Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Питербарг, А. М. Козлов, О больших скачках случайного блуждания с условием Крамера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 803–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:42:46

С другой стороны, так как $E(\vec{N}_t^{[k]}) = \mathbf{e}_k M^t$, то для $n^{[k]}(t) = \sum_{i=1}^{|S|} N_t^{[k]}(s_i)$ из теоремы Перрона-Фробениуса получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E n^{[k]}(t)}{\varrho^t} = u_k \sum_{i=1}^{|S|} v_i, \quad k = 1, \dots, |S|.$$

Тогда из определения $\mu^{[k]}(\alpha; t)$, $k = 1, \dots, |S|$, получаем

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{[k]}(\alpha; t) = \frac{u_k d(\alpha)}{u_k(v_1 + \dots + v_{|S|})} = \frac{d(\alpha)}{v_1 + \dots + v_{|S|}}, \quad k = 1, \dots, |S|.$$

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальшев В. А. Случайные грамматики. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, № 2, с. 107–134.
2. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
3. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
4. Athreya K. B., Vidyashankar A. N. Large deviation results for branching processes. II: The multitype case. — Ann. Appl. Probab., 1995, v. 5, № 2, p. 566–576.
5. Harris T. E. The Theory of Branching Processes. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1963, 230 p.
6. Joffe A., Spitzer F. On multitype branching process with $\varrho < 1$. — J. Math. Anal. Appl., 1967, v. 19, № 3, p. 409–430.
7. Karpelevich F. I., Malyshev V. A., Petrov A. I., Pirogov S. A., Rybko A. N. Context Free Evolution of Words. — Rapport de Recherche № 4413. Rocquencourt: INRIA, 2002.

Поступила в редакцию
19.II.2002

© 2002 г.

ПИТЕРБАРГ В. И.*, КОЗЛОВ А. М.*

О БОЛЬШИХ СКАЧКАХ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ С УСЛОВИЕМ КРАМЕРА¹⁾

В работе получена асимптотика вероятностей больших отклонений для приращений случайного блуждания с условием Крамера.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, большие отклонения, условие Крамера.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: piter@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 01-01-00649, 00-01-00247, 01-01-00644).

1. Введение. Основные результаты. Рассмотрим последовательность ξ_k , $k \geq 1$, независимых одинаково распределенных случайных величин и соответствующее случайное блуждание

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0.$$

Пусть $F(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x\}$, $F_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x\}$ — функции распределения ξ_1 и S_n соответственно, $n = 1, 2, \dots$. Мы предполагаем, что случайное блуждание центрировано ($\mathbf{E}\xi_1 = 0$), распределение невырождено ($\mathbf{P}\{\xi_1 \neq 0\} > 0$) и удовлетворяет правостороннему условию Крамера:

$$R(h) := \mathbf{E}e^{h\xi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} dF(x) < \infty \quad (1)$$

для всех $0 < h < b$ и некоторого положительного $b \leq \infty$.

В работе [1] было получено утверждение типа усиленного закона больших чисел для статистики

$$\rho_N(L) := \max_{0 \leq n \leq N} (S_{n+L} - S_n)$$

при $L = [c \ln N]$, $N \rightarrow \infty$. Ранее (см. [2]) подобный результат был получен для приращений случайного блуждания, зависящих от номера шага (выше под знаком максимума следует положить $L = L_n = [c \ln n]$). В дальнейшем этой тематике посвящали свои исследования целый ряд авторов: J.-N. Bacro, P. Deheuvels, E. Csáki, M. Csörgö, J. Steinebach и др. (см. библиографию в [3]). Пространное исследование слабой сходимости статистики $\rho_N(L)$ проведено в [4]. Предельная теорема для $\rho_N(L)$ в диапазоне $L = o(N)$, $L/\ln N \rightarrow \infty$ была получена одним из авторов (см. [5]) при условии субгауссовости как следствие установленного там результата о больших отклонениях порядка $o(L)$ для максимума нормированных сумм $L^{-1/2}(S_{n+L} - S_n)$. Затем работа была обобщена в [6] на случай блуждания с условием Крамера. Проблематика больших отклонений для приращений случайного блуждания в [5], [6] и методы исследования были заимствованы из теории экстремумов гауссовских процессов (см. [7]), и, к сожалению, связь со статистикой $\rho_N(L)$ не была замечена. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения при $L \rightarrow \infty$ вероятностей

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq n < TL} (S_{n+L} - S_n) \geq \theta L\right\} =: \pi(L; T, \theta L),$$

где $T, \theta > 0$ фиксированы (т.е. сверхбольших отклонений порядка $\sqrt{L}$ нормированных сумм $L^{-1/2}(S_{n+L} - S_n)$). Вероятностная структура траекторий, на которых осуществляется сверхбольшое отклонение, исследована в [14].

Укажем также на связь рассматриваемых задач с вопросами, обсуждавшимися около десяти лет тому назад на московском семинаре по компьютерной генетике. А. М. Леонтовичем был поставлен вопрос, как оценить сходство двух молекул протеина или ДНК одинаковой длины N , если имеется возможность сравнивать их сегменты через движущееся окно. Сделаем весьма упрощающее предположение, что молекулы представляют собой две последовательности одинаковой длины, состоящие из букв, выбранных случайно из общего алфавита (нулевая гипотеза). Пусть L — длина движущегося окна, ξ_k — степень схождения двух «букв» (нуклеотиды или аминокислоты), $\xi_k + \dots + \xi_{k+L-1}$ — степень схождения участков длины L . В [5] эта проблема была рассмотрена для вероятности $\pi(L; T, u)$ для $u = o(L)$, $u \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow \infty$. Решающую роль в проведенных там вычислениях играла центральная предельная теорема с уточнениями для нормированных сумм $L^{-1/2}(S_{n+L} - S_n)$. В работе [5] было показано, что если величина окна L достаточно велика, а именно, $(\ln T)/L \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$ (при этом $L/\ln N \rightarrow \infty$), то вероятность $\pi(L; T, u(L))$ для некоторой последовательности $u(L)$ стремится к нетривиальному пределу, и результат, таким образом, может быть использован для проверки нулевой гипотезы о «независимости» двух молекул. С другой стороны, известно, что для последовательностей, допускающих бернуллиевскую интерпретацию (последовательности букв), размер окна $L \approx \ln N$ критичен в том

смысле, что для достаточно малых s можно с вероятностью, стремящейся к единице, найти участок длиной $s \ln N$ с максимальной степенью схождения. Точные формулировки можно найти в [8] или в [9] в биологической постановке. Следовательно, важно рассмотреть случай величины окна порядка $\ln N$. В этом случае должны рассматриваться сверхбольшие уклонения порядка $\sqrt{L}$ нормированных сумм $L^{-1/2}(S_{n+L} - S_n)$.

Используемые далее обозначения стандартны в теории больших уклонений для сумм случайных величин. Положим

$$m(h) = \frac{R'(h)}{R(h)}, \quad \sigma^2(h) = m'(h) > 0, \quad a = \lim_{h \rightarrow b-} m(h).$$

Пусть h_θ — единственный корень уравнения $m(h_\theta) = \theta$, $0 < \theta < a$, и

$$\Lambda(\theta) = h_\theta \theta - \ln R(h_\theta)$$

(подробности см. ниже). Введем обозначение

$$H(l; h) := \mathbf{E} \exp \left\{ h \max_{0 \leq n < l} (S_{n+l-1} - S_n) \right\}.$$

Как будет видно из дальнейшего (см. (15)–(17)), величина $H(l; h)$ конечна. Кроме того, $H(l; h)$ можно представить в виде

$$H(l; h) = R(h)^{l-1} \bar{H}(l; h), \quad \bar{H}(l; h) = \mathbf{E} \exp \left\{ -h \min_{0 \leq n < l} (S_{n+l-1}^{(h)} - S_n^{(h)}) \right\},$$

где $S_n^{(h)}$ — случайное блуждание, определенное ниже. Далее мы пишем $x \sim y$, если $x/y \rightarrow 1$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено правостороннее условие Крамера (1). Тогда для всех $\theta \in (0, a)$ существует конечный положительный предел*

$$H_\theta = \lim_{l \rightarrow \infty} l^{-1} R(h_\theta)^{-l+1} H(l; h_\theta) = \lim_{l \rightarrow \infty} l^{-1} \bar{H}(l; h_\theta);$$

в случае нерешетчатого распределения шага блуждания ξ_1 для всех T имеем

$$\pi(L; T, \theta L) \sim \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \frac{TH_\theta}{h_\theta \sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)L} \quad (2)$$

при $L \rightarrow \infty$ равномерно по θ , $\varepsilon < \theta < a - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — произвольно (при $a = \infty$ для $\varepsilon < \theta < A$ и любого A); в случае решетчатого распределения правую часть соотношения (2) следует домножить на $d(1 - e^{-d h_\theta})^{-1}$, где d — максимальный шаг распределения.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы 1 нетрудно усмотреть, что соотношение (2) остается верным и в случае, когда $T \rightarrow \infty$ таким образом, что правая часть (2) стремится к нулю.

Константу H_θ в предельном соотношении (2) в случае гауссовского случайного блуждания представим еще в специальной форме, подобной константам Пиканда в теории больших экстремумов гауссовских процессов. Обозначим

$$\mathcal{J}(l) = \theta^{-1} \mathbf{E} \exp \left\{ \theta \max_{0 \leq n < l} (\sqrt{2} S_n - \theta n) \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть ξ_i , $i \geq 1$, — стандартные гауссовские независимые случайные величины. Тогда для любого θ существует конечный и положительный предел $\mathcal{J}_\theta = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{J}(l)/l$ и при $L \rightarrow \infty$*

$$\pi(L; T, \theta L) \sim T \mathcal{J}_\theta \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-\theta^2 L/2}.$$

Заметим, что при выполнении двустороннего условия Крамера (h в (1) изменяется в двусторонней окрестности 0) следующее соотношение имеет место для любого $\frac{1}{2} < \kappa < 1$:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq n < TL} (S_{n+L} - S_n) > \theta L^\kappa\right\} \sim \theta T \sqrt{\frac{L^{2\kappa-1}}{2\pi}} e^{-\theta^2 L^{2\kappa-1}/2}$$

при $L \rightarrow \infty$. Это было доказано в [5] для субгауссовских распределений и затем обобщено в [6]. Кроме того, в цитируемых работах были получены в терминах рядов Крамера члены более высокого порядка малости.

Используя стандартные методы теории экстремальных значений для случайных процессов, можно получить из теоремы 1, что $\pi(L; T, \theta L)$ при $L \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow \infty$ стремится к нетривиальному пределу, если и только если

$$L - \frac{1}{\Lambda(\theta)} \left(\ln T + \frac{1}{2} \ln \ln T \right)$$

стремится к константе. В рассмотренной выше задаче установления сходства молекул для получения нетривиального предела при нулевой гипотезе следует выбрать длину окна равной

$$L = \frac{1}{\Lambda(\theta)} \left(\ln N - \frac{1}{2} \ln \ln N \right)$$

с точностью до произвольной константы, где N — длина молекул. Соответствующая предельная теорема, по-видимому, впервые была получена в работе [13] и затем неоднократно переоткрывалась. К сожалению, и мы познакомились со статьей [13], когда рукопись была готова к печати. Используемый нами подход принципиально иной. Он приводит к другим формам констант в асимптотике больших уклонений и допускает обобщение на процессы с непрерывным временем и поля.

2. Доказательства. Мы будем доказывать обе теоремы одновременно. Шаги 1, 2, 5 и 6 общие для обоих доказательств. Шаги 3 и 4 параллельны.

Шаг 1. Разобьем промежуток $[0, TL)$ на отрезки

$$\Delta_j = [jl, (j+1)l), \quad j = 0, 1, \dots, \frac{TL}{l} - 1,$$

целой длины l , считая для упрощения выкладок число TL кратным l . Запишем

$$\pi(L; T, \theta L) = \mathbf{P}\left(\bigcup_j A_j\right), \quad A_j = \left\{\max_{n \in \Delta_j} (S_{n+L} - S_n) > \theta L\right\}.$$

Мы покажем, что асимптотика суммы вероятностей

$$\sum_j \mathbf{P}(A_j) \equiv \frac{TL}{l} \mathbf{P}(A_0) \quad (3)$$

может быть приближена за счет увеличения параметра l к асимптотике вероятности $\pi(L; T, \theta L)$. Отсюда, кстати, следует, что при TL , не кратном l , наличие одного неполного отрезка разбиения не влияет на результат. В основе используемого подхода лежит неравенство Бонфферони:

$$\sum_j \mathbf{P}(A_j) - \sum_{i < j} \mathbf{P}(A_i A_j) \leq \pi(L; T, \theta L) \leq \sum_j \mathbf{P}(A_j). \quad (4)$$

Шаг 2. При $0 < h < b$ введем вероятностную функцию распределения

$$F^{(h)}(x) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^x e^{hy} dF(y).$$

Обозначим через $\xi_k^{(h)}$, $k \geq 1$, последовательность независимых случайных величин с функцией распределения $F^{(h)}(x)$ и положим

$$S_n^{(h)} = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(h)}, \quad n \geq 1, \quad S_0^{(h)} = 0.$$

Покажем, что два выражения для величины $H(l; h)$, приведенные во введении, действительно совпадают. Имеем

$$\max_{0 \leq n < l} \sum_{i=n+1}^{n+l-1} \xi_i = \max_{0 \leq n < l} \left(\sum_{i=1}^{2l-2} \xi_i - \sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=n+l}^{2l-2} \xi_i \right) = \max_{0 \leq n < l} \left(- \sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=n+l}^{2l-2} \xi_i \right) + \sum_{i=1}^{2l-2} \xi_i.$$

Перенумеруем последовательность $\xi_l, \xi_{l+1}, \dots, \xi_{2l-2}, \xi_1, \dots, \xi_{l-1}$ заново, как $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{2l-2}$, так что предыдущее выражение принимает вид

$$\max_{0 \leq n < l} \left(- \sum_{i=n+1}^{n+l-1} \xi'_i \right) + \sum_{i=1}^{2l-2} \xi'_i.$$

Учитывая, что случайные величины $\xi'_i, i = 1, 2, \dots, 2l-2$, независимы и имеют ту же самую функцию распределения $F(x)$, получаем отсюда

$$\begin{aligned} H(l; h) &= \mathbf{E} \exp \left\{ h \max_{0 \leq n < l} \sum_{i=n+1}^{n+l-1} \xi_i \right\} = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -h \min_{0 \leq n < l} \sum_{i=n+1}^{n+l-1} \xi_i \right\} \cdot \exp \left\{ h \sum_{i=1}^{2l-2} \xi_i \right\} \right] \\ &= R(h)^{l-1} \mathbf{E} \exp \left\{ -h \min_{0 \leq n < l} \sum_{i=n+1}^{n+l-1} \xi_i^{(h)} \right\} = R(h)^{l-1} \bar{H}(l; h). \end{aligned}$$

В основе получения асимптотик и оценки хвостов распределения случайной величины S_n лежит следующее представление:

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} = R(h)^n \int_x^\infty e^{-hy} d\mathbf{P}\{S_n^{(h)} < y\}.$$

Отсюда, например, следует, что для всех $h \in (0, b)$

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} \leq R(h)^n e^{-hx}. \quad (5)$$

Приведем необходимые сведения из теории больших уклонений для сумм S_n . Введем обозначение

$$\Lambda(h; \theta) = h\theta - \ln R(h). \quad (6)$$

Положив в (5) $x = n\theta - y$, запишем это неравенство в виде

$$\mathbf{P}\{S_n \geq n\theta - y\} \leq \exp\{-\Lambda(h; \theta)n + hy\}, \quad h \in (0, b). \quad (7)$$

Заметим, что $R(0+) = 1$, $R'(0+) = \mathbf{E}\xi_1 = 0$, $R'(h) > 0$, так что $R(h) > 1$ при $0 < h < b$. Положим

$$m(h) := \mathbf{E}\xi_1^{(h)} = \frac{R'(h)}{R(h)}, \quad m(0+) = 0.$$

Так как функция распределения $F^{(h)}(x)$ отвечает, очевидно, собственному вероятностному распределению, то

$$0 < \sigma^2(h) = \mathbf{D}\xi_1^{(h)} = \mathbf{E}(\xi_1^{(h)})^2 - (\mathbf{E}\xi_1^{(h)})^2 = m'(h).$$

Таким образом, функция $m(h)$ строго возрастает и существует (возможно бесконечный) предел

$$\lim_{h \rightarrow b-} m(h) =: a. \quad (8)$$

Уравнение $m(h) = \theta$ имеет при $0 < \theta < a$ единственный корень, который мы обозначим h_θ : $m(h_\theta) = \theta$, $0 < \theta < a$, причем $0 < h_\theta < b$. Поскольку

$$\Lambda(0-; \theta) = 0, \quad (\Lambda(h; \theta))'_h = \theta - m(h), \quad (\Lambda(h; \theta))''_h = -m'(h) < 0,$$

то $\Lambda(h; \theta)$ выпукла вверх по h , строго возрастает в правой полукрестности точки $h = 0$ и достигает максимума в точке $h = h_\theta$ (при $\theta < a$). С учетом обозначения

$$\Lambda(\theta) = \Lambda(h_\theta; \theta)$$

отсюда и из (7) получаем

$$\mathbf{P}\{S_n \geq n\theta\} \leq \exp\{-\Lambda(\theta)n\}. \quad (9)$$

Если ξ_1 имеет нерешетчатое распределение, то (см. [14]) для любого достаточно малого положительного ε

$$\mathbf{P}\{S_n \geq n\theta\} = \left(\sqrt{2\pi n} h_\theta \sigma(h_\theta)\right)^{-1} \exp\{-\Lambda(\theta)n\} (1 + o(1)) \quad (10)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно в $\varepsilon < \theta < a - \varepsilon$. В случае решетчатого распределения правую часть (10) следует домножить на $d(1 - e^{-dh_\theta})^{-1}$, где d — максимальный шаг распределения. Оценивая сверху множитель $1 + o(1)$ в (10) константой c_ε , из (10) мы получаем асимптотически более сильное, чем (9), неравенство:

$$\mathbf{P}\{S_n \geq n\theta\} \leq c_\varepsilon \left(\sqrt{2\pi n} h_\theta \sigma(h_\theta)\right)^{-1} \exp\{-\Lambda(\theta)n\}. \quad (11)$$

Из (10) легко выводится соотношение (см. [12])

$$\frac{\mathbf{P}\{S_n \geq n(\theta + \Delta)\}}{\mathbf{P}\{S_n \geq n\theta\}} = \exp\left\{-n \left(h_\theta \Delta + \frac{\Delta^2}{2\sigma^2(h_\theta)}\right)\right\} (1 + o(1)) \quad (12)$$

равномерно при $\varepsilon < \theta < a - \varepsilon$ (если $a = +\infty$, то $a - \varepsilon$ следует заменить на любое сколь угодно большое число), где $\Delta = O(n^{-1/2})$ при $n \rightarrow \infty$, а также неравенство

$$\mathbf{P}\{S_n \geq n(\theta + \Delta)\} \leq \mathbf{P}\{S_n \geq n\theta\} \cdot c'_\varepsilon \exp\{-nh_\theta \Delta\} \quad (13)$$

при $\Delta = o(n^{-1/2})$. Далее рассматривается только случай нерешетчатого распределения, видоизменения в рассуждениях для решетчатого случая элементарны.

Шаг 3. Исследуем асимптотику вероятности $\mathbf{P}(A_0)$. Представим событие A_0 в виде

$$\left\{ \max_{n \in \Delta_0} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_{l-1} + \xi_{L+1} + \dots + \xi_{L+n}) + S_L - S_{l-1} \geq \theta L \right\}.$$

Перенумеровав последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}, \xi_{L+1}, \xi_{L+2}, \dots, \xi_{L+l-1}$ заново, как $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{2(l-1)}$, и положив

$$S'_n = \sum_{k=1}^n \xi'_k, \quad 1 \leq n \leq 2(l-1), \quad S'_0 = 0,$$

имеем

$$A_0 = \left\{ \max_{n \in \Delta_0} (S'_{n+l-1} - S'_n) + S_L - S_{l-1} \geq \theta L \right\}.$$

Последовательность S'_n , $1 \leq n \leq 2(l-1)$ является таким же случайным блужданием, как и S_n , и не зависит от $S_L - S_{l-1}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(A_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{S_L - S_{l-1} \geq \theta L - y\} dG_l(y), \quad (14)$$

где $G_l(y) = \mathbf{P}\{\max_{n \in \Delta_0} (S_{n+l-1} - S_n) < y\}$. Важно отметить, что когда уровень уклонения есть $o(L)$, т.е. много меньше, чем θL , вероятность под интегралом может быть оценена по центральной предельной теореме с уточнениями, что было проделано в указанной ситуации в [6].

Рассмотрим

$$H(l; h_\theta) = \mathbf{E} \exp \left\{ h_\theta \max_{n \in \Delta_0} (S_{n+l-1} - S_n) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{h_\theta y} dG_l(y). \quad (15)$$

Проверим, что интеграл (15) конечен. Интегрируя по частям, имеем

$$H(l; h_\theta) = -e^{h_\theta y} (1 - G_l(y)) \Big|_{-\infty}^{\infty} + h_\theta \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G_l(y)) e^{h_\theta y} dy. \quad (16)$$

Применяя неравенство (5), имеем

$$1 - G_l(y) \leq lP\{S_{l-1} \geq y\} \leq lR(h)^{l-1}e^{-hy} \quad (17)$$

Выберем в (17) $h = \hat{h}$, где $b > \hat{h} > h_\theta$, и подставим в (16). Внеинтегральный член в (16) при этом обратится в нуль, а интеграл оценится сверху выражением

$$h_\theta^{-1} + \int_0^\infty e^{-(\hat{h}-h_\theta)y} dy \cdot lR(\hat{h})^{l-1} < \infty,$$

и конечность интеграла (15) установлена. Отметим, кстати, что

$$H(l; h_\theta) \geq \mathbf{E} \exp\{h_\theta S_{l-1}\} = R(h_\theta)^{l-1}. \quad (18)$$

Мы покажем, что для любого фиксированного l

$$P(A_0) \sim P\{S_L \geq \theta L\} H(l; h_\theta) R(h_\theta)^{-l+1} \quad \text{при } L \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Представим интеграл (14) в виде суммы интегралов I_1, I_2 и I_3 , соответственно, по областям $(-\infty, -L^{1/3})$, $[-L^{1/3}, L^{1/3}]$, $(L^{1/3}, \infty)$. При $y > L^{1/3}$ воспользуемся неравенством (7), полагая в нем $n = L - l + 1$, $h = h_\theta$:

$$P\{S_{L-l+1} \geq \theta L - y\} \leq \exp\{-\Lambda(\theta)L + h_\theta y\} \quad (20)$$

(где множитель $R(h_\theta)^{-l+1} < 1$ в правой части (20) отброшен). Подставляя оценку (20) в интеграл I_3 , получаем

$$I_3 \leq \exp\{-\Lambda(\theta)L\} \int_{L^{1/3}}^\infty e^{h_\theta y} dG_l(y). \quad (21)$$

Интеграл в правой части (21) оценим таким же способом, как (16), (17):

$$\begin{aligned} \int_{L^{1/3}}^\infty e^{h_\theta y} dG_l(y) &= -e^{h_\theta y} (1 - G_l(y)) \Big|_{L^{1/3}}^\infty + h_\theta \int_{L^{1/3}}^\infty (1 - G_l(y)) e^{h_\theta y} dy \\ &\leq R(\hat{h})^{l-1} \left[\exp\left\{-\left(\hat{h} - h_\theta\right)L^{1/3}\right\} + h_\theta \int_{L^{1/3}}^\infty e^{-(\hat{h}-h_\theta)y} dy \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для некоторых констант $A_{l,\theta}$, $\delta_\theta > 0$

$$I_3 \leq A_{l,\theta} \exp\{-\Lambda(\theta)L - \delta_\theta L^{1/3}\}. \quad (22)$$

Используя неравенство (20) при $y < -L^{1/3}$, находим

$$I_1 \leq P\{S_{L-l+1} \geq \theta L + L^{1/3}\} \leq \exp\left\{-\Lambda(\theta)L - h_\theta L^{1/3}\right\}. \quad (23)$$

Как видно из оценок (22), (23), интегралы I_1, I_3 не участвуют в асимптотике (19). Наконец, полагая

$$\Delta = \frac{(l-1)\theta - y}{L - l + 1}$$

для $y \in [-L^{1/3}, L^{1/3}]$, имеем $\Delta = o(L^{-1/2})$, так что с учетом соотношений (10), (12)

$$\begin{aligned} P\{S_{L-l+1} \geq \theta L - y\} &= P\{S_{L-l+1} \geq (L - l + 1)(\theta + \Delta)\} \\ &\sim P\{S_L \geq \theta L\} \exp\left\{-(l-1)\ln R(h_\theta) + h_\theta y\right\} \end{aligned}$$

равномерно по y в указанных пределах. Отсюда получаем

$$I_2 \sim P\{S_L \geq \theta L\} R(h_\theta)^{-l+1} \cdot \int_{-L^{1/3}}^{L^{1/3}} e^{h_\theta y} dG_l(y). \quad (24)$$

Остается заметить, что для любого фиксированного l интеграл в правой части (24) стремится при $L \rightarrow \infty$ к $H(l; h_\theta)$, и соотношение (19) установлено.

Шаг 4. В гауссовском случае мы можем оценить асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}(A_0)$, опираясь на ее представление через условную вероятность

$$\mathbf{P}(A_0) = \int \mathbf{P}\{A_0 \mid S_L = z\} f_{S_L}(z) dz. \quad (25)$$

Регулярную условную вероятность под знаком интеграла (25) будем понимать как интеграл от соответствующей условной плотности. Сделаем в (25) замену переменного $y = \theta L - z$ и, подставляя в интеграл (25) явное выражение для f_{S_L} — плотности нормально $\mathcal{N}(0, L)$ распределенной случайной величины S_L , получим

$$\mathbf{P}(A_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} e^{-\theta^2 L/2} \cdot \mathcal{J}(L; l), \quad (26)$$

где

$$\mathcal{J}(L; l) = \int \mathbf{P}\{A_0 \mid S_L = \theta L - y\} e^{y\theta} e^{-y^2/(2L)} dy. \quad (27)$$

Для условного распределения последовательности

$$(S_{n+L} - S_n, 0 \leq n \leq l-1) \quad (28)$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_{n+L} - S_n \mid S_L) &= \left(1 - \frac{n}{L}\right) S_L, \quad \mathbf{D}(S_{n+L} - S_n \mid S_L) = n \left(2 - \frac{n}{L}\right), \\ \text{cov}(S_{n+L} - S_n, S_{m+L} - S_m \mid S_L) &= n \left(2 - \frac{m}{L}\right), \quad n \leq m. \end{aligned} \quad (29)$$

Чтобы упростить обозначения, введем зависящую от y, L как от параметров гауссовскую последовательность $(\eta_n^{(y,L)}, 0 \leq n < l)$ случайных величин, средние и ковариации которых совпадают с условными средними и ковариациями последовательности $S_{n+L} - S_n - S_L$ при условии $S_L = \theta L - y$. Таким образом, $\eta_0^{(y,L)} = 0$ с вероятностью единица и

$$\mathbf{E}\eta_n^{(y,L)} = -n \left(\theta - \frac{y}{L}\right), \quad \text{cov}(\eta_n^{(y,L)}, \eta_m^{(y,L)}) = n \left(2 - \frac{m}{L}\right), \quad n \leq m, \quad (30)$$

$$\mathbf{P}\{A_0 \mid S_L = \theta L - y\} = \mathbf{P}\left\{\max_{n \in \Delta_0} \eta_n^{(y,L)} > y\right\}.$$

При $L \rightarrow \infty$ и фиксированном y последовательность $(\eta_n^{(y,L)}, n \geq 1)$ сходится по распределению к случайному блужданию с нормальным $\mathcal{N}(-\theta, 2)$ распределением шага. Тем самым, при $L \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{n \in \Delta_0} \eta_n^{(y,L)} > y\right\} \rightarrow \mathbf{P}\left\{\max_{n \in \Delta_0} (\sqrt{2}S_n - \theta n) > y\right\}. \quad (31)$$

Перейдем к обоснованию законности перехода к пределу в интеграле (27), в результате чего можно будет записать

$$\mathcal{J}(L; l) \rightarrow \int \mathbf{P}\left\{\max_{n \in \Delta_0} (\sqrt{2}S_n - \theta n) > y\right\} e^{y\theta} dy =: \mathcal{J}(l) \quad (32)$$

при $L \rightarrow \infty$. Заменяя в (30) вероятность объединения суммой вероятностей, имеем

$$\mathbf{P}\left\{\max_{n \in \Delta_0} \eta_n^{(y,L)} > y\right\} \leq \sum_{n \in \Delta_0} \mathbf{P}\{\eta_n^{(y,L)} > y\}. \quad (33)$$

Применяя известную верхнюю оценку хвоста нормального распределения, получаем при $n \geq 1$

$$\mathbf{P}\{\eta_n^{(y,L)} > y\} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(y-a)} \exp\left\{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (34)$$

$$a = \mathbf{E}\eta_n^{(y,L)}, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\eta_n^{(y,L)}, \quad y > a.$$

Выражение под знаком экспоненты в (34) после элементарных преобразований приведем к виду

$$-y\theta - \frac{(1-n/L)^2}{2n(2-n/L)} \left(y - \frac{n\theta}{(1-n/L)^2} \right)^2 + \frac{(n\theta)^2}{2(1-n/L)^2} \frac{1}{L}. \quad (35)$$

Последнее слагаемое в (35) оценивается сверху при $n < l$ некоторой постоянной C_l . Множитель перед экспонентой в (34) оценивается при $y \geq 0$ следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{n(2-n/L)}}{y(1-n/L) + n\theta} \leq \frac{1}{\theta\sqrt{\pi n}}. \quad (36)$$

Подставляя оценки (35), (36) в (34), получаем при $y \geq 0$

$$e^{y\theta} \mathbf{P}\{\eta_n^{(y,L)} > y\} \leq \frac{1}{\theta\sqrt{\pi n}} e^{C_l} \exp \left\{ -\frac{(1-n/L)^2}{4n} \left(y - \frac{n\theta}{1-n/L} \right)^2 \right\}. \quad (37)$$

Правую часть (37) можно переписать в виде произведения множителя $2\theta^{-1}e^{C_l}(1-n/L)^{-1}$ и нормальной плотности со средним и дисперсией, равными $a_n = n\theta(1-n/L)^{-1}$ и $\sigma_n^2 = 2n(1-n/L)^{-2}$ соответственно. Положим

$$\phi_l(y) = \sup_{n \in \Delta_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y-a_n)^2}{\sigma_n^2} \right\}.$$

Очевидно, функция $\phi_l(y)$, $y \in R$, при всех достаточно больших L (например, $L \geq 2l$) представляет собой интегрируемую на всей прямой функцию. При $y < 0$ вероятность под интегралом (27) равна 1. Таким образом, подынтегральное выражение в (27) оценивается сверху с точностью до множителя, зависящего от l , функцией $\phi_l(y)$ (при $y > 0$ и не превосходит $e^{y\theta}$ при $y < 0$, так что можно воспользоваться теоремой Лебега о мажорированной сходимости, и соотношение (32) полностью доказано. Попутно заметим, что правая часть (32) после интегрирования по частям приобретает вид

$$\mathcal{J}(l) = \mathbf{E} \exp \left\{ \theta \max_{n \in \Delta_0} (\sqrt{2}S_n - n\theta) \right\} \cdot \theta^{-1}. \quad (38)$$

Итак, при любом l и $L \rightarrow \infty$

$$\sum_j \mathbf{P}(A_j) = \frac{TL}{l} \mathbf{P}(A_0) \sim T \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-\theta^2 L/2} \frac{\mathcal{J}(l)}{l}. \quad (39)$$

Шаг 5. Выпишем оценку сверху вероятностей $\mathbf{P}(A_0 A_k)$, $L/l \geq k \geq 1$, воспользовавшись неравенством

$$\mathbf{P}(A_0 A_k) \leq \sum_{n \in \Delta_0} \sum_{m \in \Delta_k} \mathbf{P}\{S_{n+L} - S_n \geq \theta L, S_{m+L} - S_m \geq \theta L\}. \quad (40)$$

Далее воспользуемся следующим неравенством (см. [10, лемма 15]) для общего члена суммы (40):

$$\mathbf{P}\{S_L \geq \theta L, S_{L+r} - S_r \geq \theta L\} \leq 2q^r \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}, \quad 1 \leq r \leq L, \quad (41)$$

где $0 < q < 1$ зависит от θ , справедливым для всех достаточно больших L . Для удобства читателя приведем его вывод. Пересекая событие $\{S_L \geq \theta L, S_{L+r} - S_r \geq \theta L\}$ с событиями $S_r < \theta' r$ и $S_r \geq \theta' r$ для некоторого $0 < \theta' < \theta$, запишем для вероятности в левой части (41) оценку сверху

$$\mathbf{P}\{S_{L-r} \geq \theta(L-r) + (\theta - \theta')r\} + \mathbf{P}\{S_r \geq \theta' r\} \cdot \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}. \quad (42)$$

Применяя неравенство (9), имеем

$$\mathbf{P}\{S_r \geq \theta' r\} \cdot \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\} \leq \exp \left\{ -\Lambda(\theta') r \right\} \cdot \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}. \quad (43)$$

При оценке первого слагаемого в (42) разобьем область изменения переменного r на части $1 \leq r \leq L^{1/3}$ и $L^{1/3} < r < L$. Пусть $0 < \theta' < \theta$ выбрано так, что

$$h_\theta(\theta - \theta') > \Lambda(\theta) \quad \text{или} \quad \theta' < h_\theta^{-1} \ln R(h_\theta). \quad (44)$$

Для $r \leq L^{1/3}$ воспользуемся неравенством (13):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{L-r} \geq \theta(L-r) + (\theta - \theta')r\} &\leq \mathbf{P}\{S_{L-r} \geq (L-r)\theta\} c'_\varepsilon \exp\{-h_\theta(\theta - \theta')r\} \\ &\sim \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\} c'_\varepsilon \exp\left\{\left(\Lambda(\theta) - h_\theta(\theta - \theta')\right)r\right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

В области $r > L^{1/3}$ воспользуемся неравенством (7):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{L-r} \geq \theta(L-r) + (\theta - \theta')r\} &\leq \exp\left\{-\Lambda(\theta)(L-r) - h_\theta(\theta - \theta')r\right\} \\ &= \exp\{-\Lambda(\theta)L\} \exp\left\{\left(\Lambda(\theta) - h_\theta(\theta - \theta')\right)r\right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\Lambda(\theta)L\right\} &\sim \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\} \cdot \sqrt{2\pi L} h_\theta \sigma(h_\theta), \\ \exp\left\{\left(\Lambda(\theta) - h_\theta(\theta - \theta')\right)r\right\} &\leq \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\Lambda(\theta) - h_\theta(\theta - \theta')\right)L^{1/3}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\Lambda(\theta) - h_\theta(\theta - \theta')\right)r\right\}, \end{aligned}$$

получаем, что оценка (46) имеет вид

$$\mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\Lambda(\theta) - h_\theta(\theta - \theta')\right)r\right\} \cdot o(1), \quad (47)$$

где $o(1)$ является бесконечно малой при $L \rightarrow \infty$. Совмещая оценки (43), (45), (47), приходим к результату (41).

Подставим (41) в (40) и получим оценку для вероятностей (40) при $k < L/l$:

$$\mathbf{P}(A_0 A_k) \leq \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\} \cdot 2 \sum_{n \in \Delta_0} \sum_{m \in \Delta_k} q^{m-n}. \quad (48)$$

Второй сомножитель в правой части (48) после суммирования приведем к виду $\gamma e^{-\beta(k-1)l}$ при некоторых постоянных γ, β (зависящих от θ). При $k \geq L/l$ ввиду независимости событий A_0 и A_k получаем

$$\mathbf{P}(A_0 A_k) = \left(\mathbf{P}(A_0)\right)^2 \leq \left(l \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}\right)^2.$$

Отсюда находим оценку для двойной суммы в (4):

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} \mathbf{P}(A_i A_j) &\leq \frac{TL}{l} \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(A_0 A_k) \leq \frac{TL}{l} \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\} \cdot \gamma(1 - e^{-\beta l})^{-1} \\ &\quad + \frac{TL}{l} \cdot l^2 \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Шаг 6. Асимптотика вероятностей $\pi(L; T, \theta L)$ выводится из соотношений (19), (49) по схеме многократно использовавшейся в случае гауссовских процессов (см. [7], [5], [6]). Из (4), (19) и (49) получаем при любых l_1, l_2

$$\begin{aligned} \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi(L; T, \theta L)}{TLP\{S_L \geq \theta L\}} &\leq \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_0)}{l_1 \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}} = \frac{H(l_1; h_\theta)}{l_1 R(h_\theta)^{l_1-1}}, \\ \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi(L; T, \theta L)}{TLP\{S_L \geq \theta L\}} &\geq \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_0)}{l_2 \mathbf{P}\{S_L \geq \theta L\}} - \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i < j} \mathbf{P}(A_i A_j)}{TLP\{S_L \geq \theta L\}} \\ &\geq \frac{H(l_2; h_\theta)}{l_2 R(h_\theta)^{l_2-1}} - \frac{\gamma}{l_2(1 - e^{-\beta l_2})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любых l_1, l_2

$$\frac{H(l_2; h_\theta)}{l_2 R(h_\theta)^{l_2-1}} - \frac{\gamma}{l_2(1 - e^{-\beta l_2})} \leq \frac{H(l_1; h_\theta)}{l_1 R(h_\theta)^{l_1-1}},$$

и потому

$$\limsup_{l_2 \rightarrow \infty} \frac{H(l_2; h_\theta)}{l_2 R(h_\theta)^{l_2-1}} \leq \liminf_{l_1 \rightarrow \infty} \frac{H(l_1; h_\theta)}{l_1 R(h_\theta)^{l_1-1}},$$

т.е. существует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{H(l; h_\theta)}{l R(h_\theta)^{l-1}} \equiv H_\theta$$

и, следовательно,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi(L; T, \theta L)}{TLP\{S_L \geq \theta L\}} = H_\theta.$$

Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что $H_\theta > 0$. Для этого запишем левое неравенство (4), оставив события с четными номерами:

$$\pi(L; T, \theta L) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_n A_{2n}\right) \geq \sum_m \mathbf{P}(A_{2m}) - \sum_{m < n} \mathbf{P}(A_{2m} A_{2n}). \quad (50)$$

Отсюда, как и выше, получаем

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi(L; T, \theta L)}{TLP\{S_L \geq \theta L\}} \geq \frac{1}{l_2} \left[\frac{H(l_2; h_\theta)}{2R(h_\theta)^{l_2-1}} - \frac{\gamma e^{-\beta l_2}}{1 - e^{-\beta l_2}} \right], \quad (51)$$

где множитель $e^{-\beta l_2}$ во втором слагаемом в правой части возникает из-за того, что в данном случае в соотношении (49) суммирование ведется по четным k . Таким образом, второе слагаемое в (51) стремится к нулю при $l_2 \rightarrow \infty$, а первое слагаемое ввиду (18) не меньше, чем $\frac{1}{2}$. Таким образом, найдется такое $l_2 = l_2^0$, для которого правая часть (51) положительна, т.е. $H_\theta > 0$.

З а м е ч а н и е. Область действия асимптотики (2) совпадает с областью применимости асимптотической формулы (10) теории больших уклонений для сумм S_n . Утверждение теоремы 1 можно записать также в форме

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq n \leq TL} (S_{n+L} - S_n) \geq \theta L\right\} \sim H_\theta TLP\{S_L \geq \theta L\},$$

одинаковой для решетчатого и нерешетчатого случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Rényi A. On a new law of large numbers. — J. Anal. Math., 1970, v. 23, p. 103–111.
2. Shepp L. A. A limit law concerning moving averages. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 424–428.
3. Frolov A., Martikainen A., Steinebach J. Erdős–Rényi–Shepp type laws in the non-i.i.d. case. — Studia Sci. Math. Hungar., 1997, v. 33, № 1–3, p. 127–151.
4. Новак С. Ю. О распределении максимума частичных сумм Эрдеша–Реньи. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 274–293.
5. Путербарг В. И. О больших скачках случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 54–64.
6. Довгалюк В. В., Путербарг В. И. Большие уклонения траекторий пуассоновского процесса. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 112–117.
7. Путербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 175 с.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.

9. Waterman M. S. Introduction to Computational Biology. London/Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1995, 448 p.
10. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős-Rényi-Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 4, p. 1363–1386.
11. Kozlov A. M., Piterbarg V. I. On large jumps of Cramer random walk. Preprint 2000:43. Göteborg: Chalmers University of Technology, Göteborg University, 2000.
12. Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
13. Komlós J., Tusnády G. On sequences of «pure heads». — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 608–617.
14. Козлов М. В. О частичных суммах Эрдеша-Реньи: большие уклонения, условное поведение. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 678–696.

Поступила в редакцию
16.XI.2000

© 2002 г.

ШАРИПОВ О. Ш.*

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ U -СТАТИСТИК И ФУНКЦИОНАЛОВ МИЗЕСА ОТ СЛАБОЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

В заметке рассматриваются U -статистики и функционалы Мизеса с вырожденным ядром. Для них приведены почти наверное принципы инвариантности в предположении, что наблюдения удовлетворяют условию перемешивания.

Ключевые слова и фразы: U -статистики, функционалы Мизеса, почти наверное принцип инвариантности, условие перемешивания.

Настоящая заметка посвящена почти наверное принципу инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса от слабовзависимых наблюдений. U -статистики и функционалы Мизеса от независимых наблюдений изучены достаточно полно (см. [1]–[7] и библиографию там).

Исследование свойств U -статистик от зависимых наблюдений представляет значительную трудность из-за их сложной структуры. Не всегда удается применять методы, использованные в случае независимых наблюдений. В частности, этим и объясняется сравнительно малое количество исследований по данному направлению. Тем и интересно использование методов и результатов других направлений для исследования свойств U -статистик от зависимых наблюдений. В работе [5], которая стимулировала настоящую заметку, получены почти наверное принципы инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса при определенных условиях слабой зависимости наблюдений. Основной идеей доказательств является использование предельных теорем слабовзависимых случайных величин (с.в.) со значениями в гильбертовом пространстве.

Мы приведем почти наверное принципы инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса от слабовзависимых одинаково распределенных с.в., которые, в частности (в стационарном случае), улучшают соответствующие результаты [5].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — центрированные с.в. с общим распределением μ . Зависимость этих с.в. определяется через коэффициент равномерного перемешивания по Ибрагимову

$$\phi(k) = \sup_n \sup_{A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty, P(A) > 0} |P(B | A) - P(B)|,$$

где $\mathcal{F}_n^k$ есть σ -алгебра, порожденная с.в. $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_k$.

* Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан; e-mail: root@im.tashkent.su