Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Алешкявичене, В. Статулявичус, Большие
уклонения при аппроксимации законом Пуассона,
Теория вероятн. и ее примен., 2001, том 46,
выпуск 4, 625–639

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:46:48

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 46

Выпуск 4, 2001 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 2001 г. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ А.*, СТАТУЛЯВИЧУС В.**

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ЗАКОНОМ ПУАССОНА

Статья посвящена исследованию вероятностей больших отклонений без требования целочисленности рассматриваемых случайных величин, что предполагалось почти во всех работах, посвященных уточнению предельных теорем в случае предельных простого и обобщенного законов Пуассона.

Ключевые слова и фразы: закон Пуассона, большие отклонения, факториальные моменты, факториальные кумулянты.

Пусть X — случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$, принимающая неотрицательные значения. Известно, что в разложениях характеристической функции $f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX}$ и ее логарифма $\ln f_X(t)$ в степенные ряды по степеням $(e^{it} - 1)$ коэффициентами при $(e^{it} - 1)^k$ являются факториальные моменты

$$\mathbf{E}X_{(k)} = \mathbf{E}X(X-1) \cdots (X-(k-1))$$

и факториальные кумулянты $\tilde{\Gamma}_k = \tilde{\Gamma}_k(X)$ соответственно, т.е. если $\mathbf{E}X^s < \infty$ для некоторого целого числа $s > 0$, то в окрестности точки $t = 0$

$$f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} = \mathbf{E}(1 + (e^{it} - 1))^X = \sum_{k=1}^s \frac{\mathbf{E}X_{(k)}}{k!} (e^{it} - 1)^k + o(|t|^s),$$

$$\ln f_X(t) = \sum_{k=1}^s \frac{\tilde{\Gamma}_k(X)}{k!} (e^{it} - 1)^k + o(|t|^s). \quad (1)$$

*Институт математики и информатики АН Литвы, ул. Академийос, 4, Вильнюс 2600, Литва; e-mail: stat@ktl.mii.lt

**Вильнюсский технический университет, им. Гедиминаса, ал. Саулетякио, 11, Вильнюс, Литва.

Аналогично обыкновенным, факториальные кумулянты выражаются через факториальные моменты следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_k(X) = \sum_{\nu=1}^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_\nu=k \\ k_i \geq 1}} \frac{k!}{k_1! \dots k_\nu!} \mathbf{E}X_{(k_1)} \dots \mathbf{E}X_{(k_\nu)}.$$

Между прочим отметим, что если $\Gamma_k(X)$ — обыкновенные кумулянты, являющиеся коэффициентами в разложении $\ln f_X(t)$ в ряд по степеням it ,

$$\ln f_X(t) = \sum_{k=1}^s \frac{\Gamma_k(X)}{k!} (it)^k + o(|t|^s), \quad (2)$$

то из сравнения разложений (1) и (2) можно установить, что

$$\tilde{\Gamma}_k(X) = \sum_{\nu=1}^k s(k, \nu) \Gamma_\nu(X), \quad \Gamma_k(X) = \sum_{\nu=1}^k S(k, \nu) \tilde{\Gamma}_\nu(X),$$

где $s(k, \nu)$ и $S(k, \nu)$ — числа Стирлинга первого и второго рода соответственно.

Для случайной величины η_λ , распределенной по закону Пуассона с параметром λ , т.е. такой, что

$$\mathbf{P}\{\eta_\lambda = k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{P}\{\eta_\lambda < x\} = P(\lambda; x) = \sum_{0 \leq k < x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\eta_\lambda)_{(k)} &= \mathbf{E} \eta_\lambda \dots (\eta_\lambda - k + 1) = \lambda^k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \tilde{\Gamma}_k(\eta_\lambda) &= \begin{cases} \lambda, & k = 1, \\ 0, & k > 1, \end{cases} \quad \Gamma_k(\eta_\lambda) = \lambda, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

В работах [1]–[3] авторы исследовали вероятности больших отклонений для случайной величины X , аппроксимируемой пуассоновской случайной величиной η_λ . При этом условия налагались на рост факториальных кумулянтов. От роста этих кумулянтов зависит ширина зоны (интервала), в которой имеет место та или иная теорема больших отклонений.

В качестве случайной величины X (часто зависящей от параметра n) можно взять не только суммы независимых или слабо зависящих случайных величин, но и более сложные функции от этих величин, какими бывают разные статистики, с предельным распределением Пуассона.

Будем придерживаться обозначений, введенных в работе [1]. Также будем пользоваться и результатами работы [1], которые нам подойдут.

Теорема 1. Пусть X является неотрицательной случайной величиной со средним $EX = \lambda > 0$, и пусть существует постоянная $\gamma \geq 0$ такая, что

$$|\tilde{\Gamma}_k(X)| \leq \frac{\lambda(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-1}} \quad (S_\gamma)$$

для всех $k \geq 2$ и некоторого $\Delta > 1$. Тогда в интервале $\lambda < x < \lambda\Delta_\gamma$, где

$$\Delta_\gamma = \frac{0.3}{2e} \left(\frac{\Delta}{3}\right)^{1/(1+2\gamma)},$$

имеет место отношение больших уклонений

$$\frac{\mathbf{P}\{X \geq x\}}{1 - P(x; \lambda)} = e^{L_\gamma(x)} \left(1 + \theta_1 \frac{x}{\Delta} + \theta_2 \sqrt{x} \max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < X < k+1\}\right), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 &\leq 16.5 + \max\left(\frac{78.4}{\lambda}, \frac{199}{\sqrt{x}}\right), \quad \theta_2 < 49, \\ L_\gamma &= -\frac{(x-\lambda)^2}{\lambda_*} \left\{ \frac{\tilde{\Gamma}_2}{2\lambda_*} + \lambda_{1\gamma} \left(\frac{x-\lambda}{\lambda_*}\right) \right\} - x \ln \left\{ 1 + \lambda_{2\gamma} \left(\frac{x-\lambda}{\lambda_*}\right) \right\}, \\ \lambda_* &= \lambda + \tilde{\Gamma}_2, \quad \lambda_{1\gamma} = \sum_{3 \leq k < p} c_k x^{k-2}, \\ \lambda_{2\gamma}(x) &= \sum_{2 \leq k < p} d_k x^{k-1}, \quad p = 2 + \frac{1}{2\gamma}, \end{aligned} \quad (4)$$

коэффициенты c_k и d_{k-1} , $k = 3, 4, \dots, [1/(2\gamma)] + 1$, выражаются через первые k факториальных кумулянтов случайной величины X . Здесь полагаем $1/\gamma = \infty$, если $\gamma = 0$, и во всех формулах (но не в условиях (S_γ) , (S')) считаем, что $\tilde{\Gamma}_k = 0$ при $k > [1/(2\gamma)] + 1$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{x-\lambda}{\lambda_*} \lambda_{1\gamma} \left(\frac{x-\lambda}{\lambda_*}\right) &= \theta \left(\frac{x}{\lambda\Delta_\gamma}\right)^2 \left(1 - \frac{9}{2} \frac{x}{\lambda\Delta_\gamma}\right)^{-1}, \\ \lambda_{2\gamma} \left(\frac{x-\lambda}{\lambda}\right) &= \theta \frac{x}{\lambda\Delta_\gamma} \frac{1}{1 - x/(\lambda\Delta_\gamma)}, \quad L_\gamma(x) = \frac{(x-\lambda_*)^2}{2\lambda} \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\lambda_*} + O\left(\frac{x}{\lambda\Delta_\gamma}\right). \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{3!} \left(\frac{2\Gamma_3}{\lambda_*} - \frac{\tilde{\Gamma}_2^2}{(\lambda_*)^2} - \frac{3\tilde{\Gamma}_2\tilde{\Gamma}_3}{(\lambda_*)^2} \right)^2, \\ c_4 &= \frac{1}{4!} \left[\frac{3\Gamma_4}{\lambda_*} - 12 \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \left(\frac{2\Gamma_2}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \right) - 15 \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\lambda_*} \left(\frac{2\Gamma_2}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\tilde{\Gamma}_2}{\lambda_*} \left(\frac{3\Gamma_3}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_4}{\lambda_*} \right) \right], \end{aligned}$$

$$d_2 = -\frac{1}{2!} \left(\frac{2\Gamma_2}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \right), \quad d_3 = -\frac{1}{3!} \left[\left(\frac{3\Gamma_3}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_4}{\lambda_*} \right) - 3 \left(\frac{2\Gamma_2}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \right)^2 \right],$$

$$d_4 = -\frac{1}{4!} \left[\left(\frac{4\Gamma_4}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_5}{\lambda_*} \right) - 10 \left(\frac{2\Gamma_2}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \right) \left(\frac{3\Gamma_3}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_4}{\lambda_*} \right) + 15 \left(\frac{2\Gamma_2}{\lambda_*} + \frac{\tilde{\Gamma}_3}{\lambda_*} \right)^3 \right],$$

$$|c_k| < \frac{0.03}{(2\Delta_\gamma/9)^{k-1}}, \quad k = 3, 4, \dots,$$

$$|d_k| < \frac{1.18}{k} \left(\frac{1}{\Delta_\gamma} \right)^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Здесь и везде далее $|\theta| \leq 1$.

З а м е ч а н и е. Если X принимает только неотрицательные целочисленные значения, тогда из работы [1] (лемма 1) видно, что в этом случае в нашей теореме (соотношение (3)) можно положить $\theta_1 = \theta(16.5 + \max(30/\lambda, 55/\sqrt{x}))$, $\theta_2 = 0$.

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть неотрицательная случайная величина X с $\mathbf{E}X = \lambda > 0$ удовлетворяет условию

$$|\tilde{\Gamma}_k(X)| \leq \frac{\lambda(k-2)!}{\Delta^{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, s+2, \quad (S')$$

для некоторого $\Delta > 0$ и $s \leq 2\Delta^2$. Тогда в интервале $\lambda < x < \lambda/(9e)\sqrt{s}$ имеет место соотношение

$$\frac{\mathbf{P}\{X \geq x\}}{1 - P(x; \lambda)} = e^{L(x)} \left(1 + \theta_3 \frac{x}{\Delta} + \theta_4 \frac{x}{\lambda} \max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < x < k+1\} + \theta \frac{x^{3/2}}{s+1} \right),$$

где $|\theta_3| \leq 16 + \max(78.4/\lambda, 199/\sqrt{x})$, $|\theta_4| \leq 48$,

$$L(x) = -\frac{(x-\lambda)^2}{\lambda_*} \left\{ \frac{\tilde{\Gamma}_2}{2\lambda_*} + \lambda_1 \left(\frac{x-\lambda}{\lambda_*} \right) \right\} - x \ln \left\{ 1 + \lambda_2 \left(\frac{x-\lambda}{\lambda_*} \right) \right\},$$

$$\lambda_* = \lambda + \tilde{\Gamma}_2, \quad \lambda_1(x) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k x^{k-2}, \quad \lambda_2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} d_{k+1} x^{k-1},$$

ряды $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ сходятся при малых значениях $|x|$. Коэффициенты c_k и d_{k-1} , $k = 3, 4, \dots$, выражаются через первые $r_k = \min(k, s)$ факториальных кумулянтов $\tilde{\Gamma}_k(X)$ и совпадают с c_k и d_k из теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $\gamma > 0$ производящая функция $\mathbf{E}e^{hX}$ не существует, когда $h > 0$. Урезать случайную величину

мы не можем, так как исследуем поведение хвостов $\mathbf{P}\{X \geq x\}$. Мы заменим $\varphi(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ функцией

$$\varphi_s(h) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^s \frac{\tilde{\Gamma}_k(e^h - 1)^k}{k!} \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{m}_k(e^h - 1)^k}{k!}$$

для всех $h \in (0, \infty)$, где

$$\tilde{m}_k = \frac{d^k}{d(e^h - 1)^k} \varphi_s(h),$$

причем $\tilde{m}_k = \mathbf{E}X_{(k)}$ для $1 \leq k \leq s$.

Из связи между простыми и логарифмическими производными получаем

$$\tilde{m}_k = \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} \sum_{k_1+\dots+k_\nu=k} \frac{k!}{k_1! \dots k_\nu!} \tilde{\Gamma}_{k_1} \dots \tilde{\Gamma}_{k_\nu}.$$

Отсюда, учитывая условие (S') и равенство $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1$, при $\tilde{k}_i = \max(2, k_i)$, $i = 1, 2, \dots, s$, находим

$$\begin{aligned} |\tilde{m}_k| &\leq k! \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} (\lambda \Delta)^\nu \sum_{\substack{k_1+\dots+k_\nu=k \\ l \leq k_i \leq \min(k, s)}} \frac{1}{k_1(\tilde{k}_1 - 1) \dots k_\nu(\tilde{k}_\nu - 1)} \\ &\leq \frac{k!}{\Delta^k} \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} (\lambda \Delta)^\nu \left(\sum_{l=2}^s \frac{1}{l(l-1)} \right) \\ &\leq \sum_{\nu=1}^k \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-k} \leq \sum_{\nu=1}^k \frac{\lambda^\nu}{\nu!} (\min\{k, \Delta\})^{\nu-k} \\ &\leq \frac{1}{(\min\{k, \Delta\})^k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\lambda \min\{k, \Delta\})^\nu}{\nu!} < \frac{e^{\lambda k}}{(\min\{k, \Delta\})^k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем функции

$$\begin{aligned} r(h) &= \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\tilde{m}_k(e^h - 1)^k}{k!}, \\ g(h, y) &= \begin{cases} e^{hy^*} & \text{при } y \leq s, \\ 1 + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} y_{(k)}^*(e^h - 1)^k + r(h) & \text{при } y > s, \end{cases} \end{aligned}$$

где $x_{(k)} = x(x-1) \dots (x-k+1)$, $y^* = [y]$. Очевидно,

$$1 + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} y_{(k)}(e^h - 1)^k = (1 + (e^h - 1))^y = e^{hy},$$

если s и y — целые числа. Пусть

$$e^h - 1 \leq \delta_1 \sqrt{s}, \quad s \leq 2[\Delta]^2,$$

$0 < \delta_1 < 1$ — подберем позднее. Тогда, учитывая (5), при

$$\frac{e^h - 1}{\Delta} \leq \delta_2 \quad \text{и} \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{3e}, \quad \delta_1 < \frac{1}{3e} \quad (6)$$

находим $r(h) \leq (\sqrt{2}/3)^s$.

Осталось для заданного x выбрать h . Так как вероятностная масса $1 - P(x; \lambda)$ сосредоточена в основном в окрестности точки x , то h следует выбрать так, чтобы значение функции $g(h, y)/\varphi_s(h)$ было максимальным при $y = x$, т.е. h находим из уравнения

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{g(h, x)}{\varphi_s(h)} \right) = 0,$$

которое эквивалентно уравнению $(d/dh)(e^{hx}/\varphi_s(h)) = 0$ или $x = m_s(h)$, где

$$m_s(h) = \frac{d}{dh} (\ln \varphi_s(h)) = \lambda e^h + e^h \sum_{k=2}^s \frac{\tilde{\Gamma}_k}{(k-1)!} (e^h - 1)^{k-1}.$$

Отсюда, учитывая (S') , (6), аналогично [1, (13)] находим

$$x = m_s(h) = \lambda e^h \left(1 + \theta \frac{3\delta_2}{2} \right), \quad (7)$$

$$e^h = \frac{x}{\lambda} (1 + \theta \cdot 0.35). \quad (8)$$

Поэтому x можно выбрать из интервала $\lambda < x < \delta \lambda \sqrt{s}$, $\delta = \frac{1}{3} \delta_1 < 1/(9e)$, $s \leq 2[\Delta]^2$. Интересующую нас вероятность, $\mathbf{P}\{X \geq x\}$, как обычно, представим так: $\mathbf{P}\{X \geq x\} = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \varphi_s(h) \int_x^\infty \frac{1}{g(h, y)} dP(y; x) = \varphi_s(h) \sum_{k \geq x} \frac{1}{g(h, k)} e^{-x} \frac{x^k}{k!},$$

$$I_2 = \varphi_s(h) \int_x^\infty \frac{1}{g(h, y)} d[\mathbf{P}\{X_k < y\} - P(y; x)].$$

Здесь X_h — случайная величина, сопряженная с X , т.е.

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} = \int_x^\infty dF_X(y) = \varphi_s(h) \int_x^\infty \frac{1}{g(h, y)} dF_{X_h}(y),$$

где $dF_{X_h}(y) = (\varphi_s(h))^{-1} g(h, y) dF_X(y)$, h является единственным решением уравнения $x = m_s(h)$ и $P(y; x)$ — функция распределения закона Пуассона со средним x : $P(y; x) = \mathbf{P}\{\eta_x < y\}$.

Так как и η_λ , и η_x принимают только целочисленные неотрицательные значения, то для вычисления I_1 можно пользоваться результатами статьи [1]. Тогда получаем (см. [1, формула (28)])

$$I_1 = e^{L_1(x)}(1 - P(x; \lambda)) \left(1 + \theta \frac{3x}{\Delta}\right), \quad (9)$$

где

$$L_1(x) = \ln \varphi_s(h) + x \ln \frac{xe^{-h}}{\lambda} = \sum_{k=2}^s \frac{\tilde{\Gamma}_k}{k!} (e^h - 1)^k + x \ln x - x \ln \lambda - h. \quad (10)$$

Осталось оценить I_2 , учитывая, что X принимает необязательно целочисленные значения.

Имеем

$$I_2 = \varphi_s(h) \sum_{x \leq k \leq s} e^{-hk} [\mathbf{P}\{k \leq X_h < k+1\} - \mathbf{P}\{\eta_x = k\}] + e^{-sh} [\mathbf{P}\{X_h > s\} + \mathbf{P}\{\eta_x > s\}]. \quad (11)$$

Мы будем пользоваться оценкой (см. [1, формула (36)])

$$|f_{X_h}(t) - f_{\eta_x}(t)| < 6.48 \frac{x^2}{\lambda \Delta} e^{-1.2x \sin^2(t/2)} \sin^2 \frac{t}{2}, \quad (12)$$

справедливой и для необязательно целочисленной случайной величины X_h , но вместо формулы обращения Цареградского [4], справедливой только для целочисленных величин, должны будем пользоваться нашей формулой обращения (см. [5, теорема 1, случай 1]):

Теорема. Пусть F — функция распределения на $\mathbf{R}$ (множество точек разрыва которой обозначим A_F), а G — функция ограниченной вариации, определенная на $\mathbf{R}$, и $A_F \supseteq A_G = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$. Пусть $F(-\infty) = G(-\infty)$, а G является чисто разрывной функцией. Тогда

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{I_T + \delta_F U(x)}{2U(x) - 1}, \quad (13)$$

где

$$I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt, \\ \delta_F = \max_j (F(x_{j+1} - 0) - F(x_j + 0)), \\ U(x) = \int_{|u| < x} p(u) du, \quad p(u) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2.$$

В нашем случае $G(x) = \mathbf{P}\{\eta_x < x\}$, $F(x) = \mathbf{P}\{X_h < x\}$, $\beta = 1$. Выберем $x = x_0 = 2.13$. Тогда $T = 2x = 4.26 < 1.36\pi$, $0.6 < U(x_0) \leq 0.61$ и

$$\frac{U(x_0)}{2U(x_0) - 1} \leq 3.5,$$

$$\sup_x |F_{X_h}(x) - F_{\eta_x}(x)| < \frac{5}{2\pi} \int_T^T \frac{|f_{X_h}(t) - f_{\eta_x}(t)|}{|t|} dt + 3.4 \max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\}. \quad (14)$$

Так как

$$\mathbf{P}\{X_h > s\} \leq \frac{\mathbf{E}X_h}{s+1} = \frac{x}{s+1}, \quad \mathbf{P}\{\eta_x > s\} \leq \frac{\mathbf{E}\eta_x}{s+1} = \frac{x}{s+1},$$

то, интегрируя по частям и используя формулу Стирлинга, находим

$$I_2 \leq \varphi_s(h) e^{-xh} \left(2d(x) + \frac{2xe^{-(s-x)h}}{s+1} \right) < (1 - P(x; \lambda)) e^{L_1(x)} \sqrt{2\pi x} e^{1/(12x)} \left(2d(x) + \frac{2xe^{-(s-x)h}}{s+1} \right), \quad (15)$$

где $d(x) = \sup_{y \geq x} |\mathbf{P}\{X_h < y\} - \mathbf{P}\{\eta_x < y\}|$.

Используя оценки (14) и (12) и неравенство $u^\alpha e^{-u} \leq \alpha^\alpha e^{-\alpha}$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $u = 0.7x \sin^2(t/2)$, находим

$$d(x) \leq \frac{8.39}{2\pi} \frac{x^{3/2}}{\lambda \Delta} \int_{-T}^T e^{-0.21xt^2/2} dt + 3.5 \max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\},$$

так как $|\sin(t/2)| > 0.84|t/2|$ при $|t| \leq T$.

Поэтому окончательно $d(x) \leq 7.3x/(\lambda \Delta) + 3.5 \max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\}$.

Такая оценка I_2 хороша, если λ является большим, порядка x . Пусть $x/2 < \lambda < x$. Тогда из (15) получаем

$$I_2 < (1 - P(x; \lambda)) e^{L_1(x)} \times \left\{ \left(199 \frac{\sqrt{x}}{\Delta} + \frac{x^{3/2}}{s+1} \right) + 17.6 \sqrt{x} \max_{k \geq 0} \mathbf{P}(k < X_h < k+1) \right\}. \quad (16)$$

Остался случай $\lambda \leq x/2$. Согласно (11),

$$|I_2| \leq \varphi_s(h) e^{-hx} \max_{x \leq k \leq s} |\mathbf{P}\{k \leq X_h < k+1\} - \mathbf{P}\{\eta_x = k\}| \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kh} + e^{-sh} [\mathbf{P}\{X_h > s\} + \mathbf{P}\{\eta_x > s\}] \quad (17)$$

$$\leq \varphi_s(h) e^{-hx} \frac{1}{1 - e^{-h}} \max_{x \leq k \leq s} |\mathbf{P}\{k \leq X_h < k+1\} - \mathbf{P}\{\eta_x = k\}| + e^{-sh} \frac{\mathbf{E}X_h + \mathbf{E}\eta_x}{s+1}. \quad (18)$$

Из формулы (43) в [1] и условия $\lambda \leq x/2$ следует, что

$$\frac{1}{1 - e^{-h}} < \frac{x}{x - 1.26\lambda} < \frac{1}{0.37} < 2.71. \quad (19)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_k &= |\mathbf{P}\{k \leq X_h < k+1\} - \mathbf{P}\{\eta_x = k\}| \\ &= |\mathbf{P}\{X_h = k+1\} - \mathbf{P}\{\eta_x = k\}| + \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\}. \end{aligned}$$

Для того чтобы утверждение леммы было нетривиальным, должно быть $\max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\} < 1/(17\sqrt{x})$, где $x \geq 78.4 \max\{1, 1/\lambda\}$. Поэтому $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_h = k\} \geq 1 - 1/(17\sqrt{x})$, и, следовательно,

$$|\mathbf{P}\{X_h = k\} - \mathbf{P}\{\eta_h = k\}| < \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{X_h}(t) - f_{\eta_x}(t)| dt.$$

Тогда, с учетом формул (37), (38) в [1], получаем $\Delta_k < 11.54\sqrt{x}/(\lambda\Delta) + \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\}$. Отсюда, принимая во внимание оценку для Δ_k и пересчитав константы, которые увеличились не больше чем вдвое, находим

$$I_2 \leq (1 - P(x; \lambda)) e^{L_1(x)} \left(\frac{78.4x}{\lambda\Delta} + \frac{x^{3/2}}{s+1} + 10\sqrt{x} \max_{x \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\} \right). \quad (20)$$

Из (16) и (20) следует, что

$$I_2 \leq (1 - P(x; \lambda)) e^{L_1(x)} \left(\theta_4 \frac{x}{\lambda\Delta} + \frac{x^{3/2}}{s+1} + 17.6\sqrt{x} \max_{0 \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\} \right) \quad (21)$$

для всех $0 < \lambda < \infty$, $\lambda < x < \delta\lambda\sqrt{s}$, $\delta = 1/(9e)$. Здесь $|\theta_4| \leq \max(78.4/\lambda, 199/\sqrt{x})$.

Из определения X_h и $\varphi_s(h)$ следует, что

$$\max_{0 \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\} \leq 1.35 \max_{0 \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X < k+1\}.$$

Поэтому в оценке (21) будем иметь

$$17.6\sqrt{x} \max_{0 \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X_h < k+1\} < 23.8\sqrt{x} \max_{0 \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X < k+1\}.$$

Так как (см. [1, с. 39])

$$e^{L_1(x)} = e^{L(x)} \left(1 + \theta \frac{12.5x}{\Delta} \right), \quad (22)$$

то окончательно находим

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} = (1 - P(x; \lambda)) \left(1 + \theta_3 \frac{x}{\Delta} + \theta \frac{2x^{3/2}}{s+1} + \theta_4 \sqrt{x} \max_{x \leq k \leq s} \mathbf{P}\{k < X < k+1\} \right), \quad (23)$$

где $\theta_3 < 16 + \max(78.4/\lambda, 199/\sqrt{x})$, $\theta_4 \leq 48$.

При подсчете констант учитывалось, что остаточный член в соотношении (22) должен быть меньше 1, иначе соотношение (23) не имеет смысла, т.е. с необходимостью $x < \Delta/12.5$.

Требование $\lambda < x < (\lambda/(9e))\sqrt{s} \leq (\lambda\sqrt{2}/(9e))\Delta$ означает лишь, что для таких x ряд $L(x)$ сходится. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 1. Заметим, что при $\gamma \geq 0$ справедлива оценка

$$\frac{\lambda(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-1}} \leq \lambda(k-2)! \left(\frac{\sqrt{6}(s+2)^\gamma}{\Delta} \right)^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, s+2, \quad (24)$$

что равносильно тому, что $(k!)^{1+\gamma} \leq (k-2)! (\sqrt{6}(s+2)^\gamma)^{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, s+2$, или $(k!)^\gamma (k-1)k \leq (\sqrt{6}(s+2)^\gamma)^{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, s+2$.

Положим $\Delta_s = \Delta/(\sqrt{6}(s+2)^\gamma)$. Тогда из (24) видим, что для всех

$$4 \leq s \leq \frac{\Delta^2}{3(s+2)^{2\gamma}} = 2\Delta_s^2 \quad (25)$$

из условия (S_γ) следует условие

$$|\tilde{\Gamma}_k(X)| \leq \frac{\lambda(k-2)!}{\Delta_s^{k-1}}. \quad (S'')$$

Нам теперь надо выразить s через Δ и $\gamma > 0$, но так, чтобы полученное новое s удовлетворяло всем условиям леммы. Выберем s следующим образом:

$$s+2 = \left\lceil \left(\frac{\Delta^2}{3} \right)^{1/(1+2\gamma)} \right\rceil. \quad (26)$$

Оценим значение $\sqrt{s}$. Всегда можно предполагать, что $\Delta > \Delta_0$, $\Delta_0 > 5^{1+2\gamma} \max\{1, 1/\lambda\}$, так как для $\Delta \leq \Delta_0$ утверждение теоремы 1 будет тривиальным. Тогда из (25) следует, что

$$1 < 0.9 \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \right)^{1/(1+2\gamma)} < \sqrt{s} < \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \right)^{1/(1+2\gamma)},$$

и, согласно лемме, получаем, что в интервале $0 < \lambda < x < \lambda\Delta_\gamma$, где

$$\Delta_\gamma = \frac{0.9}{6e} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \right)^{1/(1+2\gamma)},$$

имеет место соотношение больших отклонений (3), если только мы покажем, что число слагаемых в $L(x)$ можно уменьшить до $[1/(2\gamma)] + 1$.

Вычислим p . Так как $e^h \sim x/\lambda$, то из условия (S_γ) и (10) следует, что ряды $L_1(x)$ и $L(x)$ можно мажорировать рядом

$$\hat{L}(x) = (x - \lambda) \sum_{k=2}^s \lambda(k!)^\gamma \left(\frac{x - \lambda}{\lambda} \right)^{k-1} \frac{1}{\Delta^{k-1}}.$$

Оценим «хвост»

$$\hat{L}_m(x) = (x - \lambda) \sum_{k=m}^s \lambda(k!)^\gamma \left(\frac{x - \lambda}{\lambda} \right)^{k-1} \frac{1}{\Delta^{k-1}}$$

и найдем такое m , что $\hat{L}_m(x)$ можно включить в остаточный член соотношения (3). Пусть $\delta_0 = s^\gamma x / \Delta$. Тогда

$$L_m(x) < (m!)^\gamma \frac{x^m}{\lambda^{m-2} \Delta^{m-1}} \sum_{k=m}^s \left(\frac{s^\gamma x}{\Delta} \right)^{k-m} = (m!)^\gamma \frac{1}{\lambda^{m-2}} \left(\frac{x}{\Delta} \right)^m \Delta \frac{1}{1 - \delta_0},$$

где

$$\delta_0 < \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \right)^{2\gamma/(1+2\gamma)} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \right)^{1/(1+2\gamma)} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому $L_m(x) \leq 2.37 (m!)^\gamma \lambda^{-m+2} (x/\Delta_\gamma)^m (\Delta_\gamma/\Delta)^m \Delta$, и отсюда видно, что

$$\left(\frac{\Delta_\gamma}{\Delta} \right)^m \Delta \leq \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right) \frac{1}{(\sqrt{3})^{m/(1+2\gamma)}} \Delta^{(1/(1+2\gamma)-1)m+1}.$$

Чтобы выполнялось неравенство $(1/(1+2\gamma) - 1)m + 1 \leq 0$, должно быть $m \geq 1 + 1/(2\gamma)$, $p = 2 + 1/(2\gamma)$.

Пусть $m = 2$. Тогда $L_2(x) = \theta \cdot 0.01 (x/\Delta_\gamma)^2$ и $L(x) = L_\gamma(x) + \theta \cdot 0.01 (x/\Delta_\gamma)^2$, или $e^{L(x)} = e^{L_\gamma(x)} (1 + \theta \cdot 0.02 (x/\Delta_\gamma)^2)$. Поэтому окончательно

$$\mathbf{P}\{X \geq \lambda\} = (1 - P(x; \lambda)) e^{L_\gamma(x)} \left(1 + \theta_1 \frac{x}{\Delta_\gamma} + \theta_2 \sqrt{x} \max_{k \geq 0} \mathbf{P}\{k < X < k+1\} \right),$$

где $\theta_1 < 16.5 \max(78.4/\lambda, 199/\sqrt{\lambda})$, $\theta_2 < 49$.

Оценки для $\lambda_{1\gamma}((x - \lambda)/\lambda^*)$ и $\lambda_{2\gamma}((x - \lambda)/\lambda^*)$ следуют из оценок для c_k и d_k , которые в свою очередь следуют из формул (63), (55) в [1] и того, что $\Delta_s > 4e\Delta_\gamma$, как нетрудно подсчитать. Оценки для c_k и d_k и конкретные выражения первых c_k и d_k через кумулянты $\tilde{\Gamma}_k$ показывают, что $x \ln(1 + \lambda_{2\gamma}((x - \lambda)/\lambda^*))$ вносит основной вклад в $L_\gamma(x)$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай, когда $X = S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}$ и $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$ — схема серий независимых неотрицательных случайных величин с $\mathbf{E}X_{nj} = \lambda_j^{(n)} > 0$ и $\lambda = \mathbf{E}S_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(n)}$. Обычно, если в каждой серии случайные величины $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$ независимы, оценивать $\Gamma_k(S_n)$ удобнее всего через моменты слагаемых. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если при некоторых $\gamma \geq 0$, $\Delta_n > 0$

$$\mathbf{E}|(X_{nj})_{(k)}| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma} \lambda_j^{(n)}}{\Delta_n^{k-1}}$$

для всех $k \geq 2$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $\Delta_n \leq 1/\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^{(n)}$, то

$$|\tilde{\Gamma}_k(S_n)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma} 2^{k-1} \lambda}{\Delta_n^{k-1}}, \quad k \geq 2,$$

и для $X = S_n$ имеет место соотношение (3) при $\Delta = \Delta_n/2$.

Доказательство следует из формулы, выражающей факториальные кумулянты $\tilde{\Gamma}_k(X_{nj})$ через моменты $\mathbf{E}(X_{nj})_{(k)}$, и того, что $\tilde{\Gamma}_k(S_n) = \sum_{j=1}^n \tilde{\Gamma}_k(X_{nj})$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть X_{nj} , $j = 1, \dots, n$, одинаково распределены и принимают целочисленные значения с вероятностями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{n1} = 1\} &= \frac{\lambda}{n}, & \mathbf{P}\{X_{n1} = m\} &= \frac{\lambda e^{-\sqrt{m}}}{n^m}, \quad m = 2, 3, \dots, \\ \mathbf{P}\{X_{n1} = 0\} &= 1 - \frac{\lambda}{n} - \lambda \sum_{m=2}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{m}}}{n^m}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{E}(X_{n1})_{(k)} = \sum_{m \geq k} m_{(k)} \mathbf{P}\{X_{n1} = m\} \leq \sum_{m \geq k} m^k \mathbf{P}\{X_{n1} = m\} \leq \frac{\lambda(k!)^2 H^{k-1}}{n^k},$$

причем порядок оценки $(k!)^2$ точный, так как

$$\int_0^\infty x^k e^{-\sqrt{x}} dx = 2\Gamma(2k+2) = 2(2k+1)!, \quad \int_0^k y^k e^{-\sqrt{x}} dx < k^k.$$

Таким образом,

$$|\tilde{\Gamma}_k(S_n)| \leq \frac{(k!)^2 \lambda}{(n/(2H))^{k-1}}, \quad k \geq 2,$$

и для $X = S_n$ имеет место соотношение больших уклонений (3) при $\Delta = n/(2H)$, где константа $H > 0$, $\gamma = 1$, $\theta_1 \leq 16.5 + \max(30/\lambda, 55/\sqrt{x})$, $\theta_2 = 0$. В этом случае

$$\Delta_\gamma = \frac{0.3}{2e} \left(\frac{n}{6H} \right)^{1/3}.$$

Так как $s = [1/(2\gamma)] + 1$, то $L_\gamma(x) \equiv 0$. Для оценки вероятностей $\mathbf{P}\{X \geq x\}$ при $x \geq \lambda\Delta_\gamma$ нам придется пользоваться только неравенствами больших уклонений. Для случая $\gamma = 0$, когда X принимают только целочисленные значения, такое неравенство получено в работе [3] (лемма 2).

Теорема 3. Пусть X — произвольная неотрицательная случайная величина со средним $EX = \lambda > 0$, удовлетворяющая условию

$$|\tilde{\Gamma}_k(X)| \leq \frac{((k-1)!)^{1+\gamma} \lambda}{\Delta^{k-1}} \quad (S'_\gamma)$$

для всех $k \geq 2$ и некоторых $\Delta > 1$ и $\gamma \geq 0$. Тогда для всех $x > \lambda$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} P\{X \geq x\} \leq \exp \left\{ -x \ln x + x \ln \lambda + x \ln \frac{(1 + x/(\lambda \Delta)) x^{\gamma/(1+\gamma)}}{1 - \lambda/x + (\lambda/x + 1/\Delta) x^{\gamma/(1+\gamma)}} \right. \\ \left. + \lambda \Delta \ln \frac{\lambda + x/\Delta}{\lambda + \lambda/\Delta} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство. Мы здесь не можем считать в функции $\varphi_s(h)$ все $\tilde{\Gamma}_k$ равными нулю, если $k > s$, как это делали при доказательстве леммы, потому что придется рассматривать x во всем интервале $\lambda < x < \infty$. Здесь мы функцию e^x заменим суммой $\sum_{k=0}^m x^k/k!$.

Эта идея использовалась в работе Р. Бенткуса и Р. Рудзкиса [9] в случае аппроксимации нормальным распределением. Основные результаты этой статьи можно также найти в книгах [7] и [8].

Если $g(x)$ — произвольная вещественная функция на $\mathbf{R}$, имеющая m производных в точке $x = 0$, то обозначим $g_m(x) = \sum_{k=0}^m g^{(k)}(0) x^k/k!$; обозначим также $\exp_m(x) = \sum_{k=0}^m x^k/k!$, где $m = 1, 2, \dots$, $x \in \mathbf{R}$.

Далее,

$$P\{X \geq x\} \leq P\{\exp_{2n}(hX) \geq \exp_{2n}(hx)\} \leq \exp_{2n}^{-1}(hx) \sum_{k=0}^{2n} EX_{(k)} \frac{(e^h - 1)^k}{k!}, \quad (28)$$

согласно неравенству Чебышева, если $E|X_{2n}| < \infty$.

Учитывая связь моментов с кумулянтами, знаем, что

$$\begin{aligned} EX_{(k)} &= \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} \sum_{k_1 + \dots + k_\nu = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_\nu!} \tilde{\Gamma}_{k_1} \dots \tilde{\Gamma}_{k_\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{d(e^h - 1)^k} \left(\sum_{r=1}^{2n} \Gamma_r \frac{(e^h - 1)^r}{r!} \right)^\nu \Big|_{h=0} = \frac{d^k}{d(e^h - 1)^k} g(h) \Big|_{h=0}, \end{aligned}$$

где $g(h) = \exp\{\sum_{k=1}^{2n} (\tilde{\Gamma}_k/k!)(e^h - 1)^k\}$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{EX_{(k)}}{k!} (e^h - 1)^k = g_{2n}(h),$$

поэтому, согласно (28),

$$P\{X \geq x\} \leq \inf_{h>0} \exp_{2n}^{-1}(hx) g_{2n}(h), \quad (29)$$

а так как

$$g_{2n}(h) \leq \exp_n \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\tilde{\Gamma}_k}{k!} (e^h - 1)^k \right\}, \quad (30)$$

то из (29) и (30) окончательно получаем

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} \leq \inf_{h>0} \exp_{2n}^{-1}(hx) \exp_n \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{|\tilde{\Gamma}_k|}{k!} (e^h - 1)^k \right\}. \quad (31)$$

Из условия (S'_γ) следует, что

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} = \inf_{h>0, n=1,2,\dots} \frac{\exp_n \{ \lambda \Delta \sum_{k=1}^{2n} \{ ((k-1)!)^\gamma / k! \} (e^h - 1)^k / \Delta^k \}}{\exp_{2n}(hx)}.$$

Для любого значения $(e^h - 1)x$ мы можем найти такое n , чтобы имело место неравенство $(k-1)! \leq (e^h - 1)x$, $k = 1, 2, \dots, 2n$. Тогда

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} \leq \inf_{h>0, n=1,2,\dots} \frac{\exp_n \{ -\lambda \Delta \ln(1-q) \}}{\exp_{2n}(hx)}, \quad (32)$$

где

$$q = \frac{1}{\Delta} \left\{ (e^h - 1)^{1+\gamma} x^\gamma \right\}^{1/(1+\gamma)} = \frac{e^h - 1}{\Delta} x^{\gamma/(1+\gamma)}.$$

Выберем h как функцию x следующим образом:

$$\frac{(e^h - 1)x^{\gamma/(1+\gamma)}}{\Delta} = \frac{x/\Delta - \lambda/\Delta}{x/\Delta + \lambda} < 1. \quad (33)$$

В работе [9] показано, что $\exp_n\{x\} / \exp_{2n}\{2x\} \leq e^{-x}$, где n подбирается в зависимости от x .

То же самое будет и в нашем случае. Поэтому из (32) получаем

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} \leq e^{-\lambda \Delta \ln(1-q) - xh}. \quad (34)$$

Из (33) находим

$$e^h - 1 = \frac{x - \lambda}{(\lambda + x/\Delta) x^{\gamma/(1+\gamma)}}, \quad (35)$$

или

$$h = \ln \left(1 + \frac{x - \lambda}{(\lambda + x/\Delta) x^{\gamma/(1+\gamma)}} \right). \quad (36)$$

Из (35) следует, что

$$q = \frac{x/\Delta - \lambda/\Delta}{x/\Delta + \lambda}. \quad (37)$$

Соотношения (34), (36) и (37) доказывают справедливость (27), так как

$$-xh = -x \ln x + x \ln \lambda - x \ln \frac{1 - \lambda/x + (\lambda/x + 1/\Delta) x^{\gamma/(1+\gamma)}}{(1 + x/(\lambda\Delta)) x^{\gamma/(1+\gamma)}}.$$

Теорема 3 доказана.

Заметим, что $\mathbf{P}\{\eta_\lambda \geq x\} \leq e^{-x \ln x + x \ln \lambda + x - \lambda}$. В случае $\gamma = 0$ (см. лемму 2 в [3]) имеем $\mathbf{P}\{X \geq x\} \leq e^{g(h)}$, где $g(h) = -\lambda\Delta(1 - (e^h - 1)/\Delta) - xh$. Приравнявая $g'(h)$ к 0, находим $\min g(h)$, который связывает x и h следующим образом: $\lambda e^h - x(1 - (e^h - 1)/\Delta) = 0$, отсюда

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} \leq \exp \left\{ -x \ln x + x \ln \lambda + x \ln \frac{(x - \lambda)/(\lambda\Delta) + 1 + 1/\Delta}{1 + 1/\Delta} + \lambda\Delta \ln \left(1 + \frac{(x - \lambda)/(\lambda\Delta)}{1 + 1/\Delta} \right) \right\}. \quad (38)$$

Доказательство неравенства (38) не требует целочисленности X , поэтому оно справедливо и в нашем случае, когда $\gamma = 0$. Как видно, оно получается из (27) при $\gamma = 0$.

Мы не искали минимума функций $\tilde{g}(h) = -\lambda\Delta \ln(1 - q) - xh$. Тогда оценка для $\mathbf{P}\{X \geq x\}$ была бы очень громоздкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешкявичене А. К., Статулявичус В. А. Большие отклонения в степенных зонах при аппроксимации законом Пуассона. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, в. 5, с. 63–82.
2. Статулявичус В. А., Алешкявичене А. К. О больших отклонениях в пуассоновской аппроксимации. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 460–470.
3. Aleškevičienė A., Statulevičius V. Large deviations in approximation by Poisson law. — Proceedings of the Sixth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. / Ed. by B. Grigelionis et al. Utrecht: VSP/TEV, 1994, p. 1–18.
4. Царегородский И. П. О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами. — Теория вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, в. 4, с. 470–474.
5. Алешкявичене А. К., Статулявичус В. А. Формула обращения в случае разрывного предельного закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 3–20.
6. Алешкявичене А. К., Статулявичус В. А. Асимптотические разложения при аппроксимации законом Пуассона. — Liet. Mat. Rink., 1995, v. 35, № 4, p. 393–414.
7. Саулис Л., Статулявичус В. А. Предельные теоремы о больших отклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 208 с.
8. Saulis L., Statulevičius V. A. Limit Theorems for Large Deviations. Dordrecht: Kluwer, 1991, 232 p.
9. Бенткус Р., Рудзкис Р. Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин. — Литов. матем. сб., 1980, т. 20, № 1, с. 15–30.
10. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982, 384 с.

Поступила в редакцию
25.VIII.2000

Исправленный вариант
25.I.2001