Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Козлов, О частичных суммах Эрдеша–Реньи: большие отклонения, условное поведение, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 678–696

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:33:05

© 2001 г.

КОЗЛОВ М. В.*

О ЧАСТИЧНЫХ СУММАХ ЭРДЕША–РЕНЬИ: БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ, УСЛОВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ¹⁾

В работе получено явное выражение для константы в асимптотике вероятностей больших уклонений приращений случайного блуждания (частичных сумм Эрдеша–Реньи) с условием Крамера. В форме условных предельных теорем описаны траектории блуждания, на которых осуществляется большое уклонение.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, большие уклонения, условный принцип инвариантности, факторизационные тождества.

1. Введение. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S_0 = 0,$$

где ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины (сл. в.), для которых выполнено правостороннее условие Крамера:

$$R(h) := \mathbf{E} e^{h\xi_1} = \int e^{hx} F(dx) < \infty \quad (1.1)$$

при всех $0 < h < b$ и $b \leq \infty$. Дополнительно предположим, что

$$\mathbf{E} \xi_1 = 0, \quad \mathbf{P}\{\xi_1 \neq 0\} > 0. \quad (1.2)$$

Асимптотические свойства статистики Эрдеша–Реньи

$$\rho_n(m) := \max_{0 \leq k \leq n} \Delta_m S_k, \quad \Delta_m S_k = S_{k+m} - S_k, \quad (1.3)$$

при $m = o(n)$ изучались многими авторами (см. [1] и библиографию там же). В работах [2], [3] найдена асимптотика умеренных уклонений

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: mvkozlov@uuws02.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-00524).

статистики (1.3), в работе [4] подход, использованный в [2], [3], распространен на случай больших уклонений и в предположениях (1.1), (1.2) получен следующий результат:

$$\mathbf{P}\{\rho_{tn}(n) \geq \theta n\} \sim t H_\theta n \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}, \quad n \rightarrow \infty; \quad (1.4)$$

здесь $t > 0$ — произвольная постоянная, θ — постоянная, лежащая в пределах $0 < \theta < a$,

$$H_\theta := \lim_{l \rightarrow \infty} l^{-1} [R(h_\theta)]^{-l+1} \mathbf{E}\{h_\theta \exp \rho_l(l)\} > 0, \quad (1.5)$$

постоянные a , h_θ будут определены в п. 2; $a_n \sim b_n$, означает, что $a_n/b_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. В настоящей работе получено явное выражение для H_θ и описан класс траекторий блуждания, на которых происходит большое уклонение (1.4). Без ограничения общности полагаем далее в (1.4) $t = 1$.

Автор обязан своим интересом к затрагиваемой тематике В. И. Питербаргу и благодарен ему за полезные обсуждения.

После того как работа была подготовлена к печати, автор ознакомился со статьей [15] (теорема 3), в которой содержится основной результат (3.10) нижеследующей теоремы 3.

2. Сведения из теории больших уклонений. Положим

$$m(h) := \frac{R'(h)}{R(h)}, \quad \sigma^2(h) := m'(h), \quad a := \lim_{h \rightarrow b-} m(h). \quad (2.1)$$

Для любого $0 < \theta < a$ определим h_θ как корень уравнения

$$m(h_\theta) = \theta; \quad \Lambda(\theta) := h_\theta \theta - \ln R(h_\theta).$$

Тогда (см. [5]) в предположениях (1.1), (1.2) и $0 < \theta < a$

$$\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\} \sim \left(\sqrt{2\pi n h_\theta \sigma(h_\theta)} \right)^{-1} \exp \{ -\Lambda(\theta) n \} \quad (2.2)$$

для нерешетчатого распределения $F(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leq x\}$, в решетчатом случае правую часть (2.2) следует домножить на $d(1 - e^{-dh_\theta})^{-1}$, где d — максимальный шаг распределения. Из (2.2) следует (см. [5]), что

$$\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n - y\} = \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\} e^{h_\theta y} (1 + o(1)), \quad (2.3)$$

где член $o(1)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по y , $|y| \leq \gamma_n$, $\gamma_n = o(n^{1/2})$. Выпишем еще простое экспоненциальное неравенство

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} \leq [R(h)]^n e^{-hx}, \quad 0 < h < b, \quad (2.4)$$

и его вариант при $h = h_\theta$, $x = \theta n - y$

$$\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n - y\} \leq \exp\{-n\Lambda(\theta) + h_\theta y\}. \quad (2.5)$$

Введем при $0 < h < b$ сопряженное распределение

$$F^{(h)}(x) := [R(h)]^{-1} \int_{-\infty}^x e^{hy} F(dy)$$

и последовательность $\xi_j^{(h)}$, $j = 1, 2, \dots$, независимых сл. в. с общей функцией распределения $F^{(h)}(\cdot)$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E} \xi_j^{(h)} = m(h), \quad \mathbf{D} \xi_j^{(h)} = \sigma^2(h) \quad (2.6)$$

и $F^{(h)}(\cdot)$ удовлетворяет двустороннему условию Крамера.

3. Основные результаты. Введем момент $\tau_n^{(\theta)} := \inf\{j: \Delta_n S_j \geq \theta n\}$ первого превышения процессом $\Delta_n S_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, уровня θn . Тогда

$$\mathbf{P}\{\rho_n(n) \geq \theta n\} = \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} \leq n\} = \sum_{m=0}^n \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\}. \quad (3.1)$$

Исследуя асимптотику слагаемых в (3.1), мы заново выведем соотношение (1.4), но с постоянной H_θ в другой форме, нежели (1.5). Далее на протяжении всего текста за параметром m мы закрепим область изменения $0 \leq m \leq n$, а за параметром k : $0 \leq k \leq m$. В основе доказательств лежит представление

$$\begin{aligned} \{\tau_n^{(\theta)} = m\} &= \mathcal{A} \mathcal{B}_k \mathcal{C}_k, \quad \mathcal{A} = \{\Delta_n S_m \geq \theta n\}, \\ \mathcal{B}_k &= \{\Delta_n S_j < \theta n, \quad m - k \leq j < m\}, \\ \mathcal{C}_k &= \{\Delta_n S_j < \theta n, \quad 0 \leq j < m - k\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Зависимость введенных событий от параметра m в обозначениях опущена. При $k = m$ получаем $\{\tau_n^{(\theta)} = m\} = \mathcal{A} \mathcal{B}_m$, а при $k < m$ имеем

$$\mathcal{A} \mathcal{B}_k \supseteq \{\tau_n^{(\theta)} = m\} = \mathcal{A} \mathcal{B}_k \setminus \mathcal{A} \mathcal{B}_k \overline{\mathcal{C}_k} \supseteq \mathcal{A} \mathcal{B}_k \setminus \mathcal{A} \overline{\mathcal{C}_k}, \quad (3.3)$$

откуда получаем *ключевое* неравенство

$$\mathbf{P}(\mathcal{A} \mathcal{B}_k) \geq \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} \geq \mathbf{P}(\mathcal{A} \mathcal{B}_k) - \mathbf{P}(\mathcal{A} \overline{\mathcal{C}_k}). \quad (3.4)$$

При фиксированном значении параметра m удобно перенумеровать сл. в. ξ_i :

$$X_i := \xi_{m-i+1}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad Y_j := \xi_{m+n-j+1}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.5)$$

Сл. в. (3.5) дополним до бесконечных последовательностей X_i , $i \geq 1$, Y_j , $j \geq 1$, сохраняя независимость и одинаковую распределенность. При заданном $\theta > 0$ положим

$$Y_j^{(\theta)} = \xi_{m+n-j+1}^{(h_\theta)}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.6)$$

и также дополним (3.6) до бесконечной последовательности, не зависящей от (3.5). Введем случайное блуждание

$$S_n^{(\theta)} := \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i^{(\theta)}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Ввиду (1.2), (2.6) $\mathbf{E}(X_i - Y_i^{(\theta)}) = -\theta$ и, следовательно, блуждание (3.7) уходит в $-\infty$ с вероятностью 1. Определим конечные с вероятностью 1 величины

$$\mu_n^{(\theta)} := \max_{1 \leq i \leq n} S_i^{(\theta)}, \quad \mu^{(\theta)} := \max_{i \geq 1} S_i^{(\theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{(\theta)}. \quad (3.8)$$

Всюду далее предполагаются выполненными условия (1.1) и (1.2), а $0 < \theta < a$.

Теорема 1. $H_\theta = 1 - \mathbf{E} \exp\{h_\theta \min(0, \mu^{(\theta)})\}$.

Теорема 2. $H_\theta = \exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathbf{E} \exp[h_\theta \min(0, S_n^{(\theta)})]\}$.

Переформулируем теорему 2 при более общих предположениях и независимых от предыдущего обозначениях.

Теорема 2а. Пусть X_i , $i = 1, 2, \dots$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_0 = 0,$$

и предположим, что $S_n \rightarrow -\infty$ с вероятностью 1. Определим конечные с вероятностью 1 функционалы от траектории блуждания

$$M_1^n = \max(S_1, \dots, S_n), \quad \overline{M}_1^n = \min(0, M_1^n), \quad 1 \leq n \leq \infty.$$

Тогда для преобразования Лапласа случайной величины $\overline{M}_1^\infty$ имеем при $v \geq 0$

$$1 - \mathbf{E} \exp\{v \overline{M}_1^\infty\} = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E} \exp[v \min(0, S_n)] \right\}. \quad (3.9)$$

Теорема 2 непосредственно следует из теорем 2а и 1.

Теорема 3. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ такие, что

$$\left| \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} (H_\theta \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (3.10)$$

для всех $n \geq N_\varepsilon, m \geq M_\varepsilon$ ($m \leq n$) с H_θ , определенным в теореме 1. При любом фиксированном k

$$\mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = k\} \sim H_{\theta,k} \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

$$H_{\theta,k} := 1 - \mathbf{E} \exp \left\{ h_\theta \min(0, \mu_k^{(\theta)}) \right\} > 0; \quad (3.12)$$

$$\mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} \leq n\} (H_\theta n \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Теорема 1 является следствием (3.13) (см. (1.4), (1.5)). Отметим, что в доказательстве теоремы 3 используется важное неравенство, установленное в [14]: для всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}\{\Delta_n S_j \geq \theta n, \Delta_n S_m \geq \theta n\} \leq 2q^{m-j} \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}, \quad 0 \leq j < m \leq n, \quad (3.14)$$

где $0 < q < 1$ зависит от θ . Неравенство (3.14) указывает на относительную малость вероятности пересечения событий под знаком вероятности в левой части (3.14). Именно благодаря этому неравенство (3.4) позволяет эффективно оценить вероятность события $\{\tau_n^{(\theta)} = m\}$.

Как видно из (3.10), (3.13), событие $\{\tau_n^{(\theta)} \leq n\}$ состоит из асимптотически равновероятных событий $\{\tau_n^{(\theta)} = m\}$, $\kappa_n \leq m \leq n$, $\kappa_n \rightarrow \infty$, $\kappa_n = o(n)$ и события $\{\tau_n^{(\theta)} < \kappa_n\}$ пренебрежимо малой вероятности. Тем самым оказывается, что описание траекторий, входящих в событие $\{\tau_n^{(\theta)} \leq n\}$, сводится к рассмотрению событий $\{\tau_n^{(\theta)} = m\}$, а соответствующие предельные теоремы относительно условного распределения $\mathbf{P}\{\cdot | \tau_n^{(\theta)} \leq n\}$ вытекают из утверждений относительно распределения $\mathbf{P}\{\cdot | \tau_n^{(\theta)} = m\}$. Описание участка случайного блуждания S_i при $\tau_n^{(\theta)} \leq i \leq \tau_n^{(\theta)} + n$ и условии $\tau_n^{(\theta)} = m$, $0 \leq m \leq n$, проведем в терминах случайного блуждания

$$Z_j := \sum_{i=1}^j Y_i, \quad 1 \leq j \leq n, \quad Z_0 = 0 \quad (3.15)$$

(сл. в. Y_i определены в (3.5)). Построим по нему кусочно-линейный непрерывный процесс, положив

$$Z_n(t) = [\sigma(h_\theta)]^{-1} n^{-1/2} (Z_{tn} - tn\theta) \quad (3.16)$$

при tn целом, $0 \leq t \leq 1$, и линейно интерполируя при остальных t . Обозначим через $w(t)$ стандартное броуновское движение и через $w^0(t) = w(t) - tw(1)$, $0 \leq t \leq 1$, — броуновский мост.

Теорема 4. Последовательность (3.16) случайных элементов пространства $C[0, 1]$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций (с суп-нормой) сходится по распределению относительно условных мер $\mathbf{P}\{\cdot | \tau_n^{(\theta)} = t\}$, $0 \leq t \leq n$, и $\mathbf{P}\{\cdot | \tau_n^{(\theta)} \leq n\}$ к броуновскому мосту $w^0(\cdot)$.

Наиболее короткий вариант доказательства теоремы 4 получается сведением ее к условной предельной теореме [6] о сходимости к броуновскому мосту для подчиненного условию на конце нормированного случайного блуждания с нулевым средним и конечной дисперсией. Возможен и обычно используемый прямой путь доказательства функциональной предельной теоремы, как это было сделано, например, в [8]–[10].

Переходим к дальнейшему описанию условного предельного поведения случайного блуждания. Сл. в. ξ_i , $i > \tau_n^{(\theta)} + n$, не зависят от $\tau_n^{(\theta)}$ и от отрезка блуждания до момента $\tau_n^{(\theta)} + n$, так что распределение последовательности $S_{m+n+j} - S_{m+n}$, $j = 1, 2, \dots$, от условия $\tau_n^{(\theta)} = t$ не зависит. Тем самым, отрезок блуждания $S_{\tau_n^{(\theta)}+n+j}$, $j = 1, 2, \dots$, при условии $\tau_n^{(\theta)} = t$ связан с предысторией только через значение сл. в. $S_{\tau_n^{(\theta)}+n}$ и является таким же случайным блужданием, как исходное, но с начальным распределением $\mathbf{P}\{S_{\tau_n^{(\theta)}+n} \in dx | \tau_n^{(\theta)} = t\}$.

Теорема 5. $\sup_u |\mathbf{P}\{S_m \leq u | \tau_n^{(\theta)} = t\} - \mathbf{P}\{S_m \leq u\}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ равномерно по $t \leq n$.

Доказательство теоремы 5 сводится к исследованию условного предельного распределения шагов блуждания в непосредственной близости слева от точки $\tau_n^{(\theta)}$, которое оказывается естественным рассматривать вместе с шагами блуждания в левой полуокрестности точки $\tau_n^{(\theta)} + n$. Определим при каждом k набор сл. в. $\hat{X}_i^{(k)}, \hat{Y}_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, и бесконечную последовательность сл. в. $(\hat{X}_i, \hat{Y}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, полагая вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\hat{\mathbf{X}}_k^{(k)} \in B_1^{(k)}, \hat{\mathbf{Y}}_k^{(k)} \in B_2^{(k)}\}, \\ \mathbf{P}\{\hat{\mathbf{X}}_l \in B_1^{(l)}, \hat{\mathbf{Y}}_l \in B_2^{(l)}\}, \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

равными соответственно

$$H_{\theta, k}^{-1} \mathbf{E} \left[1 - \exp \{h_{\theta} \mu_k^{(\theta)}\}; \mu_k^{(\theta)} < 0, \mathbf{X}_k \in B_1^{(k)}, \mathbf{Y}_k \in B_2^{(k)} \right], \quad (3.18)$$

$$H_{\theta}^{-1} \mathbf{E} \left[1 - \exp \{h_{\theta} \mu^{(\theta)}\}; \mu^{(\theta)} < 0, \mathbf{X}_l \in B_1^{(l)}, \mathbf{Y}_l \in B_2^{(l)} \right]; \quad (3.19)$$

здесь нижний индекс при векторных сл. в. $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ обозначает число компонент вектора, верхний индекс при B — размерность данного борелевского множества.

Теорема 6. При условии события $\{\tau_n^{(\theta)} = t = \text{const}\}$ и $n \rightarrow \infty$ набор случайных величин X_i, Y_i , $i = 1, 2, \dots, t$, сходится по (условному) распределению к набору $\hat{X}_i^{(m)}, \hat{Y}_i^{(m)}$, $i = 1, 2, \dots, t$; если $t \rightarrow \infty$, то

последовательность (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots$, сходится по (условному) распределению к последовательности $(\hat{X}_i, \hat{Y}_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

Следствие. При условии события $\tau_n^{(\theta)} = t$ условное распределение случайной величины $S_{\tau_n^{(\theta)} + n}$ асимптотически при $n \rightarrow \infty$ такое же, как у суммы двух независимых случайных величин: одна имеет экспоненциальное распределение с параметром h_θ и сдвигом θn , вторая распределена, как $\sum_{i=1}^m \hat{X}_i^{(m)}$ при $m = \text{const}$, а при $m \rightarrow \infty$ — как S_m ; в последнем случае

$$\sup_u \left| \mathbf{P}\{S_{\tau_n^{(\theta)} + n} \leq u \mid \tau_n^{(\theta)} = t\} - \mathbf{P}\{S_m + \theta n \leq u\} \right| \rightarrow 0.$$

Второе утверждение теоремы 6 имеет самостоятельное значение — описывается локальная структура случайного блуждания, подчиненного условию $\tau_n^{(\theta)} = t$ ($t \rightarrow \infty$), в левых полуокрестностях точек $\tau_n^{(\theta)}$ и $\tau_n^{(\theta)} + n$. Нетрудно понять (и этому можно придать точную форму), что влияние условия $\tau_n^{(\theta)} = t$ сказывается лишь непосредственно слева от точек $\tau_n^{(\theta)}$, $\tau_n^{(\theta)} + n$. В огрубленном масштабе об этом свидетельствует теорема 4. На участок от $\tau_n^{(\theta)}$ до $\tau_n^{(\theta)} + n$ возможно перенести условные предельные теоремы А. А. Боровкова [9], [10].

Используя те же приемы, нетрудно описать условное поведение блуждания на участке $[0, \tau_n^{(\theta)}]$ при условии $\tau_n^{(\theta)} = t \rightarrow \infty$ (при $m = \text{const}$ это делается в теореме 6). В частности, справедливо следующее усиление теоремы 5.

Теорема 7. Для любых l , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l \leq 1$

$$\sup_{u_1, \dots, u_l} \left| \mathbf{P}\{S_{[mt_i]} \leq u_i, 1 \leq i \leq l \mid \tau_n^{(\theta)} = t\} - \mathbf{P}\{S_{[mt_i]} \leq u_i, 1 \leq i \leq l\} \right| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ равномерно по $t \leq n$.

Если предположить, например, у шагов блуждания конечную дисперсию, то теорему 7 легко продолжить до следующей функциональной предельной теоремы.

Теорема 8. Пусть в дополнение к (1.1), (1.2) $\mathbf{E} \xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Положим

$$W_m(t) = \sigma^{-1} t^{-1/2} S_{tm} \quad (3.20)$$

при tm целом, $0 \leq t \leq 1$, и линейно интерполируем при остальных t . Тогда последовательность (3.20) случайных элементов пространства $C[0, 1]$ сходится по распределению $\mathbf{P}\{\cdot \mid \tau_n^{(\theta)} = t\}$ к броуновскому движению $w(\cdot)$.

Доказательство теоремы 8 получается простой комбинацией подходов теорем 5 и 4.

Описание условного случайного блуждания при условии $\rho_n(n) \geq \theta n$ выглядит несколько проще, если использовать вместо $\tau_n^{(\theta)}$ момент

$$\sigma_n := \sup\{j \leq n: \Delta_n S_j \geq \theta n\}$$

последнего превышения процессом $\Delta_n S_j$, $0 \leq j \leq n$, уровня θn (полагая σ_n не определенным, если такое превышение не состоялось). Все полученные нами результаты сохраняются после внесения очевидных изменений в формулировки и доказательства. Именно, рассматривая событие $\{\sigma_n = r\}$, $0 \leq r \leq n$, положим

$$\begin{aligned} \{\sigma_n = r\} &= \mathcal{A}' \mathcal{B}'_k \mathcal{C}'_k, \quad \mathcal{A}' = \{\Delta_n S_r \geq \theta n\}, \\ \mathcal{B}'_k &= \{\Delta_n S_j < \theta n, \quad r < j \leq r + k\}, \\ \mathcal{C}'_k &= \{\Delta_n S_j < \theta n, \quad r + k < j \leq n\}. \end{aligned} \quad (3.2^*)$$

Ключевые соотношения (3.3) и (3.4) остаются в силе с учетом замены (3.2) на (3.2*). Вместо сл. в. (3.5) вводятся величины

$$Y'_i = \xi_{r+i}, \quad 1 \leq i \leq n - r, \quad X'_j = \xi_{r+n+j}, \quad 1 \leq j \leq n - r; \quad (3.5^*)$$

при этом в обозначениях (3.5*) по сравнению с (3.5) не только добавлен штрих, но и поменялись ролями X и Y , что позволяет все дальнейшие изменения в обозначениях свести к штрихованию. В частности, вместо (3.7), (3.8) имеем

$$(S'_n)^{(\theta)} := \sum_{i=1}^n (X'_i - (Y'_i)^{(\theta)}), \quad (\mu'_n)^{(\theta)} = \max_{1 \leq i \leq n} (S'_i)^{(\theta)},$$

и т.д. В остальном рассуждения сохраняются практически без поправок. В результате замены $\tau_n^{(\theta)}$ на σ_n и X_i, Y_i на X'_i, Y'_i получаем теоремы 3*, 4*, 6*; участок блуждания от момента $\sigma_n + n$ до $2n$ описывается теоремами 5*, 7*, 8*; последовательность S_i , $1 \leq i \leq r$, и событие $\sigma_n = r$ независимы.

В итоге траектория $\hat{S}_i$, $1 \leq i \leq 2n$, условного блуждания при условии $\rho_n(n) \geq \theta n$ моделируется (при большом n) следующим образом. Разыгрывается равномерно распределенная на целых точках отрезка $[0, n]$ сл. в. σ_n . На отрезке $[0, \sigma_n]$ моделируется исходное случайное блуждание. На отрезках $[\sigma_n, \sigma_n + n]$ и $[\sigma_n + n, 2n]$ при крупномасштабном моделировании полагаем

$$\hat{S}_j = \hat{S}_{\sigma_n} + \sigma(h_\theta) \sqrt{n} w^0((j - \sigma_n) n^{-1}) + (j - \sigma_n) \theta, \quad \sigma_n \leq j \leq \sigma_n + n,$$

$$\hat{S}_j = \hat{S}_{\sigma_n} + \theta n + \sum_{i=\sigma_n+n+1}^j \xi_i, \quad \sigma_n + n < j \leq 2n,$$

где $w^0(\cdot)$ — независимый броуновский мост. Локальная структура условного блуждания в правых полуокрестностях точек σ_n и $\sigma_n + n$ дается теоремой 6* и, соответственно, описывается процессами $\hat{Y}_i$ и $\hat{X}_i$, $i = 1, 2, \dots$ (которые, ввиду их взаимной зависимости, моделируются совместно).

4. Доказательство теоремы 3. Ниже мы покажем, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{AB}_k) \sim H_{\theta,k} \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{P}\{\mathcal{AC}_k\} (\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} \leq \gamma_k, \quad (4.2)$$

где $\gamma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (и $m \geq k$). Выведем теорему 3 из соотношений (4.1), (4.2). Перепишем (4.1) в виде

$$\mathbf{P}(\mathcal{AB}_k) = \beta_{n,k} H_{\theta,k} \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}, \quad \beta_{n,k} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.1a)$$

Заметим, что (см. (3.12), (3.8)) $H_{\theta,k} \rightarrow H_\theta$, $k \rightarrow \infty$, или

$$H_{\theta,k} = \alpha_k H_\theta, \quad \text{где } \alpha_k \geq 1, \quad \alpha_k \rightarrow 1 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Подставим (4.1a), (4.2) в неравенство (3.4) и, учитывая (4.3), получим

$$\alpha_k \beta_{n,k} \geq \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} (H_\theta \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} \geq \beta_{n,k} - \gamma'_k, \quad \gamma'_k = \gamma_k H_\theta^{-1}. \quad (4.4)$$

По любому $\varepsilon > 0$ выберем $k = M_\varepsilon$ и N_ε такие, что

$$\alpha_{M_\varepsilon} - 1 < \varepsilon, \quad \gamma'_{M_\varepsilon} < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\beta_{n,M_\varepsilon} - 1| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N_\varepsilon. \quad (4.5)$$

Полагая в (4.4) $k = M_\varepsilon$, $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq M_\varepsilon$ ($m \leq n$), получаем

$$(1 + \varepsilon)^2 \geq \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} (H_\theta \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} \geq 1 - 2\varepsilon, \quad (4.6)$$

что приводит к соотношению (3.10).

Поскольку события $\mathcal{AB}_k$ и $\{\tau_n^{(\theta)} = k\}$ совпадают, то соотношение (3.11) совпадает с (4.1). Суммируя неравенства (3.10), находим

$$\left| \mathbf{P}\{M_\varepsilon < \tau_n^{(\theta)} \leq n\} (H_\theta(n - M_\varepsilon) \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} - 1 \right| < \varepsilon$$

для всех $n \geq N_\varepsilon$, и, кроме того (см. (3.4) при $k = 0$), $\mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} \leq M_\varepsilon\} \leq (M_\varepsilon + 1) \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}$. Отсюда после элементарных преобразований получаем для $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{M_\varepsilon + 1}{n} \right) &< \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} \leq n\} (H_\theta n \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\})^{-1} \\ &< 1 + \varepsilon + \frac{M_\varepsilon + 1}{n H_\theta}, \end{aligned}$$

что приводит к соотношению (3.13).

Заменяя вероятность объединения суммой вероятностей и применяя неравенства (3.14), получаем при достаточно больших n соотношение:

$$\mathbf{P}\{\mathcal{AC}_k\} \leq \sum_{j=0}^{m-k-1} \mathbf{P}\{\Delta_n S_j \geq \theta n, \Delta_n S_m \geq \theta n\} \leq \frac{2q^{k+1}}{1-q} \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\}. \quad (4.7)$$

Неравенство (4.7) показывает, что последовательность γ_k в (4.2) действительно может быть выбрана бесконечно малой, так что (4.2) установлено.

Перейдем к доказательству соотношения (4.1). Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_k), & \mathbf{y} &= (y_1, \dots, y_k), \\ z_j &= \sum_{i=1}^j y_i, & \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^j (x_i - y_i), \\ D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \left\{ y_{k+1}, \dots, y_n : \theta n \leq z_k + \sum_{i=k+1}^n y_i < \theta n - \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}, \\ \mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \left\{ (Y_{k+1}, \dots, Y_n) \in D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Используя разложение (см. обозначения (3.5))

$$\Delta_n S_j = \Delta_n S_m + \sum_{i=1}^{m-j} (X_i - Y_i), \quad 0 \leq j < m \leq n,$$

представим событие $\mathcal{B}_k$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k &= \left\{ \Delta_n S_m + \sum_{i=1}^j (X_i - Y_i) < \theta n, \quad 1 \leq j \leq k \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k Y_i + \sum_{i=k+1}^n Y_i + \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^j (X_i - Y_i) < \theta n \right\} \end{aligned}$$

и запишем вероятность (4.1) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int \mathbf{P}\{\mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \prod_{i=1}^k F(dx_i) F(dy_i) \\ &= \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\} \int \cdots \int g_{n,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \prod_{i=1}^k F(dx_i) F(dy_i), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$g_{n,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{P}\{\mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} (\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\})^{-1}. \quad (4.10)$$

Покажем, что при $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$g_{n,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \exp\{h_\theta z_k\} (1 - \exp\{h_\theta \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}). \quad (4.11)$$

Применяя (2.3), имеем при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $y = o(n^{1/2})$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n - y\} (\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\})^{-1} \sim \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta(n-k)\} \\ &\times e^{h_\theta(y-\theta k)} (\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta(n-k)\} e^{-h_\theta \theta k})^{-1} \sim e^{h_\theta y}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Отсюда получаем при любых $y' < y''$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\theta n - y'' \leq S_{n-k} < \theta n - y'\} (\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\})^{-1} \rightarrow e^{h_\theta y''} - e^{h_\theta y'}. \quad (4.13)$$

Подставив в (4.13) $y'' = z_k$, $y' = z_k + \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, приходим к (4.11).

Из (4.10), (4.11) вытекает, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})) > 0 \quad (4.14)$$

при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ таких, что $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$ и всех достаточно больших (в зависимости от $\mathbf{x}, \mathbf{y}$) n ; заметим, что интегрирование в (4.9) фактически выполняется по переменным $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, для которых имеет место (4.14). Если перейти в (4.9) к пределу под знаком интеграла, то получим с учетом (4.11) интеграл

$$\int \dots \int e^{h_\theta z_k} (1 - \exp \{h_\theta \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}) \prod_{i=1}^k F(dx_i) F(dy_i), \quad (4.15)$$

где интегрирование ведется по области $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$. Переходя в (4.15) к сопряженным распределениям $F^{(h_\theta)}(dy_i)$, $i = 1, \dots, k$, приведем (4.15) к виду

$$[R(h_\theta)]^k \mathbf{E} [1 - \exp \{h_\theta \mu_k^{(\theta)}\}; \mu_k^{(\theta)} < 0] = [R(h_\theta)]^k H_{\theta, k}. \quad (4.16)$$

Для первого сомножителя в правой части (4.9), применяя (2.3), (2.2), имеем асимптотику

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\} &\sim \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta(n-k)\} e^{-h_\theta \theta k} \\ &\sim \left(\sqrt{2\pi(n-k)} h_\theta \sigma(h_\theta)\right)^{-1} \exp\{-\Lambda(\theta)(n-k) - \theta k\} \\ &\sim \left(\sqrt{2\pi n} h_\theta \sigma(h_\theta)\right)^{-1} \exp\{-\Lambda(\theta)n\} [R(h_\theta)]^{-k}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Таким образом, если обосновать возможность перехода в (4.9) к пределу под знаком интеграла, то получим, что (4.9) эквивалентно при $n \rightarrow \infty$ произведению выражений (4.16), (4.17), которое приводится с учетом асимптотики (2.2) к правой части соотношения (4.1).

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что последовательность функций (4.10) мажорируется суммируемой по мере в (4.9) функцией. Разобьем область интегрирования $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}: \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0\}$ в (4.9) на части

$$z_k < -n^{1/3}, \quad |z_k| \leq n^{1/3}, \quad z_k > n^{1/3}. \quad (4.18)$$

Применяя (2.4) и (4.17), находим

$$\begin{aligned} g_{n,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq \mathbf{P}\{S_{n-k} + z_k \geq \theta n\} (\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\})^{-1} \\ &\leq [R(h_\theta)]^{n-k} e^{-h_\theta(\theta n - z_k)} (\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\})^{-1} \sim \sqrt{2\pi n} h_\theta \sigma(h_\theta) e^{h_\theta z_k}, \end{aligned}$$

так что

$$g_{n,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq c_\theta \sqrt{n} e^{h_\theta z_k}. \quad (4.19)$$

Эту оценку мы используем в первой и третьей из областей (4.18), а во второй области воспользуемся следующей оценкой, вытекающей из (4.12):

$$g_{n,k}(x, y) \leq c'_\theta e^{h_\theta z_k}. \quad (4.20)$$

С учетом (3.15) запишем интеграл от мажоранты (4.19), (4.20) в виде

$$c_\theta \sqrt{n} \left[\mathbf{E} \left(e^{h_\theta Z_k}; Z_k < -n^{1/3} \right) + \mathbf{E} \left(e^{h_\theta Z_k}; Z_k > n^{1/3} \right) \right] + c'_\theta \mathbf{E} e^{h_\theta Z_k}. \quad (4.21)$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{h_\theta Z_k} &= [R(h_\theta)]^k, & \mathbf{E} \left(e^{h_\theta Z_k}; Z_k < -n^{1/3} \right) &\leq e^{-n^{1/3}}, \\ \mathbf{E} \left(e^{h_\theta Z_k}; Z_k > n^{1/3} \right) &\leq e^{(h_\theta - \hat{h}) n^{1/3}} \mathbf{E} e^{\hat{h} Z_k}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $\hat{h}$ выбрано из условия $h_\theta < \hat{h} < b$. Подставляя соотношения (4.22) в (4.21), получаем требуемое.

5. Доказательство теоремы 4. Пусть $f(\cdot)$ — произвольный непрерывный и ограниченный функционал в пространстве $C[0, 1]$. Мы установим, что (см. обозначение (3.16))

$$\left| \mathbf{E} \left(f(Z_n(\cdot)) \mid \tau_n^{(\theta)} = m \right) - \mathbf{E} f(w^0(\cdot)) \right| < \varepsilon \quad (5.1)$$

для всех $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq M_\varepsilon$ ($m \leq n$). Покажем сначала, что (5.1) является следствием соотношений

$$\mathbf{E} \left(f(Z_n(\cdot)) \mid \mathcal{A} \mathcal{B}_k \right) \longrightarrow \mathbf{E} f(w^0(\cdot)), \quad n \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Во-первых, заметим, что из разложения $f = f^+ - f^-$, $f^+ = \max(0, f)$ вытекает, что (5.1) достаточно установить для неотрицательных функционалов. В таком случае, интегрируя неотрицательную сл. в. $f(Z_n(\cdot))$ по включениям (3.3), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)); \mathcal{A} \mathcal{B}_k) &\geq \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)); \tau_n^{(\theta)} = m) \\ &\geq \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)); \mathcal{A} \mathcal{B}_k) - \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)); \mathcal{A} \overline{\mathcal{C}}_k). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Полагая $f(\cdot) \leq c$, выпишем для крайнего правого члена в (5.3) с учетом (4.1а), (4.2) оценку сверху:

$$c \gamma_k (\beta_{n,k} H_{\theta,k})^{-1} \mathbf{P}(\mathcal{A} \mathcal{B}_k). \quad (5.4)$$

Поделив неравенства (5.3) на $\mathbf{P}(\mathcal{A} \mathcal{B}_k)$ и подставляя оценку (5.4), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)) \mid \mathcal{A} \mathcal{B}_k) &\geq \frac{\mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\}}{\mathbf{P}(\mathcal{A} \mathcal{B}_k)} \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)) \mid \tau_n^{(\theta)} = m) \\ &\geq \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)) \mid \mathcal{A} \mathcal{B}_k) - c \gamma_k \beta_{n,k}^{-1} H_{\theta,k}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ввиду неравенства (3.4) и соотношений (4.1a), (4.2), (4.3) имеем

$$1 \geq \frac{\mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\}}{\mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k)} \geq 1 - \frac{\mathbf{P}\{\mathcal{A}\overline{\mathcal{C}}_k\}}{\mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k)} \geq 1 - \frac{\gamma_k}{\beta_{n,k}H_\theta}. \quad (5.6)$$

По любому $\varepsilon > 0$ выберем M_ε таким, что

$$\gamma_{M_\varepsilon} < \varepsilon. \quad (5.7)$$

С учетом соотношения (5.2) выберем N_ε таким, что для всех $n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)) \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_{M_\varepsilon}) - \mathbf{E}f(w^0(\cdot)) \right| < \varepsilon, \quad \beta_{n,M_\varepsilon} > 1 - \varepsilon. \quad (5.8)$$

Подставив $k = M_\varepsilon$ в (5.5) и (5.6) и используя (5.7), (5.8), получаем для $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq M_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}f(w^0(\cdot)) + \varepsilon &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2 H_\theta}\right) \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)) \mid \tau_n^{(\theta)} = m), \\ \mathbf{E}(f(Z_n(\cdot)) \mid \tau_n^{(\theta)} = m) &\geq \mathbf{E}f(w^0(\cdot)) - \varepsilon - c\varepsilon(1-\varepsilon)^{-2}H_\theta^{-1}, \end{aligned}$$

что и приводит к (5.1).

Перейдем к доказательству соотношения (5.2). Представим условное математическое ожидание в (5.2) в виде повторного интеграла

$$\int \cdots \int \prod_{i=1}^k F(dx_i) F(dy_i) \int \cdots \int f(z_n(\cdot)) \prod_{j=k+1}^n F(dy_j) [\mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k)]^{-1}, \quad (5.9)$$

где $z_n(\cdot)$ обозначает реализацию процесса $Z_n(\cdot)$ как функцию переменных $y_1, \dots, y_n$ (ср. с (3.15), (3.16)); внешнее интегрирование в (5.9) ведется по таким $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, для которых выполнено условие (4.14), а внутреннее — по области $D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (см. (4.8)). Внутренний интеграл заменим на интеграл по условной мере и далее на условное математическое ожидание:

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int f(z_n(\cdot)) [\mathbf{P}(\mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))]^{-1} \prod_{j=k+1}^n F(dy_j) \\ &= \mathbf{E}(f(\widehat{Z}_n(\cdot)) \mid \mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где через $\widehat{Z}_n(\cdot)$ обозначена траектория процесса $Z_n(\cdot)$ с фиксированным началом: $Y_i = y_i$, $i = 1, \dots, k$. Введем кусочно-линейный непрерывный процесс, полагая при целых $t(n-k)$ (ср. с (3.16))

$$Y_n(t) = [\sigma(h_\theta)]^{-1} n^{-1/2} \sum_{i=k+1}^{k+t(n-k)} (Y_i - \theta), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad Y_n(0) = 0,$$

и последовательность $h_n(\cdot)$ непрерывных отображений пространства $C[0, 1]$ в себя, переводящих элемент $y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в

$$x(t) := \begin{cases} z_n(t), & 0 \leq t \leq \frac{k}{n}, \\ y\left(\frac{t - k/n}{1 - k/n}\right) - y(0) + z_n\left(\frac{k}{n}\right), & \frac{k}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что для любой последовательности $y_n(\cdot)$, $y_n(0) = 0$, сходящейся в $C[0, 1]$ к некоторому $y(\cdot)$, также и $h_n(y_n(\cdot))$ сходится к $y(\cdot)$. Тем самым, к последовательности $h_n(Y_n(\cdot)) = \hat{Z}_n(\cdot)$ применима теорема 5.5 [7]. Поскольку последовательность $Y_n(\cdot)$ сходится по условному распределению $\mathbf{P}\{\cdot \mid \mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ в $C[0, 1]$ к броуновскому мосту (см. [6] и [7, с. 209]), то $h_n(Y_n(\cdot))$ также сходится по этому условному распределению к броуновскому мосту. Таким образом,

$$\mathbf{E}\left(f(\hat{Z}_n(\cdot)) \mid \mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) \rightarrow \mathbf{E} f(w^0(\cdot)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.11)$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, удовлетворяющих условию (4.14).

Перепишем интеграл (5.9) с учетом (5.10) и (4.10) в форме произведения следующих сомножителей:

$$[\mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k)]^{-1} \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq \theta n\}, \quad (5.12)$$

$$\int \cdots \int \mathbf{E}\left(f(\hat{Z}_n(\cdot)) \mid \mathcal{D}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) g_{n,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \prod_{i=1}^k F(dx_i) F(dy_i). \quad (5.13)$$

К интегралу (5.13) применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости (см. (4.9) и далее), а потому ввиду (5.11), (4.11) и (4.16) получаем для (5.13) предельное значение при $n \rightarrow \infty$, равное $\mathbf{E} f(w^0(\cdot)) [R(h_\theta)]^k H_{\theta,k}$. Выражение (5.12) имеет своим пределом (см. (4.1), (4.17)) $[R(h_\theta)]^{-k} H_{\theta,k}^{-1}$. Таким образом, (5.2) установлено и соотношение (5.1) доказано.

Поскольку $\{\tau_n^{(\theta)} = m\} = \mathcal{A}\mathcal{B}_m$, то из соотношения (5.2) получаем

$$\mathbf{E}\left(f(Z_n(\cdot)) \mid \tau_n^{(\theta)} = m\right) \rightarrow \mathbf{E} f(w^0(\cdot)), \quad n \rightarrow \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Соотношение (5.14) показывает, что (5.1) выполняется равномерно по $0 \leq m \leq n$, откуда и следует теорема 4.

6. Доказательство теорем 5, 6. Обозначим математические ожидания в (3.18) и (3.19) через $E_{\theta,k}(B_1^{(k)}, B_2^{(k)})$ и $E_\theta(B_1^{(l)}, B_2^{(l)})$ соответственно. Отметим, что

$$E_{\theta,k}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k) = H_{\theta,k}, \quad E_\theta(\mathbf{R}^l, \mathbf{R}^l) = H_\theta.$$

Выведем второе утверждение теоремы 6. Оценим вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n^{(\theta)} = m, \mathbf{X}_l \in B_1^{(l)}, \mathbf{Y}_l \in B_2^{(l)}\right\}. \quad (6.1)$$

Выпишем для (6.1) верхнюю границу (см. (3.3))

$$\mathbf{P}\{\mathcal{A}\mathcal{B}_k, \mathbf{X}_l \in B_1^{(l)}, \mathbf{Y}_l \in B_2^{(l)}\}, \quad k \geq l. \quad (6.2)$$

Действуя, как и в п. 4, находим для (6.2) асимптотику при $n \rightarrow \infty$ в виде

$$\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\} E_{\theta,k}(B_1^{(l)}, B_2^{(l)}). \quad (6.3)$$

Таким же образом выписываем и асимптотику нижней границы (ср. с (4.4)):

$$\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\} (E_{\theta,k}(B_1^{(l)}, B_2^{(l)}) - \gamma'_k - \delta'_n). \quad (6.4)$$

Производя в (6.3), (6.4) переход к пределу по образцу (4.4)–(4.6) и учитывая, что

$$E_{\theta,k}(B_1^{(l)}, B_2^{(l)}) \rightarrow E_\theta(B_1^{(l)}, B_2^{(l)}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (6.5)$$

получим для вероятности (6.1) асимптотику в виде

$$\mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\} E_\theta(B_1^{(l)}, B_2^{(l)}) \sim \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} H_\theta^{-1} E_\theta(B_1^{(l)}, B_2^{(l)}) \quad (6.6)$$

при $n, m \rightarrow \infty$ равномерно по $m \leq n$, что составляет второе утверждение теоремы 6. Первое утверждение получается применением (6.3) из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m, \mathbf{X}_m \in B_1^{(m)}, \mathbf{Y}_m \in B_2^{(m)}\} \\ &= \mathbf{P}\{\mathcal{A}\mathcal{B}_m, \mathbf{X}_m \in B_1^{(m)}, \mathbf{Y}_m \in B_2^{(m)}\} \\ &\sim \mathbf{P}\{S_n \geq \theta n\} E_{\theta,m}(B_1^{(m)}, B_2^{(m)}) \\ &\sim \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} H_{\theta,m}^{-1} E_{\theta,m}(B_1^{(m)}, B_2^{(m)}). \end{aligned}$$

Докажем теорему 5. Используя (3.3), (3.4), (4.1), (4.2), (4.1a), получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{P}\{\mathcal{A}\mathcal{B}_k, S_m \leq u\} - \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m, S_m \leq u\} \\ &= \mathbf{P}\{(\mathcal{A}\mathcal{B}_k \setminus \{\tau_n^{(\theta)} = m\}), S_m \leq u\} \leq \mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k) - \mathbf{P}\{\tau_n^{(\theta)} = m\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\mathcal{A}\mathcal{C}_k\} \leq \gamma_k \beta_{n,k}^{-1} H_{\theta,k}^{-1} \mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k), \end{aligned}$$

где $\gamma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $\beta_{n,k} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и любом k . Отсюда, повторяя предельный переход (4.4)–(4.6), получаем

$$\sup_u \left| \mathbf{P}\{S_m \leq u \mid \tau_n^{(\theta)} = m\} - \mathbf{P}\{S_m \leq u \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_k\} \right| < \varepsilon \quad (6.7)$$

для достаточно большого k , всех $m \leq n$ ($m \geq k$) и всех достаточно больших n .

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\mathcal{A}\mathcal{B}_k, S_m \leq u\} - \mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k) \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u\} \\ &= \mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k) \left[\mathbf{P}\left\{S_{m-k} + \sum_{i=1}^k X_i \leq u \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_k\right\} - \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u\} \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Сл. в. S_{m-k} и $X_1, \dots, X_k$ условно независимы при условии $\mathcal{A}\mathcal{B}_k$, а S_{m-k} не зависит от $\mathcal{A}\mathcal{B}_k$. Поэтому выражение в квадратных скобках в (6.8) можно представить в виде

$$\int \left[\mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u - v\} - \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u\} \right] \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i \in dv \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_k\right). \quad (6.9)$$

Разобьем область интегрирования в (6.9) на части $|v| \leq c_k$ и $|v| > c_k$ со свободным параметром $c_k > 0$. В области $|v| \leq c_k$ воспользуемся неравенством для функции концентрации (см. [11, гл. III, (2.15)]):

$$\left| \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u - v\} - \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u\} \right| \leq C \frac{|v| + 1}{\sqrt{m - k}}, \quad (6.10)$$

а при $|v| > c_k$ заменим модуль подынтегральной функции в (6.9) на 2. Тем самым, для модуля интеграла (6.9) получаем оценку сверху в виде

$$\frac{C(c_k + 1)}{\sqrt{m - k}} + 2\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^k X_i\right| > c_k \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_k\right). \quad (6.11)$$

Из (6.2), (6.3), (4.1) следует, что

$$\mathbf{P}\left((X_1, \dots, X_k) \in B^{(k)} \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_k\right) \longrightarrow H_{\theta, k}^{-1} E_{\theta, k}(B^{(k)}, \mathbf{R}^k), \quad n \rightarrow \infty.$$

Обозначив через

$$Q_{\theta, k}(B) := H_{\theta, k}^{-1} E_{\theta, k}\left(\left\{\mathbf{x}: \sum_{i=1}^k x_i \in B\right\}, \mathbf{R}^k\right)$$

предельное при $n \rightarrow \infty$ ($k \leq m$) условное распределение сл. в. $\sum_{i=1}^k X_i$, получаем для второго слагаемого в (6.11) предельное значение при $n \rightarrow \infty$, равное $\alpha_k := 2Q_{\theta, k}([-c_k, c_k])$. Выберем последовательность c_k таким образом, чтобы $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и, обозначив через $\alpha_{n, k}$ второе слагаемое в (6.11), представим оценку (6.11) в виде

$$\frac{C(c_k + 1)}{\sqrt{m - k}} + \alpha_{n, k}, \quad \alpha_{n, k} \rightarrow \alpha_k \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.12)$$

Выбрав в (6.12) $k = k_\varepsilon$ настолько большим, чтобы $\alpha_{k_\varepsilon} < \varepsilon$, а затем $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ так, чтобы при $m \geq M_\varepsilon, n \geq N_\varepsilon$ $C(c_{k_\varepsilon} + 1)/\sqrt{m - k_\varepsilon} < \varepsilon$,

$|\alpha_{n,k_\varepsilon} - \alpha_{k_\varepsilon}| < \varepsilon$, получаем, что модуль интеграла (6.9) не превосходит 3ε . Возвращаясь к разности (6.8), имеем для $m \geq M_\varepsilon$, $n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \mathbf{P}\{S_m \leq u \mid \mathcal{A}\mathcal{B}_{k_\varepsilon}\} - \mathbf{P}\{S_{m-k_\varepsilon} \leq u\} \right| \leq 3\varepsilon. \quad (6.13)$$

Наконец, снова используя неравенство (6.10), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}\{S_m \leq u\} - \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u\} \right| \\ & \leq \int \left| \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u-v\} - \mathbf{P}\{S_{m-k} \leq u\} \right| \mathbf{P}\{S_k \in dv\} \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{m-k}} \int (|v|+1) \mathbf{P}\{S_k \in dv\} = \frac{C(\mathbf{E}|S_k|+1)}{\sqrt{m-k}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Полагая в (6.14) $k = k_\varepsilon$ и собирая вместе оценки (6.7), (6.13), (6.14), получаем теорему 5.

7. Доказательство теоремы 2а. Всюду далее комплексное переменное обозначается $z = u + iv$, $u = \operatorname{Re} z$, $v = \operatorname{Im} z$. Положим $\varphi(u) = \mathbf{E} e^{iuX_1}$. Формула (3.9) для преобразования Лапласа сл. в. $\overline{M}_1^\infty$ получается путем вывода подходящего факторизационного тождества; за подробностями мы отсылаем читателя к монографии [12]. Положим при $0 < s < 1$

$$\begin{aligned} D_s^+(z) &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(e^{izS_n}; S_n > 0) \right\}, \\ D_s^-(z) &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}(e^{izS_n}; S_n < 0) \right\}, \\ d(s) &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{P}\{S_n = 0\} \right\} \end{aligned}$$

и выпишем тождество

$$1 - s\varphi(u) = D_s^+(u) D_s^-(u) d(s), \quad 0 < s < 1. \quad (7.1)$$

Значение $d(1) = \lim_{s \rightarrow 1-} d(s)$ всегда конечно и положительно. Условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}\{S_n > 0\} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}\{S_n < 0\} = \infty \quad (7.2)$$

необходимы и достаточны, чтобы $S_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1. При этом конечно и значение

$$D_1^+(u) = \lim_{s \rightarrow 1-} D_s^+(u) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}(e^{iuS_n}; S_n > 0) \right\}. \quad (7.3)$$

При условиях (7.2) справедливо тождество

$$\mathbf{E} e^{iuM_0^\infty} = D_1^+(0) [D_1^+(u)]^{-1}, \quad M_0^n = \sup(0, S_1, \dots, S_n), \quad n \leq \infty. \quad (7.4)$$

Так как $M_1^\infty = X_1 + \sup(0, \sum_{i=2}^j X_i; j = 2, 3, \dots)$, то

$$\mathbf{E} e^{iuM_1^\infty} = \varphi(u) \mathbf{E} e^{iuM_0^\infty} = \varphi(u) D_1^+(0) [D_1^+(u)]^{-1}. \quad (7.5)$$

Проводя элементарные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{iu\overline{M}_1^\infty} &= \mathbf{E}(e^{iuM_1^\infty}; M_1^\infty < 0) + \mathbf{P}\{M_1^\infty \geq 0\} \\ &= \mathbf{E} e^{iuM_1^\infty} - \mathbf{E}(e^{iuM_1^\infty}; M_1^\infty > 0) + \mathbf{P}\{M_1^\infty > 0\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Поскольку события $\{M_1^\infty > 0\}$ и $\{M_0^\infty > 0\}$ совпадают и при этом $M_0^\infty = M_1^\infty$, то математическое ожидание (7.6) переписывается в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} e^{iuM_1^\infty} - \mathbf{E}(e^{iuM_0^\infty}; M_0^\infty > 0) + \mathbf{P}\{M_0^\infty > 0\} \\ &= \mathbf{E} e^{iuM_1^\infty} - \mathbf{E} e^{iuM_0^\infty} + \mathbf{P}\{M_0^\infty = 0\} + \mathbf{P}\{M_0^\infty > 0\}, \end{aligned}$$

где сумма двух последних вероятностей равна 1. С учетом (7.4), (7.5) отсюда получаем

$$1 - \mathbf{E} e^{iu\overline{M}_1^\infty} = (1 - \varphi(u)) D_1^+(0) [D_1^+(u)]^{-1}. \quad (7.7)$$

Выведем из (7.7) формулу для преобразования Лапласа сл. в. $\overline{M}_1^\infty$. В равенстве $\mathbf{E}(e^{iuS_n}; S_n < 0) = \mathbf{E} e^{iuS_n} - \mathbf{E}(e^{iuS_n}; S_n \geq 0)$ перейдем к модулям и получим

$$|\mathbf{E}(e^{iuS_n}; S_n < 0)| \leq |\varphi(u)|^n + \mathbf{P}\{S_n \geq 0\}. \quad (7.8)$$

Из (7.8), (7.2) и конечности $d(1)$ вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}(e^{iuS_n}; S_n < 0) \quad (7.9)$$

абсолютно сходится при u таких, что $|\varphi(u)| < 1$, причем сходимость равномерна в области $\{u: |\varphi(u)| \leq 1 - \varepsilon\}$. Таким образом, в (7.1) при $|\varphi(u)| < 1$ можно положить $s = 1$:

$$1 - \varphi(u) = D_1^+(u) D_1^-(u) d(1). \quad (7.10)$$

Подставляя (7.10) в (7.7), находим

$$1 - \mathbf{E} e^{iu\overline{M}_1^\infty} = d(1) D_1^+(0) D_1^-(u) \quad (7.11)$$

при u таких, что $|\varphi(u)| < 1$. В случае нерешетчатого распределения сл. в. X_1 $|\varphi(u)| < 1$ при $u \neq 0$. В области $\text{Im } z = v \leq 0$, очевидно,

$$|\mathbf{E}(e^{izS_n}; S_n < 0)| \leq \mathbf{E}(e^{-vS_n}; S_n < 0).$$

Отсюда и из (7.8) заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}(e^{izS_n}; S_n < 0) \quad (7.12)$$

сходится при $\operatorname{Im} z \leq 0$, $z \neq 0$ и сходимость равномерна при дополнительном ограничении $|z| \geq \varepsilon > 0$. Следовательно, ряд (7.12), а вместе с ним и функция $D_1^-(z)$ являются аналитическими при $\operatorname{Im} z < 0$ и непрерывными при $\operatorname{Im} z \leq 0$, $z \neq 0$. Для решетчатого случая с максимальным шагом d имеем $|\varphi(u)| < 1$ при $0 < u < 2\pi/d$. Предыдущие рассуждения сохраняются, если ограничить комплексную плоскость, например, полосой $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi/d$. Привлекая свойство единственности аналитических функций [13, гл. XII, § 4], заключаем, что функции $1 - \mathbf{E} e^{iz\overline{M}_1^\infty}$ и $d(1)D_1^+(0)D_1^-(z)$, будучи аналитическими при $\operatorname{Im} z < 0$, непрерывными при $\operatorname{Im} z \leq 0$, $\varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi/d - \varepsilon$ и совпадающими (см. (7.11)) на отрезке действительной прямой, совпадают во всей нижней полуплоскости. В частности, при $z = -iv$, $v \geq 0$ получаем (3.9):

$$1 - \mathbf{E} e^{v\overline{M}_1^\infty} = d(1) D_1^+(0) D_1^-(-iv).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новак С. Ю. О распределении максимума частичных сумм Эрдеша–Реньи. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 274–293.
2. Питербарг В. И. О больших скачках случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 54–64.
3. Довгалюк В. В., Питербарг В. И. Большие отклонения траекторий пуассоновского процесса. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 112–117.
4. Kozlov A. M., Piterbarg V. I. On large jumps of Cramer random walk. Preprint № 43. Göteborg: Chalmers University of Technology, Göteborg University, 2000.
5. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
6. Liggett T. M. An invariance principle for conditioned sums of independent random variables. — J. Math. Mech., 1968, v. 18, № 6, p. 559–570.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
8. Полещук О. М. О сходимости условного случайного блуждания к броуновскому мосту. — Успехи матем. наук, 1990, т. 45, в. 1, с. 187–188.
9. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших отклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.
10. Боровков А. А. Об условных распределениях, связанных с большими отклонениями. — Сиб. матем. журн., 1996, т. 37, № 4, с. 732–744.
11. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
12. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
13. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1999, 432 с.
14. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 4, p. 1363–1368.
15. Komlós J., Tusnády G. On sequences of «pure heads». — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 608–617.

Поступила в редакцию
16.XI.2000