Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. К. Голубев, Ф. Н. Еникеева, Об одной задаче минимаксного оценивания дробной производной, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 658–677

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:15:00

© 2001 г. ГОЛУБЕВ Г. К.*, ЕНИКЕЕВА Ф. Н.**

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассматривается задача минимаксного оценивания дробной производной порядка $-\frac{1}{2}$ неизвестной функции по наблюдениям в белом гауссовском шуме. Эта задача тесно связана с известной проблемой Вискела. В работе развивается асимптотически минимаксная теория второго порядка.

Ключевые слова и фразы: дробная производная, минимаксный риск второго порядка, задача Вискела.

1. Введение

В работе оценивается $f^{(\alpha)}(t)$ — дробная производная порядка $\alpha = -\frac{1}{2}$ неизвестной функции $f(t)$ по наблюдениям в белом гауссовском шуме

$$dx(t) = f(t) dt + \varepsilon dw(t), \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = 0; \quad (1.1)$$

здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, а ε — малый параметр. Наша задача — оценить $f^{(-1/2)}(t)$ при условии, что функция $f(t)$ принадлежит некоторому известному классу гладких функций. В действительности будут рассматриваться две задачи: оценивание $f^{(-1/2)}(t)$ в фиксированной точке t_0 и оценивание $f^{(-1/2)}(t)$ на всем отрезке $[0, 1]$.

Чтобы упростить технические детали, предположим, что $f(t)$ — периодическая функция с нулевым средним, а $\varphi_k(t) = \exp(2\pi i k t)$ — тригонометрический базис. Тогда, как хорошо известно [12], дробную производную порядка α можно определить следующим образом:

$$f^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) (2\pi i k)^\alpha,$$

*Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный, 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: glbv@iitp.ru

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: farida@shade.msu.ru

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(0, 1)$. Пусть $\theta_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ — коэффициенты Фурье функции f . Тогда задача оценивания производной порядка $-\frac{1}{2}$ в точке t_0 — это оценивание линейного функционала

$$L(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i k t_0)}{\sqrt{2\pi i k}} \theta_k,$$

а задача оценивания производной того же порядка на всем отрезке сводится к задаче восстановления вектора $(\theta_1/\sqrt{1}, \theta_2/\sqrt{2}, \dots)^T$.

В некоторых случаях задачу оценивания можно немного упростить, если перейти от наблюдений во временной области к наблюдениям в пространстве коэффициентов Фурье. Учитывая, что $\varphi_k(t)$ — полная ортонормированная система в $L_2(0, 1)$, легко видеть, что наблюдения (1.1) эквивалентны следующим наблюдениям:

$$X_k = \theta_k + \varepsilon \xi_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.2)$$

где ξ_k — независимые комплекснозначные гауссовские случайные величины с параметрами $(0, 1)$,

$$\xi_k = \int_0^1 \varphi_k(t) dw(t), \quad X_k = \int_0^1 \varphi_k(t) dx(t).$$

Важным ингредиентом любой статистической задачи является априорная информация о неизвестных параметрах. В настоящей работе предполагается, что функциональный класс, которому принадлежит неизвестная функция $f(t)$, — это эллипсоид в $L_2(0, 1)$. Точнее, считаем, что

$$\theta \in \Theta = \left\{ \theta: \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 |\theta_k|^2 \leq 1 \right\}. \quad (1.3)$$

В частности, если известно, что оцениваемая функция принадлежит соболевскому классу

$$W_2^\beta = \left\{ f: \int_0^1 \left[f^{(\beta)}(t) \right]^2 dt \leq P \right\},$$

то в этом случае оси соответствующего эллипсоида определяются как $a_k^2 = (2\pi k)^{2\beta}/P$.

На первый взгляд кажется, что рассматриваемая задача оценивания дробной производной порядка $-\frac{1}{2}$ представляет довольно специальный интерес. В действительности она очень тесно связана с хорошо известной проблемой Вискелла [10]. Последняя формулируется следующим образом. Пусть имеется непрозрачная среда, в которую помещены шары, радиусы которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с неизвестной функцией распределения $F(x)$.

Интерес представляет именно $F(x)$. Однако, поскольку среда непрозрачна, предполагается, что мы не можем измерить непосредственно радиусы шаров. Можно только рассеять среду некоторой плоскостью и измерить радиусы шаров в сечении. Обозначим эти радиусы через $Y_1, \dots, Y_n$. Задача — оценить по этим наблюдениям функцию распределения $F(x)$. Легко видеть, что величины Y_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с некоторой функцией распределения $G(y)$. Соотношения между F и G хорошо известны:

$$\begin{aligned} 1 - G(y) &= \int_y^\infty \sqrt{x-y} dF(x) \left(\int_0^\infty \sqrt{x} dF(x) \right)^{-1}, \\ 1 - F(x) &= \int_x^\infty \frac{dG(y)}{\sqrt{x-y}} \left(\int_0^\infty \frac{dG(y)}{\sqrt{y}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

С элементарным выводом этих формул можно познакомиться, например, в [3]. Эта формула на самом деле выражает неизвестную функцию распределения $F(x)$ через производные порядка $\frac{1}{2}$ от функции распределения $G(y)$ (присутствующие в ней интегралы — это просто другая эквивалентная форма записи дробных производных [12]). По сути дела, задача сводится к тому, чтобы по наблюдениям $Y_1, \dots, Y_n$, имеющим неизвестную плотность $G(y)$, оценить $G^{(1/2)}(0)$ и $G^{(1/2)}(y)$. Эти величины являются, естественно, производными порядка $-\frac{1}{2}$ от плотности распределения $g(y) = G'(y)$. Безусловно, эта задача не совпадает с рассматриваемой здесь задачей оценивания в белом шуме. Однако эти задачи очень близки. Хорошо известно, что соответствующие статистические эксперименты асимптотически эквивалентны в смысле Ле Кама (см. [7]). Мы намеренно отбрасываем второстепенные технические детали и рассматриваем простейшую статистическую задачу, которая наиболее близка к проблеме Вискела, чтобы выяснить, как строить асимптотически минимаксные оценки второго порядка.

Заметим, что результаты об асимптотически минимаксных (при $n \rightarrow \infty$) оценках первого порядка в задаче Вискела были получены сравнительно недавно [3], хотя оптимальные скорости сходимости хорошо известны [6], [4], [2].

Цель настоящей работы — это построение асимптотически минимаксных оценок второго порядка в модели с белым гауссовским шумом. Перенесение результатов на задачу Вискела — дело хотя и не совсем тривиальное, но в основном техническое. Минимаксная теория второго порядка является в рассматриваемой задаче, по существу, довольно естественной. Дело в том, что существует очень много оценок, являющихся асимптотически минимаксными оценками первого порядка, и сказать, какая оценка является наилучшей в рамках теории первого порядка, невозможно. С другой стороны, асимптотически минимаксная оценка второго порядка уже является в некотором смысле единственной.

2. Постановка задачи и основные результаты

Далее будем рассматривать несколько более общую постановку задачи, чем модель (1.2)–(1.3). Предположим, что наблюдаются действительные случайные величины

$$X_k = \theta_k + \varepsilon \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

где ξ_k — гауссовские независимые случайные величины с параметрами $(0, 1)$. Предполагается также, что неизвестный вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)^T$ принадлежит эллипсоиду

$$\Theta = \left\{ \theta: \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \theta_k^2 \leq 1 \right\}, \quad (2.2)$$

где величины a_k^2 считаются известными. С данной статистической моделью связаны две задачи.

Первая задача — поиск минимаксной оценки бесконечномерного вектора $v(\theta) = (\theta_1 s_1, \theta_2 s_2, \dots)^T$, где последовательность s_k такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k^2 k = 1. \quad (2.3)$$

Не оговаривая этого особо, считаем, что далее условие (2.3) выполнено. Обозначим через $\hat{v}(X) = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots)^T$ оценку вектора $v(\theta)$. Среднеквадратичный риск оценки $\hat{v}$ определяется обычным образом:

$$R^\varepsilon(\hat{v}, \Theta) = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon \|v(\theta) - \hat{v}(X)\|^2 = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(\theta) - \hat{v}_k|^2,$$

где $\mathbf{E}_\theta^\varepsilon$ — усреднение по мере, порожденной наблюдениями (2.1). Минимаксный риск в рассматриваемой задаче равен

$$r^\varepsilon(\Theta) = \inf_{\hat{v}} R^\varepsilon(\hat{v}, \Theta),$$

где $\inf$ берется по всем оценкам вектора $v(\theta)$. Мы покажем, что при некоторых условиях линейные оценки являются асимптотически минимаксными оценками второго порядка, т.е.

$$r^\varepsilon(\Theta) = \inf_{\hat{v} \in \mathcal{L}} R^\varepsilon(\hat{v}, \Theta) + o(\varepsilon^2); \quad (2.4)$$

здесь $\mathcal{L}$ — класс всех линейных оценок. Точнее, справедлив следующий результат.

Теорема 1. Пусть $|a_k| |s_k|$ не убывают и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln^3 \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (|s_k| - \mu |a_k|)_+^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (|s_k| - \mu |a_k|)_+ \right]^{-2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\max_m |a_m| (|s_m| - \mu |a_m|)_+ + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (|s_k| - \mu |a_k|)_+}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (|s_k| - \mu |a_k|)_+^2} < \infty, \quad (2.6)$$

где μ — корень уравнения

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{|s_k|}{\mu|a_k|} - 1 \right)_+ = 1. \quad (2.7)$$

Тогда линейная оценка

$$\tilde{v}_k = \left(1 - \frac{\mu|a_k|}{|s_k|} \right)_+ s_k X_k$$

является асимптотически минимаксной оценкой второго порядка и

$$r^\varepsilon(\Theta) = R^\varepsilon(\tilde{v}, \Theta) + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} |s_k| (|s_k| - \mu|a_k|)_+ + o(\varepsilon^2).$$

В частности, когда $a_k = (\pi k)^\beta / \sqrt{P}$, $\beta > \frac{1}{2}$, и $s_k = k^{-1/2}$, минимаксный риск имеет следующую асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$r^\varepsilon(\Theta) = \frac{\varepsilon^2}{2\beta + 1} \ln \frac{(2\beta + 1)P}{\pi^{2\beta} \varepsilon^2} + \varepsilon^2 \left(\gamma - \frac{2}{2\beta + 1} \right) + o(\varepsilon^2);$$

здесь и далее γ — постоянная Эйлера.

Вторая задача связана с оцениванием линейного функционала

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k s_k.$$

Пусть $\hat{L}(X)$ — некоторая оценка функционала L . Ее среднеквадратичный риск определяется как

$$R_0^\varepsilon(\hat{L}, \Theta) = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon [L(\theta) - \hat{L}(X)]^2. \quad (2.8)$$

При этом минимаксный риск соответственно имеет вид

$$r_0^\varepsilon(\Theta) = \inf_{\hat{L}} R_0^\varepsilon(\hat{L}, \Theta), \quad (2.9)$$

где $\inf$ берется по всем оценкам функционала $L(\theta)$.

Следующая теорема дает верхнюю и нижнюю границы минимаксного риска.

Теорема 2. Минимаксный риск удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 (1 + \pi^2 \varepsilon^2 a_k^2)^{-1} \leq r_0^\varepsilon(\Theta) \leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1}.$$

Мы видим, что между верхней и нижней границей имеется зазор. Несложно проверить, что на соболевском шаре он равен $(\varepsilon^2 \ln \pi)/\beta$. Наличие зазора связано с тем, что линейные оценки не являются минимаксными оценками второго порядка. К сожалению, явный вид минимаксной оценки в рассматриваемой задаче найти довольно трудно. Поэтому наш подход состоит в том, чтобы редуцировать исходную задачу к более простой статистической задаче. Такой задачей является оценивание функционала

$$L_\delta(f) = \int_\delta^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (2.10)$$

по наблюдениям в белом гауссовском шуме

$$dX(t) = f(t) dt + dw(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (2.11)$$

При этом априорная информация о $f(\cdot)$ имеет вид

$$f \in \mathcal{F} = \left\{ f \in L_2(0, \infty): \int_0^\infty t^{2\beta} f^2(t) dt \leq 1 \right\}. \quad (2.12)$$

Асимптотическое поведение минимаксного риска в исходной задаче с точностью до членов порядка $o(\varepsilon^2)$ описывается в терминах решения задачи об оценивании функционала $L_\delta(f)$ в задаче (2.11)–(2.12). Обозначим через

$$\rho = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\hat{L}_\delta} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E}_\theta [L_\delta(f) - \hat{L}_\delta]^2 + \ln \delta \right\}$$

предельный минимаксный риск в задаче оценивания $L_\delta(f)$. Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 3. Пусть $s_k = k^{-1/2}$ и $a_k^2 = (\pi k)^{2\beta} P^{-1} (1 + o(1))$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$r_0^\varepsilon(\Theta) = \frac{\varepsilon^2}{2\beta} \ln \frac{P}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2(\gamma + \rho - \ln \pi) + o(\varepsilon^2). \quad (2.13)$$

3. Оценивание производной на отрезке

3.1. Верхняя граница. Доказательство теоремы 1 начнем с тривиальной верхней границы для минимаксного риска

$$r^\varepsilon(\Theta) \leq \inf_{\hat{v} \in \mathcal{L}} R^\varepsilon(\hat{v}, \Theta).$$

Напомним, что здесь $\mathcal{L}$ — класс линейных оценок. Для того чтобы найти минимаксный риск в классе линейных оценок, воспользуемся хорошо известной теоремой о седловой точке [14]. В данном случае справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Оценка

$$v_k^* = \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+ s_k X_k,$$

где μ — корень уравнения (2.7), является минимаксной в классе линейных оценок. При этом

$$\inf_{\hat{v} \in \mathcal{L}} R^\varepsilon(\hat{v}, \Theta) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+. \quad (3.1)$$

Доказательство. Среднеквадратичная ошибка линейной оценки $\hat{v}_k = h_k s_k X_k$

$$\mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} |v_k - \hat{v}_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 (1 - h_k)^2 \theta_k^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 s_k^2 = F^\varepsilon(h, \theta)$$

представляет собой функционал, выпуклый по h и линейный по θ_k^2 . Следовательно, он имеет седловую точку на множестве $l_2(1, \infty) \times \Theta$. Простые арифметические выкладки (см., например, [14]), которые мы опустим, показывают, что компоненты седловой точки вычисляются следующим образом:

$$h_k^* = \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+, \quad \theta_k^{*2} = \frac{\varepsilon^2 h_k^*}{1 - h_k^*} = \varepsilon^2 \left(\frac{|s_k|}{\mu |a_k|} - 1\right)_+; \quad (3.2)$$

здесь μ , естественно, корень уравнения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \theta_k^{*2} = 1$. Поэтому, замечая, что

$$\inf_{\hat{v} \in \mathcal{L}} R^\varepsilon(\hat{v}, \Theta) = \inf_h \sup_{\theta \in \Theta} F^\varepsilon(h, \theta) = F^\varepsilon(h^*, \theta^*) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 h_k^*,$$

мы завершаем доказательство леммы.

3.2. Нижняя граница. Теперь установим нижнюю границу минимаксного риска. При этом мы будем следовать [14]. Выберем априорное распределение параметров θ_k так, чтобы дисперсия θ_k была близка к седловой точке (3.2) и чтобы вектор θ лежал вблизи поверхности эллипсоида (2.2). Точнее, предположим, что θ_k имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma_k^2)$, где

$$\sigma_k^2 = (1 - \delta) \varepsilon^2 \left(\frac{|s_k|}{\mu |a_k|} - 1\right)_+, \quad 0 < \delta < 1, \quad (3.3)$$

а μ — корень уравнения (2.7). Заметим, что при $\delta = 0$ дисперсия θ_k совпадает с седловой точкой (3.2), которая определяет минимаксную линейную оценку. Прежде всего, покажем, что при малых $\delta > 0$ вероятность того, что вектор θ не принадлежит эллипсоиду, стремится к 0 квалифицированным образом при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 2. Пусть $|a_k s_k|$ не убывают и выполнено условие (2.6). Тогда для любого $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\mathbf{P}\{\theta \notin \Theta\} \leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{4w_\varepsilon}\right), \quad \text{где } w_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4. \quad (3.4)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\theta \notin \Theta\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \theta_k^2 > 1\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\theta_k^2 - \sigma_k^2) > \delta\right\}.$$

Согласно неравенству Чебышева, имеем, что при всех λ таких, что $2\lambda \sup_k a_k^2 \sigma_k^2 < 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\theta \notin \Theta\} &\leq e^{-\lambda\delta} \mathbf{E} \exp\left[\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\theta_k^2 - \sigma_k^2)\right] \\ &= e^{-\lambda\delta} \exp\left[-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sigma_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - 2\lambda a_k^2 \sigma_k^2)\right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выберем $\lambda = \delta / (2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4)$ и проверим, что $1 - 2\lambda a_k^2 \sigma_k^2 > 0$ при достаточно малых δ . Для этого достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$\sup_k a_k^2 \sigma_k^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4\right)^{-1} < \infty. \quad (3.6)$$

Из (3.3) и (2.7) получаем, что

$$\frac{\max_k a_k^2 \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4} = \frac{\max_m |a_m| (|s_m| - \mu |a_m|)_+ \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (|s_k| - \mu |a_k|)_+}{(1 - \delta) \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 (|s_k| - \mu |a_k|)_+^2}.$$

В силу условия (2.6) правая часть в этом равенстве ограничена, и поэтому выполнено (3.6). Тогда из (3.5) и разложения Тейлора получаем

$$\mathbf{P}\{\theta \notin \Theta\} \leq e^{-\lambda\delta} \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4\right) = \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4}\right\},$$

тем самым доказывая лемму.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (2.5) и (2.6), тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$r^\varepsilon(\Theta) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+ + o(\varepsilon^2), \quad (3.7)$$

где μ — корень уравнения (2.7).

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}_k$ — оценка параметра θ_k . Тогда, согласно неравенству треугольника, минимаксный риск оценивается снизу следующим образом:

$$r^\varepsilon(\Theta) = \inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 \geq \inf_{\hat{\theta} \in \Theta} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2. \quad (3.8)$$

Так как

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 \geq \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \mathbf{1}\{\theta \in \Theta\} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2,$$

то неравенство (3.8) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} r^\varepsilon(\Theta) &\geq \inf_{\hat{\theta} \in \Theta} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \mathbf{1}\{\theta \in \Theta\} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 \geq \inf_{\hat{\theta} \in \Theta} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 \\ &\quad - \sup_{\hat{\theta} \in \Theta} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \mathbf{1}\{\theta \notin \Theta\} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как θ_k — независимые $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$ с σ_k^2 из (3.3), то $\theta_k = \sqrt{1-\delta} \theta_k^* \xi_k$, где ξ_k — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$, а θ_k^* — седловая точка (см. (3.2)). Отсюда, воспользовавшись леммой 1, мы получаем

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{\theta} \in \Theta} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 &\geq \inf_{\hat{\theta}} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\sqrt{1-\delta} \theta_k^* \xi_k - \hat{\theta}_k)^2 \\ &\geq (1-\delta) \inf_{\hat{\theta}} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k^* \xi_k - \hat{\theta}_k)^2 \\ &= (1-\delta) \inf_{h_k} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k^* \xi_k - h_k X_k)^2 \\ &= (1-\delta) \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+ . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Чтобы оценить снизу последнее слагаемое в правой части (3.9), заметим, что поскольку θ_k — гауссовские случайные величины, мы имеем

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \theta_k^2 \right)^2 = 3 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^4 \sigma_k^4 + 2 \sum_{k \neq l} s_k^2 s_l^2 \sigma_k^2 \sigma_l^2 \leq 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \sigma_k^2 \right)^2 \leq C.$$

Из этого неравенства и из неравенства Коши–Буняковского находим

$$\begin{aligned} \sup_{\hat{\theta} \in \Theta} \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \mathbf{1}\{\theta \notin \Theta\} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 \\ \leq [\mathbf{P}\{\theta \notin \Theta\}]^{1/2} \sup_{\hat{\theta} \in \Theta} \left\{ \mathbf{E} \mathbf{E}_\theta \left[\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(\theta_k - \hat{\theta}_k)^2 \right]^2 \right\}^{1/2} \leq C [\mathbf{P}\{\theta \notin \Theta\}]^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому отсюда, из (3.9), (3.10) и леммы 2 вытекает, что для некоторой постоянной C

$$r^\varepsilon(\Theta) \geq (1 - \delta) \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \left(1 - \mu \sqrt{k} |a_k|\right)_+ - C \exp\left(-\frac{\delta^2}{C w_\varepsilon}\right). \quad (3.11)$$

«Поднимем» нижнюю границу, максимизируя правую часть этого неравенства по δ . Обозначим для краткости

$$\rho^\varepsilon = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \left(1 - \mu \sqrt{k} |a_k|\right)_+,$$

тогда, выбрав $\delta = \sqrt{-C_0 w_\varepsilon \ln(\rho^\varepsilon w_\varepsilon)}$, где C_0 — достаточно большое число, несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \min_{\delta} \left\{ \delta \rho^\varepsilon + C \exp\left(-\frac{\delta^2}{C w_\varepsilon}\right) \right\} &\leq \rho^\varepsilon \sqrt{w_\varepsilon} \ln^{1/2} \frac{1}{\rho^\varepsilon w_\varepsilon} \\ &\leq C \rho^\varepsilon \sqrt{w_\varepsilon} \ln^{1/2} \frac{1}{\rho^\varepsilon \sqrt{w_\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С другой стороны, согласно (2.7), находим

$$\begin{aligned} w_\varepsilon &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 \sigma_k^4 = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 s_k^2 \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 s_k^2 \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |s_k| \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|}\right)_+ \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Чтобы продолжить неравенство (3.12), определим целое число

$$N = \min \left\{ k: 1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|} < 0 \right\}. \quad (3.14)$$

Очевидно, что $\rho^\varepsilon \leq \varepsilon^2 \ln N$, и из уравнения (2.7) получаем, что $N < \varepsilon^{-2}$. Поэтому $\rho^\varepsilon \leq \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-2}$. Отсюда, из (3.11), (3.12) и (2.5) получаем требуемое неравенство (3.7).

Доказательство теоремы 1 вытекает непосредственно из лемм 1 и 3.

3.3. Асимптотика на соболевском классе. В этом пункте мы более детально рассмотрим асимптотику минимаксного риска на соболевском классе, считая, что $a_k = (\pi k)^\beta / \sqrt{P}$, где $\beta > \frac{1}{2}$, а $s_k = k^{-1/2}$.

Пусть величина N определена в (3.14). Тогда N и μ связаны простым соотношением $\mu = (1 + o(1)) |s_N| / |a_N|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому уравнение (2.7) для N принимает вид

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^N a_k^2 \left(\frac{|s_k a_N|}{|a_k s_N|} - 1 \right) = 1.$$

Отсюда мы получаем следующее уравнение для N :

$$\sum_{k=1}^N k^{2\beta} \left[\left(\frac{N}{k} \right)^{\beta+1/2} - 1 \right] = \frac{P}{\pi^{2\beta} \varepsilon^2}.$$

С помощью простой арифметики нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$N = (1 + o(1)) \left[\frac{P(2\beta + 1)}{\pi^{2\beta} \varepsilon^2} \right]^{1/(2\beta+1)}. \quad (3.15)$$

Теперь условия (2.5) и (2.6) легко проверяются, если заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k s_k| \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|} \right)_+ &\asymp \sum_{k=1}^N k^{\beta-1/2} \left[1 - \left(\frac{k}{N} \right)^{\beta+1/2} \right] \asymp N^{\beta+6/2}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 s_k^2 \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|} \right)_+^2 &\asymp \sum_{k=1}^N k^{2\beta-1} \left[1 - \left(\frac{k}{N} \right)^{\beta+1/2} \right]^2 \asymp N^{2\beta}, \\ \max_k |a_k s_k| \left(1 - \mu \frac{|a_k|}{|s_k|} \right)_+ &\asymp \max_k k^{\beta-1/2} \left[1 - \left(\frac{k}{N} \right)^{\beta+1/2} \right] \asymp N^{\beta-1/2}. \end{aligned}$$

Изучим асимптотическое поведение минимаксного риска при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для любого числа $\delta \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} r^\varepsilon(\Theta) &= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N s_k^2 \left(1 - \mu \frac{\pi^\beta k^\beta}{|s_k| \sqrt{P}} \right) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N s_k^2 \left[1 - \left(\frac{k}{N} \right)^{\beta+1/2} \right] + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\delta N} s_k^2 \left[1 - \left(\frac{k}{N} \right)^{\beta+1/2} \right] + \varepsilon^2 \sum_{k=\delta N+1}^N s_k^2 \left[1 - \left(\frac{k}{N} \right)^{\beta+1/2} \right] + o(\varepsilon^2) \\ &\equiv \varepsilon^2 [r_1(\varepsilon, \delta) + r_2(\varepsilon, \delta)] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Оценим $r_1(\varepsilon, \delta)$. Поскольку $k \leq \delta N$, то $1 - (k/N)^{\beta+1/2} = 1 + O(\delta^{\beta+1/2})$ при $\delta \rightarrow 0$. Следовательно,

$$r_1(\varepsilon, \delta) = \ln N + \gamma + \ln \delta + O(\delta^{\beta+1/2} \ln N) + o(1). \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь $r_2(\varepsilon, \delta)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} r_2(\varepsilon, \delta) &= \int_{\delta}^1 x^{-1} (1 - x^{\beta+1/2}) dx + O(N^{-1} \delta^{-1}) \\ &= -\ln \delta - \frac{2}{2\beta+1} (1 - \delta^{\beta+1/2}) + O(N^{-1} \delta^{-1}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Выберем $\delta = (\ln N)^{-1-q}$, где $q > 0$. Тогда из (3.16) и (3.17) находим, что

$$r_1(\varepsilon, \delta) + r_2(\varepsilon, \delta) = \ln N + \gamma - \frac{2}{2\beta+1} + o(1).$$

Поэтому, учитывая (3.15), получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо следующее разложение для минимаксного риска:

$$r^\varepsilon(\Theta) = \frac{\varepsilon^2}{2\beta + 1} \ln \frac{P(2\beta + 1)}{\varepsilon^2 \pi^{2\beta}} + \varepsilon^2 \left(\gamma - \frac{2}{2\beta + 1} \right) + o(\varepsilon^2).$$

4. Оценивание производной в точке

4.1. Верхняя граница. Верхнюю границу для минимаксного риска $r_0^\varepsilon(\Theta)$ в задаче оценивания линейного функционала $L(\theta) = \sum_{k=1}^\infty s_k \theta_k$ будем искать в классе линейных оценок $\mathcal{L}$.

Лемма 4. Минимаксный риск оценивания функционала $L(\theta)$ в классе линейных оценок равен

$$\inf_{\hat{L} \in \mathcal{L}} R_0^\varepsilon(\hat{L}, \Theta) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^\infty s_k^2 (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1}. \quad (4.1)$$

При этом оценка

$$\hat{L}_h(X) = \sum_{k=1}^\infty (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1} s_k X_k$$

является минимаксной линейной оценкой.

Доказательство. Рассмотрим $\hat{L}_h(X) = \sum_{k=1}^\infty h_k s_k X_k$. Легко видеть, что

$$R_0^\varepsilon(\hat{L}_h, \Theta) = \sup_{\theta \in \Theta} \left[\sum_{k=1}^\infty \theta_k (1 - h_k) s_k \right]^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^\infty h_k^2 s_k^2.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получаем, что

$$\begin{aligned} R_0^\varepsilon(\hat{L}_h, \Theta) &= \sum_{k=1}^\infty a_k^2 \theta_k^2 \sum_{k=1}^\infty a_k^{-2} (1 - h_k)^2 s_k^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^\infty h_k^2 s_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^\infty a_k^{-2} s_k^2 (1 - h_k)^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^\infty h_k^2 s_k^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что минимум по h_k правой части достигается при $\hat{h}_k = (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1}$. Отсюда вытекает (4.1).

4.2. Нижняя граница. Найдем теперь нижнюю границу для минимаксного риска $r_0^\varepsilon(\Theta)$. При этом мы используем стандартный подход [13]. Будем считать, что $\theta_k = \theta b_k$, где θ — некоторая случайная величина, b_k — некоторая фиксированная последовательность. Тогда по наблюдениям $X_k = \theta b_k + \varepsilon \xi_k$ нужно оценить параметр

$$L(\theta) = \theta \sum_{k=1}^\infty b_k s_k. \quad (4.2)$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{\infty} b_k X_k$ — достаточная статистика, и поэтому можно оценивать параметр θ всего лишь по одному наблюдению

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k X_k = \theta \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi_k.$$

Отсюда получаем эквивалентную задачу оценки параметра $L(\theta)$ (см. (4.2)) по наблюдению

$$Y' = \theta + \varepsilon^2 \xi \|b\|^{-1}, \quad (4.3)$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\|\cdot\|$ — норма в $l_2(1, \infty)$. При этом условие (2.2) влечет следующее ограничение на θ :

$$\theta^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 b_k^2 \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Лемма 5. *Нижняя граница для минимаксного риска в задаче оценивания функционала $L(\theta)$ имеет вид*

$$r_0^\varepsilon(\Theta) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \left(1 + \varepsilon^2 \pi^2 a_k^2 \right)^{-1}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Обозначим $A = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 b_k^2)^{-1/2}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} r_0^\varepsilon(\Theta) &\geq \inf_{\hat{L}} \sup_{|\theta| \leq A} \mathbf{E}_\theta \left[\theta \sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k - \hat{L}(Y') \right]^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k \right)^2 \inf_{\hat{\theta}} \sup_{|\theta| \leq A} \mathbf{E}_\theta (\theta - \hat{\theta})^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть ν — некоторая априорная плотность распределения параметра θ такая, что носитель ν принадлежит $[-A, A]$, тогда

$$\sup_{|\theta| \leq A} \mathbf{E}_\theta (\theta - \hat{\theta})^2 \geq \int \mathbf{E}_\theta (\theta - \hat{\theta})^2 \nu(\theta) d\theta. \quad (4.7)$$

Далее, из неравенства Ван Триса [11] получаем

$$\int \mathbf{E}_\theta (\theta - \hat{\theta})^2 \nu(\theta) d\theta \geq [\mathbf{E}I(p_\theta) + I(\nu)]^{-1}, \quad (4.8)$$

где фишеровские информации в правой части этого неравенства соответственно равны

$$I(p_\theta) = \int \frac{p_\theta'^2(x)}{p_\theta(x)} dx, \quad I(\nu) = \int_{-A}^A \frac{\nu'^2(x)}{\nu(x)} dx;$$

здесь $p_\theta(\cdot)$ — плотность распределения наблюдений из (4.3). Минимизируя фишеровскую информацию $I(\nu)$ по априорной плотности ν , нетрудно видеть, что $\inf_\nu I(\nu) = I(\nu^*) = \pi^2 A^2$, где $\nu^*(x) = A^{-1} \cos^2[\pi x/(2A)]$. Так как $\mathbf{E}I(p_\theta) = \|b\|^2/\varepsilon^2$, то из (4.6)–(4.8), получаем, что

$$r_0^\varepsilon(\Theta) \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k \right)^2 \left(\|b\|^2 \varepsilon^{-2} + \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 b_k^2 \right)^{-1}.$$

«Поднимем» эту нижнюю границу, максимизировав правую часть неравенства по b_k . Легко видеть, что максимум достигается при $b_k^* = s_k(\varepsilon^{-2} + \pi^2 a_k^2)^{-1}$. Отсюда получаем (4.5).

Доказательство теоремы 2 очевидным образом следует из лемм 4 и 5.

4.3. Асимптотика на соболевском классе. Исследуем поведение полученных границ для минимаксного риска при $\varepsilon \rightarrow 0$, когда $a_k = (\pi k)^\beta / \sqrt{P}$ и $s_k = k^{-1/2}$. Пусть $N = \max\{k: |a_k| < 1/\varepsilon\}$, тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1} &= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\delta N} k^{-1} (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1} + \varepsilon^2 \sum_{k=\delta N+1}^{\infty} k^{-1} (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1} \\ &\equiv \varepsilon^2 [S_1(\varepsilon, \delta) + S_2(\varepsilon, \delta)], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\delta \in (0, 1)$ — некоторое число, зависящее от ε , которое выберем позднее. Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$S_1(\varepsilon, \delta) = \sum_{k=1}^{\delta N} k^{-1} + O(\delta^{2\beta}) = \ln N + \ln \delta + \gamma + O(\delta^{2\beta}). \quad (4.10)$$

Учитывая, что $N = (1 + o(1)) \pi^{-1} (P/\varepsilon^2)^{1/(2\beta)}$, получаем

$$\begin{aligned} S_2(\varepsilon, \delta) &= \sum_{k=\delta N+1}^{\infty} k^{-1} \left[1 + \frac{\varepsilon^2 (\pi k)^{2\beta}}{P} \right]^{-1} \\ &= \int_{\delta}^{\infty} x^{-1} (1 + x^{2\beta})^{-1} dx + O(N^{-1} \delta^{-1}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

С другой стороны, легко показать, что

$$\int_{\delta}^{\infty} x^{-1} (1 + x^{2\beta})^{-1} dx = -\ln \delta + (2\beta)^{-1} \ln(1 + \delta^{2\beta}).$$

Поэтому, выбрав, например, $\delta = \ln^{-1} \varepsilon^{-2}$, находим из (4.9)–(4.11) асимптотику верхней границы

$$r_0^\varepsilon(\Theta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 (1 + \varepsilon^2 a_k^2)^{-1} = \frac{\varepsilon^2}{2\beta} \ln \frac{P}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 (\gamma - \ln \pi) + o(\varepsilon^2). \quad (4.12)$$

Очевидно, что для нижней границы (4.5) асимптотика будет иметь аналогичное разложение, только P в (4.12) надо заменить на P/π^2 . То есть при $\varepsilon \rightarrow 0$ нижняя граница ведет себя следующим образом:

$$r_0^\varepsilon(\Theta) \geq \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 (1 + \varepsilon^2 \pi^2 a_k^2)^{-1} = \frac{\varepsilon^2}{2\beta} \ln \frac{P}{\pi^2 \varepsilon^2} + \varepsilon^2 (\gamma - \ln \pi) + o(\varepsilon^2).$$

Таким образом, между верхней и нижней границами имеется зазор, равный $\varepsilon^2 \beta^{-1} \ln \pi$, который уменьшается с ростом гладкости β .

4.4. Нелинейное оценивание. В этом пункте мы вычислим минимаксный риск $r_0^\varepsilon(\Theta)$ в терминах задачи (2.10)–(2.12). При этом считаем, что $a_k^2 = (\pi k)^{2\beta}/P$ и $s_k = k^{-1/2}$.

Пусть, как и ранее, $N = \max\{k: |a_k| < 1/\varepsilon\}$ и

$$R_\delta = \inf_{\widehat{L}_\delta} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E}_\theta [L_\delta(f) - \widehat{L}_\delta]^2 + \ln \delta$$

— нормированный минимаксный риск.

Лемма 6. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо неравенство

$$r_\varepsilon^2(\Theta) \geq \frac{\varepsilon^2}{2\beta} \ln \frac{P}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \gamma + \varepsilon^2 \lim_{\delta \rightarrow 0} R_\delta + o(\varepsilon^2).$$

Доказательство. Разобьем множество индексов $\{1, 2, \dots\}$ на два подмножества: $K_1 = \{1, \dots, \delta N\}$ и $K_2 = \{\delta N + 1, \dots\}$, где δ — достаточно малое число. Тогда представим оцениваемый функционал в виде $L(\theta) = L_1(\theta) + L_2(\theta)$, где

$$L_1(\theta) = \sum_{k \in K_1} s_k \theta_k, \quad L_2(\theta) = \sum_{k \in K_2} s_k \theta_k.$$

Далее, для некоторого числа $\alpha \in (0, 1)$ определим два множества

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \left\{ \theta_k, k \in K_1: \sum_{k \in K_1} a_k^2 \theta_k^2 \leq \alpha \right\}, \\ \Theta_2 &= \left\{ \theta_k, k \in K_2: \sum_{k \in K_2} a_k^2 \theta_k^2 \leq 1 - \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Обозначим для краткости $\mathbf{X}_1 = (X_1, \dots, X_{\delta N})^T$ и $\mathbf{X}_2 = (X_{\delta N+1}, \dots)^T$. Пусть $\pi_1(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, и $\pi_2(\theta)$, $\theta \in \Theta_2$, — априорные плотности распределения на множествах Θ_1 и Θ_2 , а $p_1(\mathbf{X}_1|\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, и $p_2(\mathbf{X}_2|\theta)$, $\theta \in \Theta_2$, — плотности распределения векторов $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$.

Тогда

$$\inf_{\widehat{L}} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta [L_1(\theta) + L_2(\theta) - \widehat{L}]^2 \geq \inf_{\widehat{L}} \mathbf{E} \mathbf{E}_{\theta_1, \theta_2} [L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2) - \widehat{L}]^2; \quad (4.14)$$

здесь $\mathbf{E}$ — усреднение по мере, имеющей плотность $\pi_1(\theta_1)\pi_2(\theta_2)$. Заметим, что нижняя грань правой части достигается в том случае, если оценка $\hat{L}$ байесовская, а именно

$$\hat{L}(X) = \frac{\int_{\Theta_1} \int_{\Theta_2} [L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)] p_1(\mathbf{X}_1 | \theta_1) p_2(\mathbf{X}_2 | \theta_2) \pi_1(\theta_1) \pi_2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2}{\int_{\Theta_1} \int_{\Theta_2} p_1(\mathbf{X}_1 | \theta_1) p_2(\mathbf{X}_2 | \theta_2) \pi_1(\theta_1) \pi_2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2}.$$

Отсюда ясно, что $\hat{L}(X) = \hat{L}_1(\mathbf{X}_1) + \hat{L}_2(\mathbf{X}_2)$, где $\hat{L}_1(\cdot)$ и $\hat{L}_2(\cdot)$ — байесовские оценки векторов θ_1 и θ_2 соответственно. Так как эти оценки являются несмещенными, находим

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{L}} \mathbf{E} \mathbf{E}_{\theta_1, \theta_2} [L_1(\mathbf{X}_1) - L_2(\mathbf{X}_2) - \hat{L}]^2 \\ = \mathbf{E} \mathbf{E}_{\theta_1} [L_1(\theta_1) - \hat{L}_1(\mathbf{X}_1)]^2 + \mathbf{E} \mathbf{E}_{\theta_2} [L_2(\theta_2) - \hat{L}_2(\mathbf{X}_2)]^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Вспомним, что плотности π_1 и π_2 были выбраны произвольно, поэтому

$$\sup_{\pi_i} \mathbf{E} \mathbf{E}_{\theta_i} [L_i(\theta_i) - \hat{L}_i(\mathbf{X}_i)]^2 = \sup_{\theta_i \in \Theta_i} \mathbf{E}_{\theta_i} [L_i(\theta_i) - \hat{L}_i(\mathbf{X})]^2, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, из (4.14) и (4.15) получаем неравенство

$$r_0^\varepsilon(\Theta) \geq r_0^\varepsilon(\Theta_1) + r_0^\varepsilon(\Theta_2). \quad (4.16)$$

Поэтому наша задача распадается на две независимые задачи оценки функционалов $L_1(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, и $L_2(\theta)$, $\theta \in \Theta_2$.

Чтобы оценить снизу $r_0^\varepsilon(\Theta_1)$, поступим так же, как при доказательстве леммы 5. Положим $\theta_k = b_k \zeta$ при $k \in K_1$, где ζ — некоторая случайная величина. Условие $\theta \in \Theta_1$ влечет следующее ограничение на ζ : $\zeta^2 \sum_{k=1}^{\delta N} a_k^2 b_k^2 \leq \alpha$. Поэтому нетрудно показать (см. доказательство леммы 5), что

$$r_0^\varepsilon(\Theta_1) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\delta N} k^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \pi^2 a_k^2}{\alpha} \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

Заметим, далее, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\delta N} k^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \pi^2 a_k^2}{\alpha} \right)^{-1} &\geq \sum_{k=1}^{\delta N} k^{-1} \left(1 - \frac{\pi^2 a_k^2 \varepsilon^2}{\alpha} \right) \\ &= \ln \delta N + \gamma + o(1) - \frac{\varepsilon^2 \pi^2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\delta N} \frac{a_k^2}{k} = \ln \delta N + \gamma + o(1) - \alpha^{-1} O(\delta^{2\beta}). \end{aligned}$$

Выбрав $\delta^{2\beta}/\alpha = o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, отсюда и из (4.17) получаем следующее неравенство:

$$r_0^\varepsilon(\Theta_1) \geq \varepsilon^2 [\ln N + \ln \delta + \gamma + o(1)]. \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (4.16). Заметим, что вместо оценивания функционала $L_2(\theta)$ мы можем оценивать функционал $L_\delta^A(\theta) = \sum_{k=\delta N}^{AN} \theta_k / \sqrt{k}$, так как

$$r_0^\varepsilon(\Theta_2) \geq \inf_{\widehat{L}} \sup_{\theta \in \Theta_2} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon [L_\delta^A(\theta) - \widehat{L}]^2. \quad (4.19)$$

Рассмотрим новую функцию потерь

$$w_B(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < B, \\ B^2, & |x| \geq B, \end{cases}$$

где B — некоторое положительное число. Так как $x^2 \geq w_B(x)$, то из (4.19) находим

$$r_0^\varepsilon(\Theta_2) \geq \varepsilon^2 \inf_{\widehat{L}} \sup_{\theta \in \Theta_2} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon w_B[\varepsilon^{-1}(L_\delta^A(\theta) - \widehat{L})]. \quad (4.20)$$

Пусть $\mathcal{F}_\alpha(A, Q)$ — множество всех функций f таких, что $f(x) = 0$ при $x \notin [0, A]$, $\sup_x f'(x) \leq Q$ и

$$\int_0^A x^{2\beta} f(x) dx \leq 1 - 2\alpha. \quad (4.21)$$

Положим

$$\theta_k = \frac{P^{1/2}}{N^{\beta+1/2} \pi^\beta} f\left(\frac{k}{N}\right). \quad (4.22)$$

Поскольку производная $f'(t)$ ограничена на отрезке $[0, A]$, то

$$\sum_{\delta N}^{AN} a_k^2 \theta_k^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{AN} \left(\frac{k}{N}\right)^{2\beta} f^2\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^A t^{2\beta} f^2(t) dt + O\left(\frac{Q}{N}\right).$$

Таким образом, $\theta \in \Theta_2$. По тем же соображениям оцениваемый функционал аппроксимируется следующим образом:

$$L_\delta^A(\theta) = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{k=\delta N}^{AN} \frac{f(k/N)}{\sqrt{k/N}} = \varepsilon \int_\delta^A \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt + o(\varepsilon). \quad (4.23)$$

Далее, заметим, что наблюдения, переписанные в терминах $f(\cdot)$, имеют вид

$$X_k = \frac{P^{1/2}}{N^{\beta+1/2} \pi^\beta} f\left(\frac{k}{N}\right) + \varepsilon \xi_k.$$

Отсюда, замечая, что $\sqrt{P}/(N^\beta \pi^\beta) = (1 + o(1)) \varepsilon$, непосредственно приходим к следующим эквивалентным наблюдениям:

$$Y_k = f\left(\frac{k}{N}\right) + (1 + o(1)) \sqrt{N} \xi_k. \quad (4.24)$$

Перейдем от этих наблюдений к эквивалентным наблюдениям с непрерывным временем. Обозначим через $\bar{f}(t)$ ступенчатую функцию такую,

что $\bar{f}(t) = f(k/N)$ при $|t - k/N| \leq 1/(2N)$. Тогда легко видеть, что наблюдения (4.24) эквивалентны следующим:

$$d\bar{Y}(t) = \bar{f}(t) dt + dw(t), \quad t \in [0, A], \quad (4.25)$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Заметим, что $\|\bar{f} - f\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что статистическая задача оценивания линейного функционала

$$L_\delta^A(f) = \int_\delta^A \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt$$

по наблюдениям (4.25) асимптотически эквивалентна (см., например, [1]) задаче оценивания этого же функционала по наблюдениям

$$dY(t) = f(t) dt + dw(t), \quad t \in [0, A]. \quad (4.26)$$

В свою очередь это значит, что

$$\begin{aligned} & \inf_{\widehat{L}} \sup_{f \in \mathcal{F}_\alpha(A, Q)} \mathbf{E}_f w_B \{L_\delta^A(f) - \widehat{L}(\bar{Y})\} \\ & \geq \inf_{\widehat{L}} \sup_{f \in \mathcal{F}_\alpha(A, Q)} \mathbf{E}_f w_B \{L_\delta^A(f) - \widehat{L}(Y)\} + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда, из (4.23) и (4.20) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} r_0^\varepsilon(\Theta_2) \geq \inf_{\widehat{L}} \sup_{f \in \mathcal{F}_\alpha(A, Q)} \mathbf{E}_f w_B [L_\delta^A(f) - \widehat{L}].$$

Предельный переход при $B \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$ (см. также (4.16) и (4.18)) завершает доказательство леммы.

Теперь мы покажем, что полученная граница снизу не может быть улучшена.

Лемма 7. При $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено неравенство

$$r_0^\varepsilon(\Theta) \leq \varepsilon^2 \ln N + \varepsilon^2 \gamma + \varepsilon^2 \lim_{\delta \rightarrow 0} R_\delta + o(\varepsilon^2).$$

Доказательство. Опять разобьем наблюдения на две части, как при доказательстве нижней границы. При этом оцениваемый функционал $L(\theta)$ распадается на сумму двух функционалов $L_1(\theta)$ и $L_2(\theta)$. В качестве оценки функционала $L_1(\theta) = \sum_{k=1}^{\delta N} \theta_k / \sqrt{k}$ возьмем проекционную оценку $\widehat{L}_1(X) = \sum_{k=1}^{\delta N} X_k / \sqrt{k}$. Легко видеть, что тогда риск оценивается сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} r_0^\varepsilon(\Theta) & \leq \inf_{\widehat{L}_2} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon \left[L_1(\theta) + L_2(\theta) - \widehat{L}_1(X) - \widehat{L}_2(X) \right]^2 \\ & = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\delta N} k^{-1} + \inf_{\widehat{L}_2} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon \left[L_2(\theta) - \widehat{L}_2(X) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Отсюда ясно, что нужно оценить сверху последнее слагаемое. Для этого сведем задачу с непрерывным временем (2.10)–(2.12) к исходной дискретной задаче. Точнее, мы докажем, что

$$\begin{aligned} & \inf_{\widehat{L}_2} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta^\varepsilon \left[L_2(\theta) - \widehat{L}_2(X) \right]^2 + \varepsilon^2 \ln \delta \\ & \leq \varepsilon^2 \inf_{\widehat{L}_\delta} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E}_f \left[\widehat{L}_\delta(X) - L_\delta(f) \right]^2 + \varepsilon^2 \ln \delta + o(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (4.28)$$

здесь функционал $L_\delta(f)$ определен в (2.10). Пусть $\overline{\mathcal{F}}$ — множество всех ступенчатых функций из $\mathcal{F}$ вида

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=\delta N}^{\infty} f\left(\frac{k}{N}\right) \mathbf{1}\left\{\frac{k}{N} \leq x < \frac{k+1}{N}\right\}.$$

Тогда очевидно, что для любой оценки $\widehat{L}_\delta(X)$ справедливо неравенство

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E}_f \left[L_\delta(f) - \widehat{L}_\delta(X) \right]^2 \geq \sup_{f \in \overline{\mathcal{F}}} \mathbf{E}_f \left[L_\delta(f) - \widehat{L}_\delta(X) \right]^2. \quad (4.29)$$

В то же время наблюдения (2.11) эквивалентны следующим:

$$X_k^\varepsilon = f\left(\frac{k}{N}\right) + \sqrt{N} \xi_k. \quad (4.30)$$

Пусть θ_k определены в (4.22). Тогда наблюдения (4.30) эквивалентны

$$Z_k^\varepsilon = \theta_k + (1 + o(1)) \varepsilon \xi_k. \quad (4.31)$$

Оцениваемый функционал в терминах θ_k принимает вид

$$\begin{aligned} L_\delta(\bar{f}) &= \int_\delta^\infty \frac{\bar{f}(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{\pi^\beta N^{\beta+1/2}}{\sqrt{P}} \sum_{k=\delta N}^\infty \theta_k \int_{k/N}^{(k+1)/N} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\varepsilon} \sum_{k=\delta N}^\infty \frac{\theta_k}{\sqrt{k}} - \frac{1 + o(1)}{\varepsilon} \sum_{k=\delta N}^\infty \theta_k \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ограничения на $\bar{f}$ пересчитываются в ограничения на θ_k следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_0^\infty t^{2\beta} \bar{f}^2(t) dt = \frac{\pi^{2\beta}}{P(2\beta+1)} \sum_{k=\delta N}^\infty \theta_k^2 \left[(k+1)^{2\beta+1} - k^{2\beta+1} \right] \\ &\geq \frac{\pi^{2\beta}}{P} \sum_{k=\delta N}^\infty \theta_k k^{2\beta}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{k=\delta N}^\infty a_k^2 \theta_k^2 \leq 1. \quad (4.33)$$

Поэтому, отсюда и из (4.32), применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left[\varepsilon L_{\delta}(\bar{f}) - \sum_{k=\delta N}^{\infty} \frac{\theta_k}{\sqrt{k}} \right]^2 \leq O((\delta N)^{-2\beta-2}) + o((\delta N)^{-2\beta}).$$

Таким образом, из этого неравенства, воспользовавшись (4.33), (4.31) и (4.29), получаем (4.28). Утверждение леммы теперь непосредственно вытекает из (4.27).

Доказательство теоремы 3 следует непосредственно из лемм 6 и 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown L. D., Low M. G. Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise. — Ann. Statist., 1996, v. 24, p. 2384–2398.
2. Van Es B., Hoogendoorn A. W. Kernel estimation in Wicksell's corpuscle problem. — Biometrika, 1990, v. 77, № 1, p. 139–145.
3. Golubev G., Levit B. Asymptotically efficient estimation in the Wicksell problem. — Ann. Statist., 1998, v. 26, p. 2407–2419.
4. Groeneboom P., Jongbloed G. Isotonic estimation and rates of convergence in Wicksell's problem. — Ann. Statist., 1995, v. 23, p. 1518–1542.
5. Hall P., Smith R. L. The kernel method for unfolding sphere size distributions. — J. Comput. Phys., 1988, v. 74, p. 409–421.
6. Hoogendoorn A. W. Estimating the weight undersize distribution for the Wicksell problem. — Statist. Neerlandica, 1992, v. 4, p. 259–282.
7. Nussbaum M. Asymptotic equivalence of density estimation and Gaussian white noise. — Ann. Statist., 1996, v. 24, p. 2399–2430.
8. Taylor C. C. A new method for unfolding sphere size distributions. — J. Microscopy, 1983, v. 132, p. 57–66.
9. Watson D. S. Estimating functionals of particle size distributions. — Biometrika, 1971, v. 58, p. 483–490.
10. Wicksell S. D. The corpuscle problem. A mathematical study of a biometric problem. — Biometrika, 1925, v. 17, p. 84–99.
11. Ван Трис Г. Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Сов. радио, 1975.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965, 537 с.
13. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
14. Пинскер М. С. Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых сигналов на фоне гауссовского белого шума. — Проблемы передачи информации, 1980, т. 16, в. 2. с. 52–68.

Поступила в редакцию
27.IX.1999