Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Д. А. Коршунов, Вероятности больших отклонений одномерных цепей маркова. Часть 3. Дастационарные распределения в экспоненциальном случае, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 640–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:12:48

© 2001 г.

БОРОВКОВ А. А.*, КОРШУНОВ Д. А.*

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ
ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА.
ЧАСТЬ 3. ДОСТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ¹⁾

Работа является продолжением статей [1] и [2]. Рассматривается однородная во времени цепь Маркова $\{X(n)\}$ со значениями на вещественной прямой и со скачками, не имеющими конечных экспоненциальных моментов. Изучается асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{X(n) \geq x\}$ при $x \rightarrow \infty$ как при фиксированных, так и при растущих значениях времени n .

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, асимптотика вероятностей больших уклонений, субэкспоненциальное распределение, инвариантная мера, второй хвост распределения.

§ 1. Введение

Пусть $X(n) = X(y, n)$, $n = 0, 1, \dots$, — однородная во времени цепь Маркова со значениями на вещественной прямой $\mathbf{R}$ и с начальным значением $y \equiv X(y, 0)$. Переходную вероятность цепи обозначаем $P(y, B) = \mathbf{P}\{X(y, 1) \in B\}$, где B — борелевское множество в $\mathbf{R}$.

Пусть $\xi(y)$ — приращение за один шаг цепи X в точке $y \in \mathbf{R}$, т.е. $\xi(y) = X(y, 1) - y$.

В настоящей работе изучаются, в частности, *асимптотически однородные* в пространстве цепи, т.е. цепи, для которых распределение $\xi(y)$ слабо сходится при $y \rightarrow \infty$ к распределению некоторой случайной величины ξ (мы обозначаем это символом $\xi(y) \Rightarrow \xi$). Всюду предполагается, что $m = \mathbf{E}\xi < 0$ и $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$. Изучается также и более широкий класс цепей с асимптотически однородным сносом, т.е. цепей, относительно которых предполагается лишь, что $\mathbf{E}\xi(y) \rightarrow m$ при $y \rightarrow \infty$.

В [2] была проведена классификация асимптотически однородных цепей в зависимости от поведения преобразования Лалласа $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, korshunov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №96-01-01939) и CRDF Cooperative Grants Program (Award # RM1-226).

В терминах этой классификации в настоящей работе рассматривается третий раздел (в), когда $\varphi(\lambda) = \infty$ при любом $\lambda > 0$, но «хвост» $\mathbf{P}\{\xi \geq x\}$ распределения ξ ведет себя регулярным образом при $x \rightarrow \infty$. Напомним некоторые определения.

Положительная функция g называется *локально степенной*, если для всякого фиксированного t предел при $u \rightarrow \infty$ отношения $g(u+t)/g(u)$ равен 1. Говорим, что *распределение G локально степенное*, если его хвост $G(x) \equiv G([x, \infty))$ — локально степенная функция.

Отметим, что для любой случайной величины ξ с локально степенным распределением для любого $\lambda > 0$ выполняется $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} = \infty$.

Мы будем говорить [5], что распределение G в $\mathbf{R}^+$ с неограниченным носителем принадлежит классу $\mathcal{S}$ (является *субэкспоненциальным*), если свертка распределения G с самим собой удовлетворяет эквивалентности $G * G(x) \sim 2G(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

В [5] показано, что субэкспоненциальное распределение G с необходимостью является локально степенным. Достаточные условия принадлежности распределения классу субэкспоненциальных распределений можно найти в [5], [8]. В частности, класс $\mathcal{S}$ включает в себя распределения вида $G(x) = x^{-\alpha} \varepsilon(x)$, где $\alpha > 0$, $\varepsilon(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \rightarrow \infty$. Более того, класс $\mathcal{S}$ включает в себя так называемые *надстепенные* распределения, т.е. такие локально степенные распределения, для которых $\sup_x G(x/2)/G(x) < \infty$.

Пусть G — распределение в $\mathbf{R}$ с неограниченным справа носителем и конечным средним значением. Для любого $t \in (0, \infty]$ введем в рассмотрение распределение G_t в $\mathbf{R}^+$ такое, что

$$G_t(x) \equiv \min \left(1, \int_x^{x+t} G(u) du \right), \quad x > 0. \quad (1.1)$$

Отметим, что локально степенное распределение G для любого фиксированного $s > 0$ с необходимостью удовлетворяет соотношению

$$G_s(x) = o(G_t(x)) \quad \text{при } t, x \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Будем говорить (см. [3]), что субэкспоненциальное распределение G в $\mathbf{R}^+$ является *сильно субэкспоненциальным* (и писать $G \in \mathcal{S}_*$), если свертка распределения G_t с самим собой удовлетворяет эквивалентности $G_t * G_t(x) \sim 2G_t(x)$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [1, \infty]$.

Критерии принадлежности распределения классу $\mathcal{S}_*$ приведены в [3]. Класс $\mathcal{S}_*$ включает в себя, в частности, следующие распределения:

(а) надстепенные распределения и, в частности, все распределения с правильно меняющимися на бесконечности хвостами;

(б) логнормальное распределение с плотностью $\exp\{-(\ln x - \ln \alpha)^2 / 2\sigma^2\} / x\sigma\sqrt{2\pi}$, $x > 0$, где $\sigma, \alpha > 0$;

(в) распределение Вейбулла с хвостом $G([x, \infty)) = e^{-x^\alpha}$, $x \geq 0$, где $\alpha \in (0, 1)$.

В первой части [1] настоящей работы предполагалось, что цепь X обладает инвариантной мерой π , т.е. мерой, доставляющей решение уравнению

$$\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{R}} \pi(du) P(u, \cdot), \quad \pi(\mathbf{R}) = 1. \quad (1.3)$$

Там был доказан следующий результат об асимптотике хвоста $\pi(x)$ инвариантной меры π .

Теорема 1. Пусть цепь X асимптотически однородная в пространстве, причем семейство скачков $\{\xi(u)\}$ интегрируемо равномерно по u . Пусть $m = \mathbf{E}\xi < 0$ и распределение F случайной величины ξ таково, что распределение F_∞ (см. определение (1.1)) надстепенное. Если для некоторой ограниченной сверху функции $c(u)$ имеет место равномерная по u сходимость

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geq t\}}{\mathbf{P}\{\xi \geq t\}} \rightarrow c(u) \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

то

$$\pi(x) \sim \frac{F_\infty(x)}{|m|} \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi(du) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. К сожалению, в формулировке соответствующей теоремы 6 в [1] условие ограниченности сверху функции $c(u)$ было пропущено.

В третьей (настоящей) части работы изучается асимптотическое поведение хвоста $\pi_n(x)$ распределения π_n величины $X(n)$: $\pi_n(x) = \mathbf{P}\{X(n) \geq x\}$ при $x \rightarrow \infty$ как при фиксированном значении временного параметра n , так и при неограниченно возрастающем n .

Положим $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ и $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$, где ξ_k независимы и распределены как ξ . Известно (см., например, [4, гл. VI, § 9]), что распределение однородной в пространстве (см. [1]) цепи $X(n) = (X(n+1) + \xi_n)^+$ с нулевым начальным условием $X(0) = 0$ совпадает с распределением M_n , т.е.

$$\mathbf{P}\{X(0, n) \geq x\} = \mathbf{P}\{M_n \geq x\}. \quad (1.4)$$

Ниже нам понадобится следующая теорема, доказанная в [3].

Теорема 2. Пусть $m < 0$ и распределение случайной величины $\xi \mathbf{I}\{\xi \geq 0\}$ сильно субэкспоненциальное. Тогда имеет место равномерная по всем значениям $n \geq 1$ асимптотическая эквивалентность

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \sim \frac{F_{n|m|}(x)}{|m|} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Как уже отмечалось, одним из основных объектов изучения в настоящей работе будут цепи с асимптотически однородным сносом. Для таких цепей в § 2 получены оценки снизу для вероятности $\pi_n(x) = \mathbf{P}\{X(n) \geq x\}$. В § 3 приводятся оценки сверху для этих вероятностей. На основании этих результатов в § 4 доказывается теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для асимптотически однородных в пространстве цепей X .

§ 2. Оценка снизу вероятностей больших уклонений для достационарной цепи

В настоящем параграфе приводится асимптотически правильная оценка снизу для вероятности $\pi_n(x)$ при больших значениях n и x . Предварительно устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения.

2.1. Утверждения типа усиленного закона больших чисел для марковской последовательности. Рассмотрим неоднородную во времени цепь Маркова $Y = \{Y_n\}$. Начальное распределение цепи полагаем произвольным. Пусть $\eta_{n+1}(u)$ — случайная величина, отвечающая скачку цепи Y в момент времени n из состояния u , т.е. такая случайная величина, что

$$\mathbf{P}\{Y_{n+1} \in \cdot \mid Y_n = u\} = \mathbf{P}\{u + \eta_{n+1}(u) \in \cdot\}.$$

Лемма 1. Пусть снос цепи Маркова Y_n в любой момент времени $n \geq 1$ и в любом состоянии $u \in \mathbf{R}$ ограничен снизу числом $\hat{a}$: $\mathbf{E}\eta_n(u) \geq \hat{a}$. Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{|\eta_n(u)|, n \geq 1, u \in \mathbf{R}\}$ найдется интегрируемая мажоранта, т.е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что $|\eta_n(u)| \leq_{\text{st}} \eta$ для любых n и u . Тогда для любого начального распределения Y_0 почти наверное $\liminf_{n \rightarrow \infty} (Y_n - Y_0)/n \geq \hat{a}$.

Доказательство. Пусть $A > 0$. Определим «срезку» скачка $\eta_n(u)$ на уровне An следующим образом:

$$\eta_n^{[An]}(u) \equiv \eta_n(u) \mathbf{I}\{|\eta_n(u)| < An\}.$$

Рассмотрим неоднородную во времени цепь Маркова Z_n , $Z_0 = Y_0$, со скачками $\eta_n^{[An]}(u)$:

$$\mathbf{P}\{Z_{n+1} \in \cdot \mid Z_n = u\} = \mathbf{P}\{u + \eta_n^{[An]}(u) \in \cdot\}.$$

По построению Z_n вероятность несовпадения траекторий Z_n и Y_n можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_n |Z_n - Y_n| \neq 0\right\} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{|Y_{n+1} - Y_n| \geq An\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\eta| \geq An\} \leq \mathbf{E} \frac{|\eta|}{A}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Положим $\Delta_n^0 = \mathbf{E}\{Z_n - Z_{n-1} | Z_{n-1}\}$ и $\Delta_n^1 = Z_n - Z_{n-1} - \Delta_n^0$, так что

$$Z_n - Z_0 = \sum_{k=1}^n \Delta_k^0 + \sum_{k=1}^n \Delta_k^1 \equiv Z_n^0 + Z_n^1.$$

Для любого u в силу условий леммы на скачки $\eta_n(u)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\Delta_n^0 | Z_{n-1} = u\} &= \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(u) = \mathbf{E}\eta_n(u) - \mathbf{E}\{\eta_n(u); |\eta_n(u)| \geq An\} \\ &\geq \hat{a} - \mathbf{E}\{|\eta|; |\eta| \geq An\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^0 \geq \hat{a} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{|\eta|; |\eta| \geq Ak\}.$$

Ввиду конечности $\mathbf{E}|\eta|$ получаем отсюда, что равномерно по всем элементарным исходам

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n^0}{n} \geq \hat{a}. \quad (2.2)$$

Поскольку $\mathbf{E}\{\Delta_n^1 | Z_n\} = 0$, процесс Z_n^1 образует мартингал относительно потока σ -алгебр $\sigma(Z_0, \dots, Z_{n-1})$. Докажем, что приращения этого мартингала удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(\Delta_n^1)^2}{n^2} < \infty. \quad (2.3)$$

Для любого u по построению Δ_n^1 и ввиду условий леммы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{(\Delta_n^1)^2 | Z_{n-1} = u\} &= \mathbf{E}\left(\eta_n^{[An]}(u) - \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(u)\right)^2 \\ &\leq \mathbf{E}\left(\eta_n^{[An]}(u)\right)^2 \leq \mathbf{E}\{\eta^2; |\eta| < An\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(\Delta_n^1)^2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^2; |\eta| < An\}}{n^2}.$$

Последний ряд сходится при любом значении A , так как

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^2; |\eta| < An\}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^2} \mathbf{E}\left\{\left(\frac{\eta}{A}\right)^2; \left|\frac{\eta}{A}\right| < n\right\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \mathbf{P}\left\{k-1 \leq \left|\frac{\eta}{A}\right| < k\right\} \\ &= A^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbf{P}\left\{k-1 \leq \left|\frac{\eta}{A}\right| < k\right\} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \end{aligned}$$

в силу эквивалентности $\sum_{n=k}^{\infty} 1/n^2 \sim 1/k$ и существования $\mathbf{E}|\eta|$.

Итак, мартингал Z_n^1 действительно удовлетворяет условию (2.3) и можно воспользоваться следствием 2 из [6, с. 534], в силу которого для него выполнен усиленный закон больших чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n^1}{n} = 0 \quad \text{почти наверное.} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2) и (2.4) влекут неравенство $\liminf_{n \rightarrow \infty} (Z_n - Z_0)/n \geq \hat{a}$ почти наверное. Утверждение леммы вытекает теперь из (2.1) в силу произвольности выбора числа A .

Лемма 2. Пусть цепь Маркова Y_n такова, что ее снос, начиная с некоторого пространственного уровня U , ограничен снизу числом $\hat{a} < 0$: $E\eta_n(u) \geq \hat{a}$ для любых $n \geq 1$ и $u \geq U$. Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{|\eta_n(u)|, n \geq 1, u \geq U\}$ найдется интегрируемая мажоранта, т.е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что $|\eta_n(u)| \leq_{st} \eta$ для любых n и $u \geq U$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}\{Y_k \geq u - n(|\hat{a}| + \varepsilon) \quad \text{при всех } k \leq n \mid Y_0 = u\} \rightarrow 1$$

равномерно по $u \geq U + n(|\hat{a}| + \varepsilon)$.

Доказательство состоит в рассмотрении вспомогательной, также неоднородной во времени, цепи Маркова $\tilde{Y}_n$, у которой скачки $\tilde{\eta}_n(u)$ совпадают с $\eta_n(u)$ при $u \geq U$ и равны $\hat{a}$ при $u < U$, с дальнейшим применением леммы 1.

2.2. Оценка снизу вероятностей больших отклонений. Начальное распределение π_0 цепи X полагаем произвольным. Пусть f — положительная невозрастающая локально степенная функция. Пусть функция $\underline{c}(u) \geq 0$ такова, что для любого $U > 0$

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geq x\}}{f(x)} \geq \underline{c}(u) + o(1)$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $|u| \leq U$. Обозначим

$$c_\infty \equiv \lim_{U \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-U}^U \underline{c}(u) \pi_n(du) \in [0, \infty].$$

В частности, если распределение π_n сходится к некоторой (с необходимостью инвариантной) мере π в метрике полной вариации, т.е. если имеет место сходимость

$$\sup_B |\pi_n(B) - \pi(B)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

где супремум берется по всем борелевским множествам на прямой, то $c_\infty = \int_{\mathbf{R}} \underline{c}(u) \pi(du)$. Если функция $\underline{c}(u)$ непрерывна, то последнее равенство остается в силе и в случае лишь слабой сходимости $\pi_n \Rightarrow \pi$.

Положим

$$\underline{a} \equiv \liminf_{u \rightarrow \infty} \mathbf{E} \xi(u).$$

В лемме 1 из [2] было установлено, что в условиях существования инвариантной меры и конечности $\sup_u \mathbf{E} |\xi(u)|$ с необходимостью $\underline{a} \leq 0$. В настоящем же пункте нет ограничений на знак числа $\underline{a}$.

Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть $a = -\underline{a}$, если $\underline{a} < 0$, и a — произвольное фиксированное положительное число, если $\underline{a} \geq 0$. Пусть найдется уровень U такой, что семейство $\{|\xi(u)|, u \geq U\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Тогда имеет место оценка

$$\liminf_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\pi_n(x)}{\int_x^{x+na} f(y) dy} \geq \frac{c_\infty}{a}.$$

Доказательство достаточно провести лишь для $c_\infty > 0$. Пусть $c' < c'' < c_\infty$. Определения функции $\underline{c}(u)$ и числа c_∞ влекут существование $U' > 0$ такого, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geq x\}}{f(x)} \pi_n(du) \geq c''$$

равномерно по всем достаточно большим x . Так как функция $f(x)$ локально степенная и не возрастает, $f(x-u)/f(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $|u| \leq U'$. Следовательно, найдутся N и x_0 такие, что

$$\int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq x\}}{f(x)} \pi_n(du) \geq c' \quad (2.6)$$

равномерно по $n \geq N$ и $x \geq x_0$.

Рассмотрим событие $A_{i,n} \equiv A_{i,n}(x)$, $i \in [1, n]$, состоящее в том, что $X(i-1) < x$ и $X(j) \geq x$ для любого $j \in [i, n]$. Во-первых, события $A_{i,n}$, $i \in [1, n]$, не пересекаются. Во-вторых, $\cup_{i=1}^n A_{i,n} = \{X(n) \geq x\}$. Следовательно,

$$\pi_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_{i,n}\}. \quad (2.7)$$

Для $v \in [x, \infty)$ введем вероятность $p_i(v)$ равенством

$$p_i(v) = \mathbf{P}\{X(v, j) \geq x \text{ для любого } j \leq i\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $b = a + \varepsilon$. Так как событие $A_{i,n}(U') \equiv \{X(i-1) \in [-U', U'], X(i) \geq x + (n-i)b \text{ и } X(j) \geq x \text{ при } j \in [i+1, n]\}$ влечет событие $A_{i,n}$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}\} \geq \int_{-U'}^{U'} \pi_{i-1}(du) \int_{x+(n-i)b}^{\infty} \mathbf{P}\{u + \xi(u) \in dv\} p_{n-i}(v).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}\} \geq \int_{-U'}^{U'} \pi_{i-1}(du) \mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq x + (n-i)b\} \min_{v \geq x + (n-i)b} p_{n-i}(v). \quad (2.8)$$

По определению чисел a и b имеем неравенство $\mathbf{E}\xi(v) \geq -b + \varepsilon/2$ для всех достаточно больших v . Поэтому в силу леммы 2 при $x, n-i \rightarrow \infty$ $\min_{v \geq x + (n-i)b} p_{n-i}(v) \rightarrow 1$. Подставляя это соотношение в (2.8), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \liminf_{n-i, x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{A_{i,n}\}}{f(x + (n-i)b)} \\ \geq \liminf_{n-i, x \rightarrow \infty} \int_{-U'}^{U'} \frac{\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq x + (n-i)b\}}{f(x + (n-i)b)} \pi_{i-1}(du) \geq c' \end{aligned}$$

ввиду (2.6). Используя последнее неравенство, выводим из (2.7) оценку $\pi_n(x) \geq (c' - \varepsilon) \sum_{i=N}^{n-I} f(x + (n-i)b)$, верную для сколь угодно медленно растущего I и всех достаточно больших x . Так как функция f локально степенная и не возрастает, то для любого фиксированного I

$$\sum_{i=N}^{n-I} f(x + (n-i)b) \sim \frac{1}{b} \int_x^{x+nb} f(y) dy \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\liminf_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\pi_n(x)}{\int_x^{x+nb} f(y) dy} \geq \frac{c' - \varepsilon}{b}.$$

Поскольку $b = a + \varepsilon$, $c' < c_\infty$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно, лемма доказана.

§ 3. Оценки сверху вероятностей больших уклонений для достационарных и стационарных цепей

3.1. Оценка сверху с «неправильным» постоянным множителем. Справедливо следующее обобщение леммы 2 из [1] в части, относящейся к субэкспоненциальным распределениям.

Лемма 4. Пусть неограниченная сверху случайная величина ζ с распределением G такова, что $\mathbf{E}\zeta < 0$. Пусть найдется уровень U такой, что

$$\xi(u) \leq_{\text{st}} \zeta \quad \text{при } u \geq U, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq t\} \leq G(t) \quad \text{при } u < U \quad (3.2)$$

для всех $t \geq U$. Тогда

(а) если распределение G_∞ (см. определение (1.1)) субэкспоненциальное и цепь X допускает (вообще говоря, не единственную) инвариантную меру π , то имеет место оценка

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{G_\infty(x)} \leq \frac{1}{|\mathbf{E}\zeta|}; \quad (3.3)$$

(б) если распределение G сильно субэкспоненциальное, то для любого ограниченного сверху начального распределения $X(0)$ имеет место оценка

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \frac{\pi_n(x)}{G_{n|\mathbf{E}\zeta}(x)} \leq \frac{1}{|\mathbf{E}\zeta|}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $X(0) \leq 0$ и $U = 0$. Рассмотрим однородную цепь $\{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определенную равенством $Y_{n+1} = (Y_n + \zeta_{n+1})^+$, где случайные величины ζ_n суть независимые копии ζ . В силу условий (3.1) и (3.2) цепь Маркова Y_n мажорирует сверху цепь $X(n)$ и, следовательно,

$$\pi(x) \leq \pi^Y(x), \quad (3.5)$$

где π^Y — инвариантная мера цепи Y .

Поскольку распределение G_∞ субэкспоненциальное, то в силу теоремы 2(B) из [9]

$$\pi^Y(x) \sim \frac{G_\infty(x)}{|\mathbf{E}\zeta|} \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

что в сочетании с (3.5) дает (3.3).

Неравенство (3.4) вытекает также из мажорируемости цепи $X(n)$ цепью Y_n , в силу которой для любых n и x справедлива оценка $\pi_n(x) \leq \pi_n^Y(x) = \mathbf{P}\{Y_n \geq x\}$. Остается воспользоваться теоремой 2. Лемма доказана.

3.2. Вспомогательные леммы. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Лемма 5. Пусть $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geq 0 \text{ для любого } k \leq n\}$$

сходится.

Доказательство. Рассмотрим однородную в пространстве цепь, определенную равенством $Y_{n+1} = (Y_n + \zeta_{n+1})^+$, с начальным значением $Y_0 = 1$. Имеем неравенство и равенство $\mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geq 0 \text{ для любого } k \leq n\} \leq \mathbf{P}\{Y_k > 0 \text{ для любого } k \leq n | Y_0 = 1\} = \mathbf{P}\{\eta > n\}$, где η — момент первого достижения цепью $\{Y_n\}$ состояния 0. Поскольку $\mathbf{E}\zeta_1 < 0$, цепь $\{Y_n\}$ является положительно возвратной, т.е. $\mathbf{E}\eta < \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta > n\}$ сходится и лемма доказана.

В следующей лемме изучается локальное поведение функции, мажорируемой сверху локально степенной функцией. Пусть положительная невозрастающая интегрируемая на бесконечности функция $f(x)$ является локально степенной. Поскольку функция f не возрастает, то она является локально степенной тогда и только тогда, когда существует последовательность $\Delta(x) \rightarrow \infty$ такая, что

$$\frac{f(x)}{f(x - \Delta(x))} \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Пусть c — произвольная положительная константа. Положим

$$f_n(x) = \int_x^{x+cn} f(y) dy.$$

Имеем равномерную по всем значениям n эквивалентность

$$f_n(x - \Delta(x)) \sim f_n(x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Пусть неотрицательная функция $h_n(x)$ такова, что при каждом n она не возрастает по x .

Лемма 6. Пусть $h_n(x) \leq f_n(x)$ для любых n и x . Тогда существует последовательность отрезков $[x_n^-, x_n^+] \subseteq [x - \Delta(x), x]$ таких, что $x_n^+ - x_n^- \rightarrow \infty$ и $h_n(x_n^-) - h_n(x_n^+) = o(f_n(x))$ при $n, x \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть последовательность $u(x) \rightarrow \infty$ такова, что $u(x) = o(\Delta(x))$ при $x \rightarrow \infty$ и $l(x) = \Delta(x)/u(x)$ — целое число; по выбору $u(x)$ имеем $l(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

В силу (3.6) для доказательства леммы достаточно показать, что для любых n и x существует точка $x_n^- \in [x - \Delta(x), x - u(x)]$, для которой

$$h_n(x_n^-) - h_n(x_n^- + u(x)) = o(f_n(x_n^-)) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty$$

(и положить $x_n^+ = x_n^- + u(x)$). Предположим, что, напротив, последнее соотношение не имеет места. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, подпоследовательность индексов $n_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, и $x_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, такие, что для любого $y \in [x_k - \Delta(x_k), x_k - u(x_k)]$ выполняется

$$h_{n_k}(y) - h_{n_k}(y + u(x_k)) \geq \varepsilon f_{n_k}(y). \quad (3.7)$$

В частности, ввиду неравенства $h_{n_k} \leq f_{n_k}$

$$h_{n_k}(y + u(x_k)) \leq h_{n_k}(y) - \varepsilon f_{n_k}(y) \leq (1 - \varepsilon) h_{n_k}(y).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x_k - u(x_k)) &\leq (1 - \varepsilon)^{l(x_k)-1} h_{n_k}(x_k - \Delta(x_k)) \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{l(x_k)-1} f_{n_k}(x_k - \Delta(x_k)) = o(f_{n_k}(x_k - u(x_k))) \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$ в силу $l(x_k) \rightarrow \infty$ и (3.6). Противоречие с (3.7) при $y = x_k - u(x_k)$. Лемма доказана.

3.3. Оценка сверху с «правильным» постоянным множителем. Предполагаем, что начальное распределение π_0 сосредоточено на множестве, ограниченном сверху.

Лемма 7. Пусть неограниченная сверху случайная величина ζ с распределением G такова, что распределение случайной величины $\zeta \mathbf{I}\{\zeta \geq 0\}$ сильно субэкспоненциальное и $\mathbf{E}\zeta < 0$. Пусть найдется уровень U такой, что выполняется (3.1). Пусть, кроме того, для некоторой функции $c(v) \leq 1$ выполняется при $u \geq U$ неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi(u) \geq t\} \leq c(u) G(t) \quad \text{для всех } t \geq U, \quad (3.8)$$

а при $u < U$ — неравенство

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq t\} \leq c(u) G(t) \quad \text{для всех } t \geq U. \quad (3.9)$$

Если, кроме того, имеет место сходимость по вариации (2.5), то при $x \rightarrow \infty$ справедлива равномерная по всем значениям $n \geq 1$ оценка

$$\pi_n(x) \leq (1 + o(1)) \sum_{k=1}^n c_{k-1} G(x + (n - k) |\mathbf{E}\zeta|), \quad (3.10)$$

где $c_k \equiv \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi_k(du) \geq 0$. В частности,

$$\limsup_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\pi_n(x)}{G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)} \leq \frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\zeta|} \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где $c_\infty \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi(du) \geq 0$.

Доказательство. Поскольку временной параметр n принимает лишь счетное число значений, распределение G локально степенное и $c_n \rightarrow c_\infty$, то достаточно проверить по отдельности следующие два соотношения: для любого фиксированного n

$$\pi_n(x) \leq (1 + o(1)) G(x) \sum_{k=1}^n c_{k-1} \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

и (3.11). Проверим сначала первое из них по индукции. Для любого $U' \in (U, x)$ имеем равенство

$$\pi_{n+1}(x) = \left(\int_{-\infty}^{U'} + \int_{U'}^{x-U'} + \int_{x-U'}^{\infty} \right) \mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq x\} \pi_n(du) \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Ввиду условий (3.8) и (3.9) для любого фиксированного значения U' имеем оценку

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{I_1}{G(x)} \leq \int_{-\infty}^{U'} c(u) \pi_n(du) \leq c_n.$$

Ввиду $c(v) \leq 1$ и условия (3.8) второе слагаемое I_2 допускает оценку:

$$I_2 \leq \int_{U'}^{x-U'} G(x - u) \pi_n(du).$$

Интегрируя по частям, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} I_2 &\leq -G(x-u) \pi_n(u) \Big|_{U'}^{x-U'} + \int_{U'}^{x-U'} \pi_n(x-u) G(du) \\ &\leq G(x-U') \pi_n(U') + \int_{U'}^{x-U'} \pi_n(x-u) G(du). \end{aligned}$$

Используя здесь индукционное предположение, получаем оценку

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{I_2}{G(x)} \leq cG(U') + c \limsup_{x \rightarrow \infty} \int_{U'}^{x-U'} \frac{G(x-u)}{G(x)} G(du).$$

Поскольку распределение G является субэкспоненциальным, то в силу соотношения (2) из [7] значение верхнего предела в правой части оценки можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое значение U' . Таким образом, $\lim_{U' \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} I_2/G(x) = 0$.

Третье слагаемое I_3 не превосходит $\pi_n(x-U')$. Поэтому по индукционному предположению и ввиду того, что распределение G локально степенное, для любого фиксированного U' справедлива оценка $\limsup_{x \rightarrow \infty} I_3/G(x) \leq \sum_{k=1}^n c_{k-1}$. Собирая оценки для I_1 , I_2 и I_3 , убеждаемся в справедливости индукционного перехода $n \rightarrow n+1$.

Докажем соотношение (3.11). Не ограничивая общности, считаем, что $X(0) \leq U$. Пусть последовательность точек x_k , $k = 1, 2, \dots$, такова, что $x_{k+1} - x_k \rightarrow \infty$ и $G(x_{k+1}) \sim G(x_k)$ при $k \rightarrow \infty$. В частности, $G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_{k+1}) \sim G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_k)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по всем значениям n . Поэтому соотношение (3.11) эквивалентно соотношению

$$\limsup_{n, k \rightarrow \infty} \frac{\pi_n(x_k)}{G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_k)} \leq \frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\zeta|}. \quad (3.13)$$

В силу леммы 4 для любого фиксированного i функция $h_n(x) \equiv \pi_{n-i}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6 при $f(x) \equiv \text{const} \cdot G(x)$ и $c = |\mathbf{E}\zeta|$. Поэтому найдутся последовательности x_{kn}^- и x_{kn}^+ такие, что $[x_{kn}^-, x_{kn}^+] \subseteq [x_k, x_{k+1}]$, $x_{kn}^+ - x_{kn}^- \rightarrow \infty$ и $\pi_{n-i}(x_{kn}^-) - \pi_{n-i}(x_{kn}^+) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x_{k+1}))$ при $n, k \rightarrow \infty$. На основании этих рассуждений не будет ограничением общности предполагать для удобства существования (для любого фиксированного i) функции x_n^- такой, что $x_n^- \in [0, x]$, $x - x_n^- \rightarrow \infty$ и

$$\pi_{n-i}([x_n^-, x_n^+)) = \pi_{n-i}(x_n^-) - \pi_{n-i}(x) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)), \quad n, x \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Из условия (3.9) вытекает выполнение (3.2). Рассмотрим однородную цепь $\{Y_n\}$ с неотрицательными значениями, определенную в ходе доказательства леммы 4. Поскольку цепь $\{U + Y_n\}$ мажорирует цепь $\{X(n)\}$, то в случае $X(0) \leq U + Y_0$ цепи $\{X(n)\}$ и $\{U + Y_n\}$ можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что при любом n с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$X(n) \leq U + Y_n. \quad (3.15)$$

В дальнейшем различные характеристики, отвечающие цепи $\{X(n)\}$, помечаем верхним индексом X , а цепи $\{U + Y_n\}$ — верхним индексом Y .

События $A_{i,n}$ и вероятности $p_i(v)$ определены в ходе доказательства леммы 3. Обратимся снова к тождеству (2.7). Из оценки (3.4) и из (1.2) для любого фиксированного i вытекают соотношения

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} \leq \mathbf{P}\{X(i) \geq x\} = \pi_i(x) = O(G_{i|\mathbf{E}_\zeta|}(x)) = o(G_{n|\mathbf{E}_\zeta|}(x))$$

при $n, x \rightarrow \infty$. Следовательно, найдется неограниченно возрастающая последовательность $I = I(n, x)$ такая, что

$$\pi_n(x) = \sum_{i=I}^n \mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} + o(G_{n|\mathbf{E}_\zeta|}(x)) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

На самом деле любое конечное число последних слагаемых в этой сумме есть также величина порядка $o(G_{n|\mathbf{E}_\zeta|}(x))$. Это более тонкое наблюдение проверяется в конце доказательства.

Для вероятности события $A_{i,n}^X$ имеем равенство

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} = \int_{-\infty}^x \pi_{i-1}^X(du) \int_x^\infty P^X(u, dv) p_{n-i}^X(v).$$

Используя (3.15) при $X(0) = U + Y_0 = v$, получаем $p_{n-i}^X(v) \leq p_{n-i}^Y(v)$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} \leq \int_{-\infty}^x \pi_{i-1}^X(du) \int_x^\infty P^X(u, dv) p_{n-i}^Y(v). \quad (3.17)$$

Цепь $U + Y_n$, будучи однородной, стохастически возрастает. Поэтому функция $p_{n-i}^Y(v)$ не убывает с ростом v и, следовательно, является функцией ограниченной вариации. Интегрируя по частям, можно преобразовать внутренний интеграл последней оценки следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty P^X(u, dv) p_{n-i}^Y(v) &= P^X(u, [x, \infty)) p_{n-i}^Y(x) \\ &\quad + \int_x^\infty P^X(u, [v, \infty)) dp_{n-i}^Y(v). \end{aligned}$$

Оценивая $P^X(u, [v, \infty))$ в правой части последнего неравенства с помощью условия (3.9) и производя обратное интегрирование по частям, получаем последовательно для любого $u \in (-\infty, U)$ оценку и равенство

$$\begin{aligned} \int_x^\infty P^X(u, dv) p_{n-i}^Y(v) &\leq c(u) \left(G(x) p_{n-i}^Y(x) + \int_x^\infty G(v) dp_{n-i}^Y(v) \right) \\ &= c(u) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ровно так же ввиду условия (3.8) и неравенства $c(u) \leq 1$ получаем для любого $u \in [U, x)$

$$\int_x^\infty P^X(u, dv) p_{n-i}^Y(v) \leq c(u) \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v) \quad (3.19)$$

$$\leq \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v). \quad (3.20)$$

Так как функция $G(t)$ локально степенная, то найдется неограниченно растущий (при $x \rightarrow \infty$) уровень V такой, что $G(v - u) \sim G(v)$ при $u \in [U, V]$ и $v \geq x$. При этом неравенство (3.19) при $u \in [U, V]$ принимает вид

$$\int_x^\infty P^X(u, dv) p_{n-i}^Y(v) \leq (c(u) + o(1)) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.18), (3.20) и (3.21) в (3.17), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} &\leq (1 + o(1)) \int_{-\infty}^V \pi_{i-1}^X(du) c(u) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v) \\ &\quad + \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v). \end{aligned}$$

Вспоминая определение констант c_i , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_{i,n}^X\} &\leq (c_{i-1} + o(1)) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v) \\ &\quad + \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v) \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $i \in [1, n]$. Суммируя эти неравенства по i от $I(n, x)$ до n и учитывая при этом сходимость $c_i \rightarrow c_\infty$ при $i \rightarrow \infty$, получаем из (3.16) при $n, x \rightarrow \infty$ соотношение

$$\begin{aligned} \pi_n^X(x) &\leq (c_\infty + o(1)) \int_x^\infty G(dv) \sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v) \\ &\quad + \sum_{i=I}^n \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v) + o(G_{n|\mathbf{E}\zeta}(x)). \quad (3.22) \end{aligned}$$

Для однородной цепи $U + Y$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\} &\geq \int_U^V \pi_{i-1}^Y(du) \int_x^\infty P^Y(u, dv) p_{n-i}^Y(v) \\ &= \int_U^V \pi_{i-1}^Y(du) \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v). \end{aligned}$$

В силу выбора уровня V имеем

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\} \geq \int_U^V \pi_{i-1}^Y(du) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v) = \pi_{i-1}^Y([U, V]) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v).$$

Поскольку $V \rightarrow \infty$, то при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $i \in [1, n]$

$$\mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\} \geq (1 + o(1)) \int_x^\infty G(dv) p_{n-i}^Y(v).$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до n , выводим из (2.7) соотношение

$$\pi_n^Y(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_{i,n}^Y\} \geq (1 + o(1)) \int_x^\infty G(dv) \sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v).$$

Из (1.4) и теоремы 2 вытекает, что при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $n \geq 1$

$$\pi_n^Y(x) \leq \frac{1 + o(1)}{|\mathbf{E}\zeta|} G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x).$$

Два последних неравенства влекут оценку

$$\int_x^\infty G(dv) \sum_{i=1}^n p_{n-i}^Y(v) \leq \frac{1+o(1)}{|\mathbf{E}\zeta|} G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Подставляя ее в (3.22), приходим при $n, x \rightarrow \infty$ к соотношению

$$\pi_n^X(x) \leq \frac{c_\infty + o(1)}{|\mathbf{E}\zeta|} G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x) + \sum_{i=I}^n \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u), \quad (3.23)$$

где $q_{n-i}(u) = \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v)$.

Ввиду предыдущих рассмотрений имеем также для цепи $U + Y$ равномерную по $n \geq 1$ оценку, верную при $x \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^n \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) \int_x^\infty G(dv - u) p_{n-i}^Y(v) = o(G_{n|\mathbf{E}\zeta|}(x)). \quad (3.24)$$

Осталось оценить общее слагаемое в сумме из (3.23). Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) = -\pi_{i-1}^X(u) q_{n-i}(u) \Big|_V^x + \int_V^x \pi_{i-1}^X(u) dq_{n-i}(u).$$

Ввиду леммы 4 и теоремы 2 $\pi_{i-1}^X(u) \leq c\pi_{i-1}^Y(u)$ при некотором $c < \infty$ для всех u и i . Поэтому

$$\int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \leq c\pi_{i-1}^Y(V) q_{n-i}(V) + c \int_V^x \pi_{i-1}^Y(u) dq_{n-i}(u).$$

Повторно интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \\ & \leq c\pi_{i-1}^Y(V) q_{n-i}(V) + c\pi_{i-1}^Y(u) q_{n-i}(u) \Big|_V^x + c \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u) \\ & \leq c\pi_{i-1}^Y(x) q_{n-i}(x) + c \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ровно так же получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) = \left(\int_V^{x_n^-} + \int_{x_n^-}^x \right) \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \\ & \leq c\pi_{i-1}^Y(x_n^-) q_{n-i}(x_n^-) + c \int_V^{x_n^-} \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u) + \pi_{i-1}^X([x_n^-, x)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Пусть J — фиксированное натуральное число. Применяя при $i \in [I, n-J]$ оценку (3.25), а при $i \in [n-J+1, n]$ — (3.26), выводим неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=I}^n \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) & \leq c \sum_{i=I}^{n-J} \pi_{i-1}^Y(x) q_{n-i}(x) + c \sum_{i=n-J+1}^n \pi_{i-1}^Y(x_n^-) q_{n-i}(x_n^-) \\ & + c \sum_{i=I}^n \int_V^x \pi_{i-1}^Y(du) q_{n-i}(u) + \sum_{i=n-J+1}^n \pi_{i-1}^X([x_n^-, x)). \end{aligned}$$

В силу (3.24) третья сумма в правой части оценки есть величина порядка $o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x))$; четвертая сумма есть величина того же порядка при любом фиксированном J в силу (3.14). Следовательно, при достаточно медленно растущем уровне $J \equiv J_n(x) \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i=I}^n \int_V^x \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) \\ & \leq c \sum_{i=I}^{n-J} \pi_{i-1}^Y(x) q_{n-i}(x) + c \sum_{i=n-J+1}^n \pi_{i-1}^Y(x_n^-) q_{n-i}(x_n^-) + o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) \\ & \equiv c \Sigma_1 + c \Sigma_2 + o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Так как

$$\begin{aligned} q_{n-i}(x) &= \int_x^\infty G(dv - x) p_{n-i}^Y(v) \\ &= \int_x^\infty G(dv - x) \mathbf{P}\{Y_k \geq x \text{ для любого } k \in [2, n-i+1] \mid Y_1 = v\} \\ &= \mathbf{P}\{Y_k \geq x \text{ для любого } k \in [1, n-i+1] \mid Y_0 = x\}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i=I}^{n-J} \pi_{i-1}^Y(x) \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geq 0 \text{ для любого } k \leq n-i+1\} \\ &= O(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) \sum_{i=I}^{n-J} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geq 0 \text{ для любого } k \leq n-i+1\}. \end{aligned}$$

Поскольку $J \rightarrow \infty$, по лемме 5 $\sum_{i=I}^{n-J} \mathbf{P}\{\zeta_1 + \dots + \zeta_k \geq 0 \text{ для любого } k \leq n-i+1\} \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\Sigma_1 = o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Докажем теперь, что

$$\Sigma_2 = o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Поскольку последовательность $J_n(x)$ может возрастать сколь угодно медленно, для этого достаточно проверить, что для любого фиксированного i выполняется $\pi_{n-i}^Y(x_n^-) q_{i-1}(x_n^-) = o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x))$ при $n, x \rightarrow \infty$. Ввиду (3.14) и леммы 4 имеем

$$\pi_{n-i}^Y(x_n^-) = \pi_{n-i}^Y(x) + o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) = O(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \pi_{n-i}^Y(x_n^-) q_{i-1}(x_n^-) &= O(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) q_{i-1}(x_n^-) \leq O(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)) P(x_n^-, [x, \infty)) \\ &= o(G_{n|\mathbf{E}_{\zeta|}}(x)), \end{aligned}$$

так как $x - x_n^- \rightarrow \infty$ и $P(x_n^-, [x, \infty)) \rightarrow 0$. Таким образом, соотношение (3.29) доказано.

Подставляя (3.28) и (3.29) в (3.27), приходим к соотношению

$$\sum_{i=I}^n \int_V \pi_{i-1}^X(du) q_{n-i}(u) = o(G_{n|\mathbf{E}\xi|}(x)) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty.$$

Учитывая последнее соотношение и (3.23), приходим к оценке (3.11), а вместе с тем и к утверждению леммы.

§ 4. Равномерная по временному параметру теорема о вероятностях больших отклонений

Мы рассматриваем здесь асимптотически однородную в пространстве цепь, т.е. предполагаем при $u \rightarrow \infty$ слабую сходимость $\xi(u) \Rightarrow \xi$, причем $\mathbf{E}\xi < 0$. В настоящем параграфе предполагаем также, что начальное распределение π_0 сосредоточено на множестве, ограниченном сверху, и имеет место сходимость по вариации (2.5).

Пусть ζ — неограниченная сверху случайная величина с распределением G и отрицательным средним значением. Предполагаем, что распределение случайной величины $\zeta \mathbf{I}\{\zeta \geq 0\}$ сильно субэкспоненциальное.

Теорема 3. Пусть найдется уровень U такой, что семейство случайных величин $\{|\xi(u)|, u \geq U\}$ обладает интегрируемой мажорантой и выполнено условие

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq t\} \leq G(t) \quad \text{при } u < U, \quad \xi(u) \leq_{\text{st}} \zeta \quad \text{при } u \geq U$$

для $t \geq U$. Пусть для некоторой функции $c(u) \leq 1$ имеет место равномерная по u сходимость

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geq t\}}{G(t)} \rightarrow c(u) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место равномерное по $n \geq 1$ соотношение

$$\pi_n(x) = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^n c_{k-1} G(x + (n - k) |\mathbf{E}\xi|),$$

где постоянные c_k определяются равенствами $c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi_k(du)$. В частности,

$$\pi_n(x) = \left(\frac{c_\infty}{|\mathbf{E}\xi|} + o(1) \right) G_{n|\mathbf{E}\xi|}(x) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty,$$

где $c_\infty \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \int_{\mathbf{R}} c(u) \pi(du)$.

З а м е ч а н и е 2. В случае правильно меняющегося на бесконечности хвоста распределения G из теоремы вытекает, что асимптотика при $n/x \rightarrow \infty$ вероятности $\pi_n(x)$ имеет вид (если $c_\infty > 0$) $\pi_n(x) \sim c_\infty G_\infty(x)/|\mathbf{E}\xi|$ и, в частности, совпадает с асимптотикой хвоста инвариантной меры: $\pi_n(x) \sim \pi(x)$.

Доказательство теоремы 3. В силу условий теоремы для любого $\varepsilon > 0$ найдутся случайная величина ζ_ε с распределением G_ε и уровень U_ε такие, что $\mathbf{E}\zeta_\varepsilon \leq \mathbf{E}\xi + \varepsilon$, $\mathbf{P}\{\zeta_\varepsilon \geq t\} = \mathbf{P}\{\zeta \geq t\}$ для всех достаточно больших значений t и

$$\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq t\} \leq G_\varepsilon(t) \quad \text{при } u < U_\varepsilon, \quad \xi(u) \leq_{\text{st}} \zeta_\varepsilon \quad \text{при } u \geq U_\varepsilon$$

для $t \geq U_\varepsilon$. Из леммы 7 вытекает равномерная по $n \geq 1$ оценка сверху, верная при $x \rightarrow \infty$:

$$\pi_n(x) \leq (1 + o(1)) \sum_{k=1}^n c_{k-1} G(x + (n - k) (|\mathbf{E}\xi| - \varepsilon)).$$

Так как функция $G(y)$ локально степенная, отсюда в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ следует оценка сверху

$$\pi_n(x) \leq (1 + o(1)) \sum_{k=1}^n c_{k-1} G(x + (n - k) |\mathbf{E}\xi|).$$

Поскольку временной параметр n принимает лишь счетное число значений, то соответствующая оценка снизу вытекает из леммы 3, а также из следующего соотношения: для любого фиксированного n $\pi_n(x) \geq (1 + o(1)) G(x) \sum_{k=1}^n c_{k-1}$ при $x \rightarrow \infty$. Последнее соотношение проверяется по индукции так же, как и соотношение (3.12). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших отклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.
2. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших отклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 437–468.
3. Коршунов Д. А. Вероятности больших отклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 387–397.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 738 с.
5. Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.
6. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
7. Embrechts P., Goldie C. M. On convolution tails. — Stochastic Process. Appl., 1982, v. 13, № 3, p. 263–278.
8. Teugels J. L. The class of subexponential distributions. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 6, p. 1000–1011.
9. Veraverbeke N. Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1977, v. 5, № 1, p. 27–37.

Поступила в редакцию
23.VIII.1999