Фробениуса к строго положительной матрице B , мы видим, что это возможно только в том случае, когда максимальное по модулю собственное значение матрицы B меньше единицы. Что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если выполнено предположение 1, то для любого $j > 0$ существуют $C \equiv C(j) > 0$ и $\tau < 1$ такие, что для любого $t > 0$ и $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{|S|})$

$$\sum_{\mathbf{k}: 0 < k_1 + \dots + k_{|S|} \leq j} \mathbf{P}\{\tilde{N}_t^{[l]} = \mathbf{k}\} < C\tau^t, \quad l = 1, \dots, |S|.$$

Доказательство. Выберем $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{|S|})$:

$$0 < x_i < 1, \quad i = 1, \dots, |S|. \quad (12)$$

Тогда из леммы 1 следует, что существует $c \equiv c(\mathbf{x}) > 0$ такое, что для любого $t > 0$

$$\frac{f_t^{[l]}(\mathbf{x}) - q^{[l]}}{\tau^t} < c, \quad l = 1, \dots, |S|.$$

Домножая на τ^t и расписывая $f_t^{[l]}(\mathbf{x})$, приходим к оценке

$$\sum_{\mathbf{k}: k_1 + \dots + k_{|S|} > 0} \mathbf{P}\{\tilde{N}_t^{[l]} = \mathbf{k}\} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} + q^{[l]}(t) - q^{[l]} < c\tau^t. \quad (13)$$

Учитывая соотношения $\mathbf{q}(t) - \mathbf{q} \leq \mathbf{0}$ и $q^{[l]}(t) = \mathbf{P}\{\tilde{N}_t^{[l]} = 0\} = f_t^{[l]}(0)$, $l = 1, \dots, |S|$ (см. [3, с. 183, 186]), из леммы 1 получаем, что существует $d > 0$ такое, что для любого $t > 0$

$$-d\tau^t < q^{[l]}(t) - q^{[l]} \leq 0, \quad l = 1, \dots, |S|.$$

Подставляя это в (13), получим

$$\left(\sum_{\mathbf{k}: 0 < k_1 + \dots + k_{|S|} \leq j} + \sum_{\mathbf{k}: k_1 + \dots + k_{|S|} > j} \right) \mathbf{P}\{\tilde{N}_t^{[l]} = \mathbf{k}\} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} < (c + d)\tau^t. \quad (14)$$

Возьмем $a \equiv a(\mathbf{x}, j) = \min_{\mathbf{k}: 0 < k_1 + \dots + k_{|S|} \leq j} \{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\}$. Из (12) следует, что $a > 0$, а значит, из (14) получаем, что

$$0 \leq \sum_{\mathbf{k}: 0 < k_1 + \dots + k_{|S|} \leq j} \mathbf{P}\{\tilde{N}_t^{[l]} = \mathbf{k}\} < \frac{(c + d)}{a} \tau^t.$$

Лемма 2 доказана.

Для любого слова $\alpha = z_1 \dots z_{|\alpha|}$, $z_1, \dots, z_{|\alpha|} \in S$, $|\alpha| \geq 1$, введем

$$r^{[i]}(\alpha, 0) = 0$$

$$\forall t > 0: r^{[i]}(\alpha, t) = \mathbf{P}\left\{n^{[i]}(t) \geq |\alpha|; x_1^{[i]}(t) = z_1, \dots, x_{|\alpha|}^{[i]}(t) = z_{|\alpha|}\right\},$$

где $i = 1, \dots, |S|$. Введем также вектор $\vec{r}(\alpha, t)$ с компонентами $r^{[i]}(\alpha, t)$, $i = 1, \dots, |S|$. Докажем существование предела $\vec{r}(\alpha, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим сначала случай $\alpha = s$, $s \in S$, т.е. $|\alpha| = 1$.

Для $r^{[i]}(\alpha, t)$, $t > 1$, $i = 1, \dots, |S|$, напомним рекуррентные уравнения, аналогичные обратным уравнениям Колмогорова для ветвящихся процессов:

$$r^{[i]}(\alpha, t) = \sum_{j=1}^{|S|} \left(\sum_{\beta \in S^*} \left(\mathbf{P}\{s_i \rightarrow s_j \beta\} + \sum_{m=1}^{K-1} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{|S|} \mathbf{P}\{s_i \rightarrow s_{i_1} \dots s_{i_m} s_j \beta\} \right. \right. \\ \left. \left. \times q^{[i_1]}(t-1) \dots q^{[i_m]}(t-1) \right) \right) r^{[j]}(\alpha, t-1).$$

Введем матрицы Q и $E(t)$ размера $|S| \times |S|$ с элементами

$$q_{ij} = \sum_{\beta \in S^*} \left(\mathbf{P}\{s_i \rightarrow s_j \beta\} + \sum_{m=1}^{K-1} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{|S|} \mathbf{P}\{s_i \rightarrow s_{i_1} \dots s_{i_m} s_j \beta\} q^{[i_1]} \dots q^{[i_m]} \right), \quad (15)$$

$$e_{ij}(k) = \sum_{\beta \in S^*} \sum_{m=1}^{K-1} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{|S|} \mathbf{P}\{s_i \rightarrow s_{i_1} \dots s_{i_m} s_j \beta\} \left(q^{[i_1]} \dots q^{[i_m]} - q^{[i_1]}(k) \dots q^{[i_m]}(k) \right)$$

соответственно, $i, j = 1, \dots, |S|$, $k > 0$. Заметим, что из (1) следует, что Q — строго положительная матрица.

Теперь рекуррентные уравнения для $r^{[i]}(\alpha, t)$ можно переписать в матричном виде:

$$\vec{r}(s, t) = (Q - E(t-1)) \vec{r}(s, t-1),$$

или, применяя индукцию,

$$\vec{r}(s, t) = \prod_{k=2}^t (Q - E(k-1)) \vec{r}(s, 1). \quad (16)$$

Так как для $k > 0$: $q^{[i]}(k) \leq q^{[i]}$ и $q^{[i]}(k) = f_k^{[i]}(0)$, $1 \leq i \leq |S|$, то из (15) и леммы 1 следует оценка

$$\forall k > 0: 0 \leq e_{ij}(k) \leq C \tau^k, \quad C > 0, \quad (17)$$

где τ было определено в лемме 2 и $1 \leq i, j \leq |S|$.

Лемма 3. Если выполнено предположение 1, то максимальное по модулю собственное значение ϱ^* матрицы Q равно 1.

Доказательство. Обозначим через $\varrho^*(t)$ максимальное по модулю собственное значение матрицы $Q - E(t)$. Будем доказывать от противного.

Пусть $\varrho^* > 1$, тогда в силу (17) существует $T > 0$ такое, что $\forall t > T$: $\varrho^*(t) > \varrho' > 1$. Тогда из (16) и теоремы Перрона–Фробениуса следует, что существуют $T_0 > T$, $s \in S$, для которых $\vec{r}(s, T_0) > 1$, что невозможно.

Пусть $\varrho^* < 1$, тогда в силу (17) существует $T > 0$ такое, что $\forall t > T$: $\varrho^*(t) < \varrho' < 1$. Но тогда из (16) и теоремы Перрона–Фробениуса следует, что

$$\forall s \in S: \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(s, t) = 0,$$

а это противоречит тому, что в надкритическом случае $q^{[1]}, \dots, q^{[|S|]} < 1$ (см. [5, с. 41]).

Следовательно, $\varrho^* = 1$.

Из оценки (17), леммы 3 и критерия сходимости произведений матриц (см. [6, с. 416] или [3, с. 187]) следует существование предела для (16) при $t \rightarrow \infty$

$$r^{[i]}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} r^{[i]}(s, t), \quad i = 1, \dots, |S|. \quad (18)$$

В случае $|\alpha| \geq 2$ рекуррентные соотношения на $\vec{r}(\alpha, t)$, $t > 0$ принимают вид

$$\vec{r}(\alpha, t) = (Q - E(t-1)) \vec{r}(\alpha, t-1) + \vec{\delta}(\alpha, t-1), \quad (19)$$

где матрицы Q и $E(t-1)$ были определены выше и $\vec{\delta}(\alpha, T)$, $T \geq 0$, есть вектор с компонентами $\delta^{[k]}(\alpha, T)$, $k = 1, \dots, |S|$, которые определяются следующим образом (см. рис. 1): $\delta^{[k]}(\alpha, 0) = \sum_{\beta \in S^*} \mathbf{P}\{s_k \rightarrow \alpha\beta\}$,

$$\forall T > 0: \delta^{[k]}(\alpha, T) = \sum_{m=2}^K \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{|S|} \mathbf{P}\{s_k \rightarrow s_{i_1} \dots s_{i_m}\} \\ \times \sum_{n=2}^m \sum_{(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in A(n, \alpha)} \prod_{j=1}^n \mathbf{P}\{\gamma^{[i_j]}(T) = \lambda_j\},$$

Рис. 1. Пояснение к определению $\delta^{[k]}(\alpha, T)$.

где

$$A(n, \alpha) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n): \lambda_i \in S^*, i = 1, \dots, n, \right. \\ \left. \exists \beta \in S^*: \lambda_1 \dots \lambda_n = \alpha\beta, 0 < \sum_{l=1}^{n-1} |\lambda_l| < |\alpha| \leq \sum_{l=1}^n |\lambda_l| \right\}.$$

Итерируя (19), с учетом $\vec{r}(\alpha, 0) = \mathbf{0}$ получим: $\vec{r}(\alpha, 1) = \vec{\delta}(\alpha, 0)$,

$$\forall t \geq 2: \vec{r}(\alpha, t) = \sum_{i=1}^{t-1} \prod_{j=i}^{t-1} (Q - E(j)) \vec{\delta}(\alpha, i-1) + \vec{\delta}(\alpha, t-1). \quad (20)$$

Из определения $\delta^{[k]}(\alpha, t)$ и леммы 2 следует, что существуют $C > 0$ и $\tau < 1$ такие, что при $t > 0$ верна оценка

$$\delta^{[k]}(\alpha, t) \leq c' \max_{1 \leq a \leq |S|} \left\{ \mathbf{P}\{0 < n^{[a]}(t) < |\alpha|\} \right\} < C\tau^t, \quad k = 1, \dots, |S|, \quad c' > 0.$$

Тогда, в силу оценки (17) и критерия сходимости произведения матриц, ряд в правой части (20) сходится, а значит, предел $\vec{r}(\alpha, t)$ при $t \rightarrow \infty$ существует. Для дальнейшего доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее определение.

О п р е д е л е н и е 4. В процессе $Z_t^{[\gamma]}$ символ $x_j^{[\gamma]}(t+T)$, $j > 0$, $t \geq 0$, является потомком символа $x_i^{[\gamma]}(t)$, $i > 0$, в момент времени $t+T$ (обозначается $x_i^{[\gamma]}(t) \Rightarrow x_j^{[\gamma]}(t+T)$), если

а) при $T = 1$ символ $x_i^{[\gamma]}(t)$ перешел в слово $x_m^{[\gamma]}(t+1) \dots x_n^{[\gamma]}(t+1)$ и $m \leq j \leq n$, где $m, n > 0$;

б) при $T > 1$ существуют $i_1, \dots, i_{T-1} > 0$ такие, что $x_i^{[\gamma]}(t) \Rightarrow x_{i_1}^{[\gamma]}(t+1) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{i_{T-1}}^{[\gamma]}(t+T-1) \Rightarrow x_j^{[\gamma]}(t+T)$.

Для процесса $Z_t^{[k]}$, $k = 1, \dots, |S|$ понятие $x_i^{[k]}(t) \Rightarrow x_j^{[k]}(t+T)$ определяется аналогично для $t \geq 0$, $i, j, T > 0$.

Введем $\beta_i^{[\gamma]}(t) = x_{a(i,t)}^{[\gamma]}(t) \dots x_{b(i,t)}^{[\gamma]}(t)$, $i > 0$, где $a(i, t) = \min_j \{j: x_i^{[\gamma]}(0) \Rightarrow x_j^{[\gamma]}(t)\}$, $b(i, t) = \max_j \{j: x_i^{[\gamma]}(0) \Rightarrow x_j^{[\gamma]}(t)\}$. Если не существует $j > 0$ такого, что $x_i^{[\gamma]}(0) \Rightarrow$

$x_j^{[\gamma]}(t)$, то $\beta_i^{[\gamma]}(t) = e$. Таким образом, $\beta_i^{[\gamma]}(t)$ состоит из всех потомков символа $x_i^{[\gamma]}(0)$ в момент времени t . Введем также векторы размерности $|S|$: $\vec{g}_n^{[\gamma]} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $n > 0$, где 1 стоит на i -м месте, если $x_n^{[\gamma]}(0) = s_i \in S$, $1 \leq i \leq |S|$, и величину $q_n^{[\gamma]}(t)$, $n, t > 0$, равную $q^{[i]}(t)$, если $x_n^{[\gamma]}(0) = s_i$. Тогда для $\alpha \in S^+$ и $t > 0$:

$$p^{[\gamma]}(\alpha, t) = (\vec{g}_1^{[\gamma]} \cdot \vec{r}(\alpha, t)) + \sum_{n=2}^{\infty} q_1^{[\gamma]}(t) \cdots q_{n-1}^{[\gamma]}(t) (\vec{g}_n^{[\gamma]} \cdot \vec{r}(\alpha, t)) + \phi^{[\gamma]}(\alpha, t), \quad (21)$$

где $\phi^{[\gamma]}(\alpha, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A(n, \alpha)} \prod_{j=1}^n \mathbf{P}\{\beta_j^{[\gamma]}(t) = \lambda_j\}$. Из леммы 2 следует, что существуют $C > 0$ и $\tau < 1$ такие, что $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} \phi^{[\gamma]}(\alpha, t) &\leq \mathbf{P}\{0 < |\beta_1^{[\gamma]}(t)| < |\alpha|\} + \sum_{m=1}^{\infty} q_1^{[\gamma]}(t) \cdots q_m^{[\gamma]}(t) \mathbf{P}\{0 < |\beta_{m+1}^{[\gamma]}(t)| < |\alpha|\} \\ &\leq \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} q_{\max}^m\right) \max_{1 \leq a \leq |S|} \left\{ \mathbf{P}\{0 < n^{[a]}(t) < |\alpha|\} \right\} < C\tau^t, \end{aligned} \quad (22)$$

где $q_{\max} = \max_{i=1, \dots, |S|} q^{[i]} < 1$, так как в положительно регулярном надкритическом случае $q^{[i]} < 1$, $i = 1, \dots, |S|$ (см. [5, с. 41]). Следовательно ряд $\sum_{m=1}^{\infty} q_{\max}^m$ сходится как геометрическая прогрессия.

Ряд в правой части (21) оценивается сверху рядом $\sum_{m=1}^{\infty} q_{\max}^m$ и, следовательно, сходится равномерно по t , а значит, в силу существования пределов $\lim_{t \rightarrow \infty} q_n^{[\gamma]}(t) = q_n^{[\gamma]} < 1$, $n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(\alpha, t) = \vec{r}(\alpha)$ можно перейти к почленному пределу при $t \rightarrow \infty$ в ряде в правой части (21), учитывая (22), получим

$$\pi^{[\gamma]}(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} p^{[\gamma]}(\alpha, t) = (\vec{g}_1^{[\gamma]} \cdot \vec{r}(\alpha)) + \sum_{n=2}^{\infty} q_1^{[\gamma]} \cdots q_{n-1}^{[\gamma]} (\vec{g}_n^{[\gamma]} \cdot \vec{r}(\alpha)).$$

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Для любого слова $\alpha \in S^+$ и $t > 0$ введем $e^{[k]}(t, \alpha) = \mathbf{E}n(\alpha, \gamma^{[k]}(t))$, $e^{[k]}(0, \alpha) = 0$, $k = 1, \dots, |S|$. Наша цель — написать рекуррентные уравнения для $e^{[k]}(t, \alpha)$ и исследовать их асимптотическое решение при $t \rightarrow \infty$. Введем $\varepsilon^{[k]}(t, \alpha)$, $k = 1, \dots, |S|$, $t \geq 0$, следующим образом: $\varepsilon^{[k]}(0, \alpha) \equiv 0$,

$$\varepsilon^{[k]}(1, \alpha) = e^{[k]}(1, \alpha) = \sum_{\beta \in S^+} n(\alpha, \beta) \mathbf{P}\{s_k \rightarrow \beta\}.$$

Для определения $\varepsilon^{[k]}(t, \alpha)$ при $t > 1$ разобьем слово $\gamma^{[k]}(t)$ на непересекающиеся под-слова $\lambda_i^{[k]}(t)$:

$$\lambda_i^{[k]}(t) = x_{a(i, k, t)}^{[k]} \cdots x_{b(i, k, t)}^{[k]}(t), \quad i = 1, \dots, n^{[k]}(1),$$

где

$$a(i, k, t) = \min_j \left\{ j: x_i^{[k]}(1) \Rightarrow x_j^{[k]}(t) \right\}, \quad b(i, k, t) = \max_j \left\{ j: x_i^{[k]}(1) \Rightarrow x_j^{[k]}(t) \right\}.$$

Если не существует $j > 0$ такого, что $x_i^{[k]}(1) \Rightarrow x_j^{[k]}(t)$, то $\lambda_i^{[k]}(t) = e$. Таким образом, $\lambda_i^{[k]}(t)$, $i = 1, \dots, n^{[k]}(1)$, $t > 1$, состоит из всех потомков символа $x_i^{[k]}(1)$ в момент времени t .

Для любого слова $\alpha = y_1 \cdots y_{|\alpha|}$, $|\alpha| > 0$, $y_1, \dots, y_{|\alpha|} \in S$, обозначим через $\varepsilon^{[k]}(t, \alpha)$, $k = 1, \dots, |S|$, $t \geq 2$, математическое ожидание числа подслов $x_j^{[k]}(t) \cdots x_{j+|\alpha|-1}^{[k]}(t) = \alpha$, $1 \leq j \leq n^{[k]}(t) - |\alpha| + 1$, слова $\gamma^{[k]}(t)$, содержащих в себе потомков не менее двух

символов $x_i^{[k]}(1)$, $i = 1, \dots, n^{[k]}(1)$, т.е. не являющихся подсловом ни одного $\lambda_i^{[k]}(t)$, $i = 1, \dots, n^{[k]}(1)$:

$$\varepsilon^{[k]}(t, \alpha) = \sum_{j>0} \mathbf{P} \left\{ n^{[k]}(t) \geq j + |\alpha| - 1; x_j^{[k]}(t) = y_1, \dots, x_{j+|\alpha|-1}^{[k]}(t) = y_{|\alpha|}; \right. \\ \left. x_j^{[k]}(t) \dots x_{j+|\alpha|-1}^{[k]}(t) \not\subset \lambda_i^{[k]}(t), i = 1, \dots, n^{[k]}(1) \right\},$$

где $\beta_1 \not\subset \beta_2$ означает, что слово $\beta_1 \in S^*$ не является подсловом слова $\beta_2 \in S^*$.

Величина $\varepsilon^{[k]}(t, \alpha)$, $t > 1$, оценивается сверху максимальным числом подслов длины $|\alpha|$ слова $\gamma^{[k]}(t)$, содержащих в себе потомков не менее двух символов $x_i^{[k]}(1)$, $i = 1, \dots, n^{[k]}(1)$. Так как из (2) следует, что $n^{[k]}(1) \leq K$, то

$$\forall \alpha \in S^+, \forall t > 1: \varepsilon^{[k]}(t, \alpha) \leq (|\alpha| - 1)(K - 1), \quad \varepsilon^{[k]}(1, \alpha) \leq K, \quad (23)$$

$k = 1, \dots, |S|$. Эта оценка нам понадобится ниже.

Напишем рекуррентные уравнения для $e^{[k]}(t, \alpha)$, $k = 1, \dots, |S|$, $t > 0$:

$$e^{[k]}(t, \alpha) = \sum_{\beta \in S^+} \mathbf{P}\{s_k \rightarrow \beta\} \sum_{j=1}^{|S|} n(s_j, \beta) e^{[j]}(t-1, \alpha) + \varepsilon^{[k]}(t, \alpha). \quad (24)$$

Матрица с компонентами $m_{ij} = \sum_{\beta \in S^+} \mathbf{P}\{s_i \rightarrow \beta\} n(s_j, \beta)$, $i, j = 1, \dots, |S|$, есть в точности матрица средних M ветвящегося процесса $\tilde{N}_t$. Тогда, обозначив через $\vec{e}(t, \alpha)$ и $\vec{\varepsilon}(t, \alpha)$ векторы с компонентами $e^{[i]}(t, \alpha)$ и $\varepsilon^{[i]}(t, \alpha)$, $i = 1, \dots, |S|$, соответственно, мы можем переписать (24) в векторной форме:

$$\vec{e}(t, \alpha) = M \cdot \vec{e}(t-1, \alpha) + \vec{\varepsilon}(t, \alpha).$$

Итерируя это уравнение, с учетом $\vec{e}(0, \alpha) = \mathbf{0}$ получим, что

$$\forall t > 0: \vec{e}(t, \alpha) = \sum_{i=0}^{t-1} M^i \vec{\varepsilon}(t-i, \alpha). \quad (25)$$

Исследуем поведение $\vec{e}(t, \alpha)$ при $t \rightarrow \infty$. Из теоремы Перрона–Фробениуса (см. [5, с. 38] или [3, с. 185]) следует, что $M^t = \varrho^t P + R^t$, где P имеет строго положительные компоненты $u_i v_j$, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_{|S|})$ есть правый, а $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{|S|})$ — левый собственные векторы матрицы M , соответствующие ее максимальному собственному значению $\varrho > 1$, с нормировкой: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$, $(\vec{u} \cdot \mathbf{1}) = 1$, а матрица R такова, что модули компонент матрицы R^t не превосходят $C \varrho_0^t$, $C > 0$, $\varrho_0 < \varrho$. Подставим это в (25):

$$\frac{\vec{e}(t, \alpha)}{\varrho^t} = \frac{\sum_{i=0}^{t-1} \varrho^i P \vec{\varepsilon}(t-i, \alpha)}{\varrho^t} + \frac{\sum_{i=0}^{t-1} R^i \vec{\varepsilon}(t-i, \alpha)}{\varrho^t}. \quad (26)$$

Так как модули компонент матрицы R^i при $i \geq 0$ не превосходят $C \varrho_0^i$, $C > 0$, $\varrho_0 < \varrho$, то, учитывая (23), получаем, что второе слагаемое в (26) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим первое слагаемое. Так как $\varrho > 1$, то, учитывая (23), получим

$$P \sum_{j=1}^t \frac{\vec{\varepsilon}(j, \alpha)}{\varrho^j} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_{|S|} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{|S|} v_1 & \dots & u_{|S|} v_{|S|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{[1]}(\alpha) \\ \vdots \\ L^{[|S|]}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $L^{[1]}(\alpha), \dots, L^{[|S|]}(\alpha) > 0$ — константы, зависящие только от слова α . Обозначив $d(\alpha) = \sum_{i=1}^{|S|} v_i L^{[i]}(\alpha) > 0$, из (26) и (27) получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{[k]}(t, \alpha) \varrho^{-t} = u_k d(\alpha), \quad k = 1, \dots, |S|.$$

С другой стороны, так как $E(\vec{N}_t^{[k]}) = \mathbf{e}_k M^t$, то для $n^{[k]}(t) = \sum_{i=1}^{|S|} N_t^{[k]}(s_i)$ из теоремы Перрона-Фробениуса получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E n^{[k]}(t)}{\varrho^t} = u_k \sum_{i=1}^{|S|} v_i, \quad k = 1, \dots, |S|.$$

Тогда из определения $\mu^{[k]}(\alpha; t)$, $k = 1, \dots, |S|$, получаем

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{[k]}(\alpha; t) = \frac{u_k d(\alpha)}{u_k(v_1 + \dots + v_{|S|})} = \frac{d(\alpha)}{v_1 + \dots + v_{|S|}}, \quad k = 1, \dots, |S|.$$

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальшев В. А. Случайные грамматики. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, № 2, с. 107–134.
2. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
3. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
4. Athreya K. B., Vidyashankar A. N. Large deviation results for branching processes. II: The multitype case. — Ann. Appl. Probab., 1995, v. 5, № 2, p. 566–576.
5. Harris T. E. The Theory of Branching Processes. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1963, 230 p.
6. Joffe A., Spitzer F. On multitype branching process with $\varrho < 1$. — J. Math. Anal. Appl., 1967, v. 19, № 3, p. 409–430.
7. Karpelevich F. I., Malyshev V. A., Petrov A. I., Pirogov S. A., Rybko A. N. Context Free Evolution of Words. — Rapport de Recherche № 4413. Rocquencourt: INRIA, 2002.

Поступила в редакцию
19.II.2002

© 2002 г.

ПИТЕРБАРГ В. И.*, КОЗЛОВ А. М.*

О БОЛЬШИХ СКАЧКАХ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ С УСЛОВИЕМ КРАМЕРА¹⁾

В работе получена асимптотика вероятностей больших отклонений для приращений случайного блуждания с условием Крамера.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, большие отклонения, условие Крамера.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: piter@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 01-01-00649, 00-01-00247, 01-01-00644).