Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ш. Шарипов, Принцип инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса от слабозависимых наблюдений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 814–817

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 05:26:07

9. Waterman M. S. Introduction to Computational Biology. London/Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1995, 448 p.
10. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős-Rényi-Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 4, p. 1363–1386.
11. Kozlov A. M., Piterbarg V. I. On large jumps of Cramer random walk. Preprint 2000:43. Göteborg: Chalmers University of Technology, Göteborg University, 2000.
12. Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
13. Komlós J., Tusnády G. On sequences of «pure heads». — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 608–617.
14. Козлов М. В. О частичных суммах Эрдеша-Реньи: большие уклонения, условное поведение. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 678–696.

Поступила в редакцию
16.XI.2000

© 2002 г.

ШАРИПОВ О. Ш.*

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ U -СТАТИСТИК И ФУНКЦИОНАЛОВ МИЗЕСА ОТ СЛАБОЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

В заметке рассматриваются U -статистики и функционалы Мизеса с вырожденным ядром. Для них приведены почти наверное принципы инвариантности в предположении, что наблюдения удовлетворяют условию перемешивания.

Ключевые слова и фразы: U -статистики, функционалы Мизеса, почти наверное принцип инвариантности, условие перемешивания.

Настоящая заметка посвящена почти наверное принципу инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса от слабовязисимых наблюдений. U -статистики и функционалы Мизеса от независимых наблюдений изучены достаточно полно (см. [1]–[7] и библиографию там).

Исследование свойств U -статистик от зависимых наблюдений представляет значительную трудность из-за их сложной структуры. Не всегда удается применять методы, использованные в случае независимых наблюдений. В частности, этим и объясняется сравнительно малое количество исследований по данному направлению. Тем и интересно использование методов и результатов других направлений для исследования свойств U -статистик от зависимых наблюдений. В работе [5], которая стимулировала настоящую заметку, получены почти наверное принципы инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса при определенных условиях слабой зависимости наблюдений. Основной идеей доказательств является использование предельных теорем слабовязисимых случайных величин (с.в.) со значениями в гильбертовом пространстве.

Мы приведем почти наверное принципы инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса от слабовязисимых одинаково распределенных с.в., которые, в частности (в стационарном случае), улучшают соответствующие результаты [5].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — центрированные с.в. с общим распределением μ . Зависимость этих с.в. определяется через коэффициент равномерного перемешивания по Ибрагимову

$$\phi(k) = \sup_n \sup_{A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty, P(A) > 0} |P(B | A) - P(B)|,$$

где $\mathcal{F}_n^k$ есть σ -алгебра, порожденная с.в. $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_k$.

* Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан; e-mail: root@im.tashkent.su

Рассмотрим U -статистики и функционалы Мизеса с действительно-значным, симметричным и квадратично-интегрируемым (относительно меры $\mu \times \mu$) ядром $h(x, y)$ и предположим, что оно вырождено, т.е.

$$\mathbf{E}h(\xi_1, x) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Известно, что в этом случае имеет место представление (см. [1])

$$h(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k(\xi_i) g_k(\xi_j),$$

где $\{\lambda_k\}$, $k \geq 1$, и $\{g_k(x)\}$, $k \geq 1$, — соответственно собственные числа и функции оператора $T_h: L_2 \rightarrow L_2$, определенного равенством

$$T_h f(x) = \mathbf{E}(h(\xi_1, x) f(\xi_1)), \quad f \in L_2.$$

Определим U -статистику $S(t)$ и функционал Мизеса $V(t)$ следующими равенствами:

$$S(t) = 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq [t]} h(\xi_i, \xi_j), \quad V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) R(dx, t) R(dy, t), \quad t \geq 0,$$

где $R(s, t) = t(F_{[t]}(s) - \mu(-\infty, s))$, $-\infty < s < \infty$, $t \geq 0$, $[t]$ — целая часть t ,

$$F_{[t]}(s) = \frac{1}{[t]} \sum_{i=1}^{[t]} \delta(\xi_i < s), \quad \delta(\xi_i < x) = \begin{cases} 1, & \xi_i < x, \\ 0, & \xi_i \geq x. \end{cases}$$

В [1] для независимых с.в. с равномерным распределением была доказана следующая сходимость по распределению:

$$\frac{1}{n} S(n) \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Z_j^2 - 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с.в. со стандартным гауссовским распределением.

В [2], [3] для случая независимых одинаково распределенных с.в. доказаны принципы инвариантности штрассеновского типа, основанные на сходимости с вероятностью единица.

В [4, теорема 5.3.1] Иосихарой доказан принцип инвариантности Донскера–Прохорова для U -статистики от стационарной последовательности с.в., удовлетворяющих условию сильного перемешивания.

В уже упомянутой работе [5] при различных условиях перемешивания доказаны почти наверное принципы инвариантности для U -статистик и функционалов Мизеса от стационарных в узком смысле последовательностей с.в.

Введем обозначения:

$$U(t) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma_j^2 \left(W_j^2(t) - \frac{t}{\sigma_j^2} \right), \quad t \geq 0,$$

$$\sigma_j^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}(g_j(\xi_1) + \dots + g_j(\xi_n))^2 > 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$\{W_j(t)\}_{j \geq 1}$ — последовательность винеровских процессов таких, что

$$\mathbf{E}W_i(t)W_j(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sigma_i\sigma_j} \sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{l=1}^{[ns]} \mathbf{E}g_i(\xi_k)g_j(\xi_l),$$

$$\begin{aligned} Z(t) = & \sum_{j \leq [t]} (h(\xi_j, \xi_j) - c_2) - [t] \sum_{j=1}^{[t]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, \xi_j) \mu(dx) - c_1 \right) \\ & - [t] \sum_{j=1}^{[t]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_j, x) \mu(dx) - c_2 \right) - [t]^2 c_1 + [t] c_2, \end{aligned}$$

где $c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \mu(dx) \mu(dy)$, $c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, x) \mu(dx)$.

В дальнейшем нам понадобится следующее условие: для всех $a = (a_1, a_2, \dots)$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| a_k < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| a_k (g_k(\xi_1) + \dots + g_k(\xi_n)) \right)^2 = \sigma_a < \infty. \quad (1)$$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ дополнительно удовлетворяет (1) и следующим условиям:

$$\sup_{j \geq 1} \mathbf{E} |g_j(\xi_1)|^4 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty, \quad \varphi(k) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Тогда, не изменяя распределений $\{S(t), t \geq 0\}$ и $\{U(t), t \geq 0\}$, можно переопределить их на одном новом вероятностном пространстве так, что с вероятностью 1 имеет место следующее соотношение:

$$|S(t) - U(t)| = o(t \ln \ln t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Пусть последовательность $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда, не изменяя распределений $\{U(t), t \geq 0\}$ и $\{V(t), t \geq 0\}$, можно переопределить их на одном новом вероятностном пространстве так, что с вероятностью 1 имеет место следующее соотношение:

$$|V(t) - Z(t) - U(t)| = o(t \ln \ln t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения с.в. с равномерным распределением на $[0; 1]$ и $q(x)$ — некоторая неотрицательная весовая функция. Известно, что w^2 -статистика Крамера–Мизеса, определяемая равенством

$$w_n^2(q) = \int_0^1 nq(x) (F_n(x) - F(x))^2 dx,$$

является функционалом Мизеса с ядром

$$h(x, y) = \int_0^1 q(x) (I(x \leq u) - u) (I(y \leq u) - u) du,$$

где $I(\cdot)$ — индикаторная функция (см. [5], [6]).

Таким образом, при выполнении соответствующих условий теорема 2 верна и для w^2 -статистик.

З а м е ч а н и е 2. Приведенные в [5] результаты связаны с использованием различных вариантов перемешивания при выполнении условия

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\lambda_j| = O(N^{-\varepsilon}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0.$$

Возникновение этого условия связано с применением результатов работы [3], где доказан почти наверное принцип инвариантности для банаховозначных с.в., удовлетворяющих условиям перемешивания.

З а м е ч а н и е 3. Условие (1) эквивалентно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^0 \langle a, G_i \rangle \right)^2 = \sigma_a < \infty \quad \text{для всех } a \in H,$$

где $G_i = (g_1(\xi_i), g_2(\xi_i), \dots) \in H$ и H — гильбертово пространство (со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$), введенное в [5]. Фактически требуется, чтобы дисперсия суммы с.в. росла линейно. При предположениях теоремы 1 для стационарных в узком смысле последовательностей с.в. ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, условие (1) выполняется. Таким образом,

теоремы 1 и 2 в стационарном случае улучшают соответствующие результаты работы [5].

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству в [5], но уже с применением других предельных теорем для гильбертовозначных с.в., аннотированных в [8].

Автор благодарен проф. Х. Дехлингу за полезные обсуждения и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoeffding W.* A non-parametric test of independence. — *Ann. Math. Statist.*, 1948, v. 19, p. 546–557.
2. *Dehling H., Denker M., Philipp W.* Invariance principles for von Mises and U -statistics. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1984, v. 67, p. 139–167.
3. *Dehling H.* The functional law of the iterated logarithm for von Mises functionals and multiple Wiener integrals. — *J. Multivariate Anal.*, 1989, v. 28, № 2, p. 177–189.
4. *Yoshihara K.* Weakly Dependent Stochastic Sequences and Their Applications. V. 2: Asymptotic Statistics Based on Weakly Dependent Data. Tokyo: Sanseido, 1993, 341 p.
5. *Kanagawa S., Yoshihara K.* The almost sure invariance principles of degenerate U -statistics of degree two for stationary random variables. — *Stochastic Process. Appl.*, 1994, v. 49, № 2, p. 347–356.
6. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова думка, 1984, 304 с.
7. *Dehling H.* Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1983, v. 63, p. 393–432.
8. *Sharipov O. Sh.* Strong limit theorems for φ -mixing random variables with values in Hilbert space. — *The Seventh Vilnius conference on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts of communications.* Vilnius, 1998, p. 411.

Поступила в редакцию
17.V.2000

© 2002 г.

PENG Z.*, NADARAJAH S.**

ON THE JOINT LIMITING DISTRIBUTION OF SUMS AND MAXIMA OF STATIONARY NORMAL SEQUENCE

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — стационарная последовательность стандартных нормально распределенных случайных величин и $\rho_n = \mathbf{E}(X_1 X_{n+1})$. В [5] найдено совместное предельное распределение для $\sum_{i=1}^n X_i$ и $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ в случае, когда $\rho_n \ln n \rightarrow \gamma \in [0, \infty)$. Мы распространяем этот результат на случай, когда ρ_n выпукла и $\rho_n = o(1)$, а $(\rho_n \ln n)^{-1}$ монотонна и $(\rho_n \ln n)^{-1} = o(1)$.

Ключевые слова и фразы: предельное распределение, максимумы, стационарная нормальная последовательность, сумма.

* Southwest Normal University, P. R. China.

** Department of Statistics and Applied Probability, University of California, Santa Barbara, California 93106-3110, U.S.A.; e-mail: snadar@pstat.ucsb.edu