Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева, Пуассоновские меры, квазиинвариантные относительно мультипликативных преобразований, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 697–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:35:36

© 2001 г.

ЛИФИЦ М. А.*, ШМИЛЕВА Е. Ю.*

ПУАССОНОВСКИЕ МЕРЫ, КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ¹⁾

В данной работе описаны необходимые и достаточные условия квазиинвариантности распределений пуассоновских мер на $X \times \mathbf{R}^+$ (X — произвольное измеримое пространство) относительно широкой группы растяжений пространства по компоненте $\mathbf{R}^+$. Показано также, что класс квазиинвариантных мер далеко не исчерпывается мерами, абсолютно непрерывными относительно рассмотренной в [1] и [2] гамма-меры. Приведен критерий абсолютной непрерывности одной пуассоновской меры на произвольном измеримом пространстве относительно другой.

Ключевые слова и фразы: пуассоновская мера, спектральная мера, квазиинвариантность распределения пуассоновской меры, гамма-мера, расстояние Хеллингера–Какутани.

1. Постановка задачи. Пусть $(X, \mathcal{F}, \nu)$ — произвольное измеримое пространство, где ν — конечная неатомическая мера. Рассмотрим продукт-пространство $X \times \mathbf{R}^+$ с σ -алгеброй $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ и мерой $m = \nu \times \Lambda$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра на $\mathbf{R}^+$, а Λ — произвольная мера на $\mathbf{R}^+$.

О п р е д е л е н и е. Пуассоновской мерой μ на $(X \times \mathbf{R}, \mathcal{F} \times \mathcal{B}, m)$ называется случайная мера, значениями которой на измеримом множестве A таком, что $m(A) < \infty$, являются пуассоновские случайные величины с параметром $m(A)$, а на A таком, что $m(A) = \infty$, $\mu(A) = +\infty$. При этом для любых непересекающихся $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}$ величины $\mu(A_1)$ и $\mu(A_2)$ независимы. Мера m называется спектральной мерой или мерой Леви пуассоновской меры μ .

Исследуемая задача состоит в том, чтобы найти условия, описывающие распределения всех пуассоновских мер со спектральными мерами вида $m = \nu \times \Lambda$, квазиинвариантные²⁾ относительно достаточно широкой

*С.-Петербургский государственный университет, механико-математический факультет, Библиотечная пл., 2, 198904 Старый Петергоф, Россия; e-mail: lifts@mail.rcom.ru, shmill@mail.ru

¹⁾ Работа первого автора поддержана РФФИ (гранты 00-15-96019 и 99-01-00112).

²⁾ Под квазиинвариантностью меры $\mathcal{P}$ на пространстве $\mathcal{X}$ относительно преобразования $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ понимается абсолютная непрерывность образа меры относительно исходной меры ($\mathcal{P}f^{-1} \ll \mathcal{P}$).

группы растяжений пространства $X \times \mathbf{R}^+$ по одномерной компоненте. Условие квазиинвариантности пуассоновских мер относительно трансформаций пространства по оси $\mathbf{R}^+$ следует искать в терминах меры Λ .

Эта задача была поставлена А. М. Вершиком и обсуждалась в работах [5], [6]. О ней также упоминалось в статьях Н. В. Цилевич, А. М. Вершика и М. Йора [1], [2], в которых исследуются свойства гамма-процесса и мер Пуассона–Дирихле с точки зрения теории представлений.

Введем обозначение для множества неотрицательных измеримых функций на пространстве X с ν -суммируемым логарифмом:

$$\Phi = \left\{ a: X \rightarrow \mathbf{R}^+: \int_X |\ln a(x)| d\nu(x) < \infty \right\}.$$

Ясно, что Φ является коммутативной группой относительно поточечного умножения функций.

Обозначим пространство целочисленных мер на $X \times \mathbf{R}^+$ через $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{ \eta: \forall A \in \mathcal{F} \times \mathcal{B} \quad \eta(A) \in \mathbf{Z}^+ \}.$$

Каждой функции $a \in \Phi$ можно сопоставить мультипликатор $\mathcal{L}^a: X \times \mathbf{R}^+ \rightarrow X \times \mathbf{R}^+$, который действует на $(x, r) \in X \times \mathbf{R}^+$ так:

$$\mathcal{L}^a(x, r) = (x, a(x)r).$$

При этом в пространстве мер определено преобразование $\mathcal{L}_a: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, которое каждой мере $\phi \in \mathcal{M}$ сопоставляет $\mathcal{L}_a\phi(B) = \phi((\mathcal{L}^a)^{-1}(B))$. Иными словами, происходит растяжение по оси $\mathbf{R}^+$ в каждой точке x в $a(x)$ раз. Множество $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$ является группой «линейных» трансформаций пространства $\mathcal{M}$.

Известно (см. [1], [2]), что свойством квазиинвариантности относительно $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$ обладает класс мер, эквивалентных так называемой гамма-мере.

О п р е д е л е н и е. Гамма-мерой называется закон распределения в пространстве $\mathcal{M}$ случайной пуассоновской меры на пространстве $X \times \mathbf{R}^+$ со спектральной мерой

$$dm(x, r) = d\nu(x) \cdot \frac{e^{-r}}{r} dr.$$

В статьях [1], [2] был поставлен вопрос о единственности гамма-меры в классе распределений пуассоновских мер, обладающих свойством квазиинвариантности относительно $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$ и при этом сосредоточенных на множестве $\{\mu \in \mathcal{M}: \mu((0, \varepsilon) \times \mathcal{X}) = \infty\}$, где ε — сколь угодно малое положительное число, т.е. соответствующая пуассоновская мера имеет бесконечное число нагрузок в любой полосе около нуля ($\Lambda(0, \varepsilon) = \infty$).³⁾

³⁾ Такая постановка задачи имеет смысл, если важна эргодичность группы преобразований $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$ на пространстве $(\mathcal{M}, \mathcal{P}_\Lambda)$, в противном случае число нагрузок меры оказывается нетривиальным инвариантом рассматриваемой группы.

Ситуация проясняется, если описать все квазиинвариантные меры. Оказывается, что гамма-мера не единственна среди вышеописанных мер. Примеры, подтверждающие этот факт, приводятся в следующем разделе.

Задача об описании всех квазиинвариантных мер может быть рассмотрена как частный случай задачи о нахождении необходимых и достаточных условий взаимной абсолютной непрерывности любых двух пуассоновских мер на произвольном измеримом пространстве. Этим путем мы и будем следовать при нахождении необходимых и достаточных условий квазиинвариантности.

2. Основные результаты. Удобные для проверки условия квазиинвариантности предлагаются в следующей теореме.

Теорема 1. *Пуассоновская мера является квазиинвариантной относительно всех преобразований $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \mathbb{F}}$ тогда и только тогда, когда ее спектральная мера представима в виде*

$$dm(x, r) = d\nu(x) \cdot \frac{\psi^2(\ln r)}{r} dr,$$

где функция ψ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\psi(s)$ строго положительна при почти всех $s \in \mathbb{R}$;
- 2) при некотором $c > 0$

$$\int_{|v|>r} |\widehat{\psi}(v)|^2 dv \leq c \left(1 + \frac{1}{r}\right) \quad \forall r > 0, \quad (1)$$

где $\widehat{\psi}$ — преобразование Фурье функции ψ .

Комментарии к теореме 1. 1. Условие (1) равносильно условию

$$\exists C > 0: \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(v) - \psi(v - \alpha))^2 dv \leq C(1 + |\alpha|) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Это будет установлено в процессе доказательства теоремы 1. В некоторых случаях для проверки квазиинвариантности удобнее пользоваться условием (2), нежели (1).

Например, пользуясь (2), можно доказать квазиинвариантность любой пуассоновской меры со спектральной плотностью $\psi^2(\ln r)/r$, где $\psi(v) \in \Psi$ при $v \in (-\infty, \ln \varepsilon)$ и ψ — строго положительная квадратично суммируемая на интервале $[\ln \varepsilon, \infty)$. Здесь $\varepsilon < 1$ и

$$\Psi = \left\{ \psi \in W_1^1(-\infty, \ln \varepsilon): |\psi'(v)| \leq \frac{c}{|v|} \text{ и } 0 < \psi(v) < c_0, \ c_0, c > 0 \right\}.$$

Докажем, что такие функции удовлетворяют условию (2).

Будем оценивать три интеграла:

$$\int_{\{-\infty, \rho\} \cup \{\rho, \lambda\} \cup \{\lambda, \infty\}} (\psi(v - \alpha) - \psi(v))^2 dv = I_1 + I_2 + I_3,$$

где $\rho = \min\{\ln \varepsilon, \ln \varepsilon + \alpha\}$, а $\lambda = \max\{\ln \varepsilon, \ln \varepsilon + \alpha\}$.

Ясно, что $I_3 \leq 2M$, где $M = \int_{\ln \varepsilon}^{\infty} \psi^2(v) dv$, а $I_2 < c^2|\alpha| + M \leq \max\{M, c^2\}(1 + |\alpha|)$. Оценим оставшийся интеграл:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} (\psi(v - \alpha) - \psi(v))^2 dv + \int_{-2|\alpha|}^{\rho} (\psi(v - \alpha) - \psi(v))^2 dv = Y_1 + Y_2.$$

Понятно, что подынтегральную функцию на интервале $(-2|\alpha|, \rho)$ можно оценить сверху величиной $4(\sup \psi)^2$. Значит,

$$Y_2 < 4(\sup \psi)^2(|\rho| + 2|\alpha|).$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} \left(\int_{v-\alpha}^v \psi'(r) dr \right)^2 dv \leq c^2 \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} \left(\int_{v-\alpha}^v \frac{1}{|r|} dr \right)^2 dv \\ &= c^2 \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} \left(\ln \frac{|v - \alpha|}{|v|} \right)^2 dv. \end{aligned}$$

При $\alpha > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-2\alpha} \left(\ln \frac{|v - \alpha|}{|v|} \right)^2 dv &= \int_{-\infty}^{-2\alpha} \left(\ln \left(1 + \frac{\alpha}{|v|} \right) \right)^2 dv \\ &\leq \int_{-\infty}^{-2\alpha} \frac{\alpha^2}{v^2} dv = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\ln(1 + x) \leq x$ при $x \in [0, \infty)$.

При $\alpha < 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} \left(\ln \frac{|v - \alpha|}{|v|} \right)^2 dv &= \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} \left(\ln \left(1 - \frac{\alpha}{v} \right) \right)^2 dv \\ &\leq 4 \ln^2 2 \int_{-\infty}^{-2|\alpha|} \frac{\alpha^2}{v^2} dv = 2 \ln^2 2 \cdot |\alpha|, \end{aligned}$$

так как $(\ln(1 - x))^2 \leq 4 \ln^2 2 \cdot x^2$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Условие (2) проверено.

Рассмотрим функции из вышеописанного класса, не имеющие предела при $v \rightarrow -\infty$, например,

$$\psi_1(v) = \cos \ln(|v| + 1) + c,$$

где $c > 1$, $v \in (-\infty, 0)$, и $\psi_1 \in L^2(0, \infty)$ — строго положительная на $(0, \infty)$, или кусочно-линейную функцию

$$\psi_2(v) = \begin{cases} \frac{v}{2^{2k}} + 3, & v \in [-2^{2k+1}, -2^{2k}), \quad k = 0, 1, \dots, \\ -\frac{v}{2^{2k-1}}, & v \in [-2^{2k}, -2^{2k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \\ -v + 1, & v \in [-1, 0], \end{cases}$$

на промежутке $(0, \infty)$ функция ψ_2 также строго положительна и квадратично суммируема.

Этим функциям соответствуют пуассоновские меры со спектральными плотностями, медленно меняющимися между плотностями гамма-мер разного масштаба, а значит, сингулярные относительно любой

гамма-меры. Таким образом, найден класс сингулярных гамма-мере пуассоновских мер, квазиинвариантных относительно $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$.

2. В качестве примера спектральных плотностей квазиинвариантных мер можно рассмотреть также функции вида

$$\phi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{r|\ln r|^\alpha}, & r \in (0, \varepsilon), \\ g(r), & r \in [\varepsilon, \infty), \end{cases} \quad (3)$$

где $\varepsilon < 1$, $\alpha \in [0, \infty)$, а g — любая строго положительная суммируемая на $[\varepsilon, \infty)$ функция.

Подобные меры были рассмотрены в [2], где говорилось об их квазиинвариантности относительно более узкого класса преобразований $\mathcal{L}_a$, где $a(x) = C \forall x \in X$, $C > 0$.

Можно заметить, что такие меры включаются в класс мер, описанных в п. 1. Условие (1) тоже легко проверяется.

Возвращаясь к задаче об описании пуассоновских мер, у которых в полосе $X \times (0, \varepsilon)$ бесконечное число нагрузок, поставленной в конце раздела 1. Отметим, что для мер с плотностями (3) это будет выполняться при $\alpha \leq 1$.

Можно заметить также, что в этом семействе мер при $\alpha = 0$ получается мера, эквивалентная гамма-мере. Во всех остальных случаях меры сингулярны относительно гамма-меры.

Про пуассоновские меры, задаваемые спектральными плотностями вида (3), можно добавить, что они квазиинвариантны относительно более широкой группы преобразований. Это поясняют следующие соображения.

Несложно доказать, что для пуассоновских мер со спектральной плотностью ϕ_α , $\alpha \in [0, 1]$, интеграл из условия квазиинвариантности можно оценить:

$$\exists C > 0: \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_\alpha(v) - \psi_\alpha(v - l))^2 dv \leq C(1 + |l|^{1-\alpha}) \quad \forall l \in \mathbf{R},$$

где

$$\psi_\alpha(v) = \begin{cases} v^{-\alpha/2}, & v \in (-\infty, \ln \varepsilon), \\ \tilde{g}(v), & v \in [\ln \varepsilon, \infty), \end{cases}$$

причем $\tilde{g} \in L^2(\ln \varepsilon, \infty)$.

Это означает квазиинвариантность пуассоновской меры, соответствующей ϕ_α , относительно группы преобразований $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi_\alpha}$, где

$$\Phi_\alpha = \left\{ a: X \rightarrow \mathbf{R}^+: \int_X |\ln a(x)|^{1-\alpha} d\nu(x) < \infty \right\}.$$

Известно, что $\Phi = \Phi_0 \subset \Phi_\alpha$ для любого $\alpha \in (0, 1]$.

3. Существуют примеры квазиинвариантных мер с плотностями вида $\psi^2(\ln r)/r$, у которых $\psi \notin \Psi$ на промежутке $(-\infty, \ln \varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1 будет изложено в разделе 3. Оно опирается на следующую теорему, которая сама по себе представляет интерес.

Теорема 2. Пусть на произвольном измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ заданы две пуассоновские меры μ_1 и μ_2 со спектральными мерами m_1 и m_2 соответственно. Будем считать, что меры m_1 и m_2 неатомические и что m — мера, доминирующая m_1 и m_2 , т.е. $dm_1(x) = f_1(x) dm(x)$ и $dm_2(x) = f_2(x) dm(x)$. Обозначим законы распределения мер μ_1 и μ_2 в пространстве целочисленных мер на $\mathcal{X}$ через $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ соответственно.

Для того чтобы $\mathcal{P}_2$ была абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{P}_1$, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий: $m_2 \ll m_1$ и

$$\int_{\mathcal{X}} \left(\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)} \right)^2 dm(x) < \infty. \quad (4)$$

При этом формула для взаимной плотности имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1) &= (m_1 - m_2)(\mathcal{X} \setminus A) + \int_{\mathcal{X} \setminus A} \ln f(x) d\mu_1(x) \\ &+ \int_A (\ln f - f + 1) dm_1(x) + \int_A \ln f(x) d(\mu_1 - m_1)(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A = \{x \in \mathcal{X}: |1 - f(x)| < 1/2\}$, а $f(x) = (dm_2/dm_1)(x)$.

Доказательство этой теоремы будет приведено в разделе 4.

Комментарии к теореме 2. 1. Интеграл вида (4) является удвоенным квадратом расстояния Хеллингера–Какутани между мерами m_1 и m_2 (подробнее см. [9, гл. IV]).

2. Авторы не претендуют на то, что теорема 2 является оригинальным результатом. Расстояние Хеллингера–Какутани уже использовалось в [4] для проверки абсолютной непрерывности распределений однородных процессов с независимыми приращениями, а также в [3], [9] для более широкого класса процессов. Нам, однако, не удалось найти в литературе соответствующего результата об абсолютной непрерывности пуассоновских мер.

3. Теорема 2 имеет много общего с результатом Скорохода (см. [7, с. 265]) об абсолютной непрерывности распределений процессов с независимыми приращениями. А именно, если $Y(t)$ — процесс с независимыми приращениями, то его траектории можно сопоставить конфигурацию скачков $\{(t_i, r_i)\} \subset \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, где t_i — время, а r_i — величина i -го скачка. Известно, что случайная мера на $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, которая на множестве $[t_2, t_1) \times A$ равна числу скачков процесса величины $r \in A$ за промежутки времени $[t_2, t_1)$, является пуассоновской мерой.

Если заданы два процесса с независимыми приращениями, то можно использовать формулу (5) для вычисления взаимной плотности мер скачков процессов. Если процессы являются чисто скачкообразными, то формула (5) дает взаимную плотность распределений самих процессов, т.е. совпадает с формулой Скорохода (см. [7, с. 262]). Отметим, что для процессов, не являющихся чисто скачкообразными, формула Скорохода гораздо сложнее.

4. Условие (4) выполнено, если m_1 и m_2 конечны. Значит, из взаимной абсолютной непрерывности спектральных мер при условии их конечности сразу следует абсолютная непрерывность распределений соответствующих пуассоновских мер, и наоборот.

5. Поскольку условие (4) симметрично, то $\mathcal{P}_2 \asymp \mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда $m_2 \asymp m_1$ и выполнено (4).

6. Условие (4) можно заменить на три следующих условия, выполненных при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1)$:⁴⁾

(a)

$$\int_{\mathcal{X}^*} (f(x) - 1)^2 dm_1(x) < \infty, \quad (6)$$

где

$$f(x) = \frac{dm_2(x)}{dm_1(x)} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}, \quad \mathcal{X}^* = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in [1 - \delta, 1 + \varepsilon]\};$$

(b) $m_1(\mathcal{X}') < \infty$, $m_2(\mathcal{X}') < \infty$, где $\mathcal{X}' = \{x \in \mathcal{X} : f(x) > 1 + \varepsilon\}$;

(c) $m_1(\mathcal{X}'') < \infty$, $m_2(\mathcal{X}'') < \infty$, где $\mathcal{X}'' = \{x \in \mathcal{X} : f(x) < 1 - \delta\}$.

Два последних условия говорят о том, что та часть пространства $\mathcal{X}$, где спектральные меры значительно отличаются друг от друга, должна быть конечна в смысле обеих этих мер. В случае абсолютной непрерывности распределений пуассоновских мер только множество $\mathcal{X}^* = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in [1 - \delta, 1 + \varepsilon]\}$ для любых $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ может иметь бесконечные меры m_1 и m_2 .

7. С помощью теоремы 2 можно описывать классы эквивалентных мер, что часто бывает полезно. Например, класс мер, эквивалентных гамма-мере, можно описать условием на спектральную плотность $g(r) = (\sqrt{e^{-r}/r} + \tilde{g}(r))^2$, где $\tilde{g}(r) \in L^2(0, \infty)$.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\nu \times \Lambda$ — спектральная мера пуассоновской меры μ на $X \times \mathbf{R}^+$, где Λ — произвольная мера на $\mathbf{R}^+$. Обозначим $\Lambda_{a(x)}$ образ Λ при преобразовании $\mathcal{L}_{a(x)}$.

Условие $\Lambda \ll \Lambda_{a(x)} \forall a(x) \in \Phi$ можно переписать в виде $d\hat{\Lambda}(v) \ll d\hat{\Lambda}(v - \ln a(x))$, где $\hat{\Lambda}$ — образ меры Λ при преобразовании $q(r) = \ln r$. Значит, $\hat{\Lambda} \ll \hat{\Lambda}_l$, где $l \in \mathbf{R}$, а $\hat{\Lambda}_l$ — сдвиг меры $\hat{\Lambda}$ на l . По лемме 4.1

⁴⁾ Справедливость условий (a)–(c) не зависит от выбора параметров ε и δ .

из [10] получаем, что $\hat{\Lambda}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда имеет место представление

$$d\hat{\Lambda}(v) = \psi^2(v) dv.$$

Значит, получаем $\psi^2(v) dv \ll \psi^2(v-l) dv \forall l \in \mathbf{R}$, что выполнено тогда и только тогда, когда $\psi^2 \neq 0$ п.н., т.е. $\psi = \sqrt{\psi^2} > 0$ п.н.

Теперь применим теорему 2. Ее утверждение можно переписать в следующем виде.

Мера μ квазиинвариантна тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия: $\psi(v) > 0$ п.н. и

$$\int_X \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(v-l(x)) - \psi(v))^2 dv d\nu(x) < \infty \quad \forall l \in L^1(X, \nu). \quad (7)$$

Лемма 1. Соотношение (7) равносильно следующему:

$$\text{при некотором } c > 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(v-l) - \psi(v))^2 dv \leq c(1+|l|) \quad \forall l \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна. Его необходимость докажем от противного.

Введем обозначение $w(l) = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(v-l) - \psi(v))^2 dv$.

Пусть $\sup[w(l)/(1+|l|)] = \infty$, тогда существует такая последовательность $\{l_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$, что $w(l_n) > 2^{2n}(1+|l_n|)$. Далее, рассмотрим такие непересекающиеся множества $A_n \subset X$, что

$$\nu(A_n) = \frac{\nu(X)}{2^n \max\{|l_n|, 1\}},$$

и построим простую функцию $l(x) = \sum l_n \mathbb{I}_{A_n}(x)$ для $x \in \mathcal{X}$. Функция l суммируема, так как $\int_X |l(x)| d\nu(x) \leq \nu(X) \sum_{n \in \mathbf{N}} 2^{-n} = \nu(X)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_X w(l(x)) d\nu(x) &\geq \sum_{n: |l_n| > 1} w(l_n) \frac{\nu(X)}{2^n |l_n|} + \sum_{n: |l_n| \leq 1} w(l_n) \frac{\nu(X)}{2^n} \\ &> \sum_{n: |l_n| > 1} 2^{2n} |l_n| \cdot \frac{\nu(X)}{2^n |l_n|} + \sum_{n: |l_n| \leq 1} 2^{2n} \frac{\nu(X)}{2^n} \\ &= \nu(X) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = \infty. \end{aligned}$$

Получаем противоречие с (7). Лемма доказана.

Обозначим $\hat{\psi}$ преобразование Фурье функции ψ , тогда преобразование Фурье сдвига ψ на l равно $e^{ilv} \hat{\psi}(v)$.

Поскольку преобразование Фурье есть изоморфизм пространства $L^2(-\infty, \infty)$, то (8) эквивалентно

$$\exists c > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(v)|^2 |e^{ilv} - 1|^2 dv \leq c(1+|l|) \quad \forall l \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

Если мы докажем, что (9) равносильно

$$\exists c > 0 : \int_{|v| > 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 dv \leq c(1 + |l|) \quad \forall l \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

то теорема будет доказана. Выведем (9) из (10). Для этого сделаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(v)|^2 |e^{ilv} - 1|^2 dv &\leq l^2 \int_{|v| \leq 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 v^2 dv \\ &+ 4 \int_{|v| > 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 dv \leq l^2 \int_{|v| \leq 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 v^2 dv + 4c(1 + |l|). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством: $|e^{ix} - 1| \leq |x|$ при $|x| < 1$, $|e^{ix} - 1| \leq 2$ при $|x| \geq 1$. Таким образом, достаточно доказать, что из (10) следует

$$l^2 \int_{|v| \leq 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 v^2 dv \leq c(1 + |l|).$$

Пусть $n_0 \in \mathbf{Z}$: $2^{n_0-1} < |l| \leq 2^{n_0}$. Тогда можем записать

$$\begin{aligned} l^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{|v| \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]} |\hat{\psi}(v)|^2 v^2 dv \\ \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} 4 \cdot 2^{2n_0} \frac{1}{2^{2n}} \int_{|v| \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]} |\hat{\psi}(v)|^2 dv \leq 4c \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{2(n_0-n)} (1 + 2^n) \\ \leq 4c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} (1 + 2^{n+n_0}) = 16c \left(\frac{1}{3} + 2^{n_0-1} \right) \leq 16c(1 + |l|). \end{aligned}$$

Теперь будем доказывать, что из (9) следует (10). В соотношении (9) возьмем $l = 2^n$, $n \in \mathbf{Z}$:

$$c(1 + 2^n) \geq \int_{|v| \in [1/2^{n+1}, 1/2^n]} |\hat{\psi}(v)|^2 |e^{ilv} - 1|^2 dv \geq \tilde{c} \int_{|v| \in [1/2^{n+1}, 1/2^n]} |\hat{\psi}(v)|^2 dv, \quad (11)$$

где $\tilde{c} = \inf_{1/2 \leq x \leq 1} (|e^{ix} - 1|^2 / x^2) > 0$.

Достаточными для (10) являются следующие условия, выполняющиеся одновременно:

$$\exists c_1 > 0 : \int_{|v| > 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 dv \leq c_1 |l| \quad \forall l: |l| > 1, \quad (12)$$

$$\exists c_2 > 0 : \int_{|v| \geq 1} |\hat{\psi}(v)|^2 dv \leq c_2. \quad (13)$$

Пусть $n_0 \in \mathbf{N}$: $2^{n_0-1} < |l| \leq 2^{n_0}$. Тогда, учитывая (11), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{c} \int_{|v| > 1/|l|} |\hat{\psi}(v)|^2 dv &\leq \tilde{c} \sum_{n=0}^{n_0-1} \int_{|v| \in [1/2^{n+1}, 1/2^n]} |\hat{\psi}(v)|^2 dv \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} c(1 + 2^n) \\ &\leq 2c \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^n = 2c(2^{n_0} - 1) \leq 4c|l|. \end{aligned}$$

Осталось доказать (13), используя (9). Проинтегрируем (9) по переменной l : $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(v)|^2 \int_0^1 |e^{ilv} - 1|^2 dl dv \leq 2c$. Далее, используя неравенство

$$\int_0^1 |e^{ilv} - 1|^2 dl = 2 - 2 \frac{\sin v}{v} \geq 2 - 2 \sin 1 > 0.3,$$

выполняющееся при $|v| \geq 1$, получим (13). Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2.

Лемма 2. *Предположим, что на произвольном измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ заданы две пуассоновские меры μ_1 и μ_2 с конечными неатолическими спектральными мерами m_1 и m_2 соответственно и законами распределений $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. В этом случае*

$$\mathcal{P}_2 \ll \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow m_2 \ll m_1$$

и имеет место следующая формула для плотности:

$$\frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\eta) = e^{(m_1 - m_2)(\mathcal{X})} \prod_{n=1}^k f(\tau_n), \quad (14)$$

где $\tau_1, \dots, \tau_k$ — точки пространства $\mathcal{X}$, где расположены нагрузки меры η .

Доказательство. Нужно доказать лишь достаточность условия $m_2 \ll m_1$, так как необходимость очевидна.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех целочисленных мер на $\mathcal{X}$. Обозначим через $\mathcal{M}_k$ множество мер из $\mathcal{M}$ с k единичными нагрузками, а через $\overline{\mathcal{X}}_k$ множество $\{\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \in \mathcal{X}^k: \tau_i \neq \tau_j \text{ при } i \neq j\}$. Определим сюръективное отображение $\pi_k: \overline{\mathcal{X}}_k \rightarrow \mathcal{M}_k$, которое каждому вектору $(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \overline{\mathcal{X}}_k$ сопоставляет меру с единичными нагрузками в точках $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Известно, что сужения мер $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ на $\mathcal{M}_k$ совпадают с образами при отображении π_k мер $e^{-m_1(\mathcal{X})} m_1^{(k)}/k!$ и $e^{-m_2(\mathcal{X})} m_2^{(k)}/k!$ соответственно, где $m_i^{(k)}$ — сужения на $\overline{\mathcal{X}}_k$ мер $m_i \times \dots \times m_i$ (k раз), $i = 1, 2$. Следовательно, для любого измеримого $A \subset \mathcal{M}_k$ можем вычислить

$$\mathcal{P}_1(A) = \mathbf{P}\{\mu_1 \in A\} = e^{-m_1(\mathcal{X})} \frac{m_1^{(k)}(A^*)}{k!},$$

где A^* — прообраз множества A при отображении π_k .

Тогда для любого измеримого $A \subset \mathcal{M}$

$$\mathcal{P}_1(A) = \mathbf{P}\{\mu_1 \in A\} = e^{-m_1(\mathcal{X})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_1^{(k)}((A \cap \mathcal{M}_k)^*)}{k!}. \quad (15)$$

По тем же соображениям получаем

$$\mathcal{P}_2(A) = \mathbf{P}\{\mu_2 \in A\} = e^{-m_2(\mathcal{X})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_2^{(k)}((A \cap \mathcal{M}_k)^*)}{k!}.$$

Учитывая абсолютную непрерывность меры m_2 относительно m_1 , можем продолжить

$$\mathcal{P}_2(A) = e^{-m_2(\mathcal{X})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{(A \cap \mathcal{M}_k)^*} f(x_1) \cdots f(x_k) dm_1(x_1) \cdots dm_1(x_k)}{k!}. \quad (16)$$

Здесь $f(x) = (dm_2/dm_1)(x)$.

Из формул (15), (16) видно, что если $\mathcal{P}_1(A) = 0$ (т.е. $m_1^{(k)}((A \cap \mathcal{M}_k)^*) = 0 \forall k \in \mathbf{Z}^+$), то $\mathcal{P}_2(A) = 0$, что и означает абсолютную непрерывность меры $\mathcal{P}_2$ относительно меры $\mathcal{P}_1$.

Теперь будем вычислять плотность меры $\mathcal{P}_2$ относительно $\mathcal{P}_1$. Из формулы (16) следует, что для любого $A \subset \mathcal{M}_k$

$$\mathcal{P}_2(A) = \frac{e^{-m_2(\mathcal{X})}}{k!} \int_{A^*} f(x_1) \cdots f(x_k) dm_1^{(k)}(x).$$

Рассмотрим отображение $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$, которое каждой мере $\eta \in \mathcal{M}$ сопоставляет $\phi(\eta) = \exp\{\int_{\mathcal{X}} \ln f(u) d\eta(u)\}$. Пусть ϕ_k — его сужение на $\mathcal{M}_k$. Тогда $\phi_k \circ \pi_k(x) = f(x_1) \cdots f(x_k)$ для любого $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{X}_k$. Далее, пользуясь формулой замены переменной и вспоминая, что $\mathcal{P}_i|_{\mathcal{M}_k}$ есть образ $e^{-m_i(\mathcal{X})} m_i^{(k)}/k!$, получаем

$$\begin{aligned} \int_A \phi(\eta) d\mathcal{P}_1(\eta) &= \int_{A^*} \phi_k \circ \pi_k(x) \cdot e^{-m_1(\mathcal{X})} \frac{dm_1^{(k)}(x)}{k!} \\ &= \frac{e^{-m_1(\mathcal{X})}}{k!} \int_{A^*} f(x_1) \cdots f(x_k) dm_1^{(k)}(x). \end{aligned}$$

В итоге для любого $A \subset \mathcal{M}_k$

$$\mathcal{P}_2(A) = e^{(m_1 - m_2)(\mathcal{X})} \int_A \phi(\eta) d\mathcal{P}_1(\eta). \quad (17)$$

Далее, в силу (17) для любого $A \subset \mathcal{M}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(A) &= e^{(m_1 - m_2)(\mathcal{X})} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A \cap \mathcal{M}_k} \phi(\eta) d\mathcal{P}_1(\eta) \\ &= e^{(m_1 - m_2)(\mathcal{X})} \int_A \phi(\eta) d\mathcal{P}_1(\eta). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\eta) = e^{(m_1 - m_2)(\mathcal{X})} \phi(\eta) = e^{(m_1 - m_2)(\mathcal{X})} \prod_{n=1}^k f(\tau_n),$$

где $\eta = \sum_{n=1}^k \delta_{\tau_n}$. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 2.

Достаточность. Обозначим $\mathcal{X}^* = \{x \in \mathcal{X}: f(x) \in [1 - \delta, 1 + \varepsilon]\}$, где $\varepsilon > 0$, а $\delta \in (0, 1)$. Рассмотрим семейство подмножеств $\{\mathcal{X}^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathcal{X}^i \subseteq \mathcal{X}^{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}^*$, $\mathcal{X}^i \nearrow \mathcal{X}^*$: $m_1(\mathcal{X}^i) < +\infty$, $m_2(\mathcal{X}^i) < +\infty$. Из

леммы 2 следует, что мера $\mathcal{P}_2$ на $\mathcal{M} | \mathcal{X}^i$ будет абсолютно непрерывна относительно меры $\mathcal{P}_1$ на том же пространстве. А из формулы (14) получаем плотность меры $\mathcal{P}_2$ относительно $\mathcal{P}_1$:

$$\frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu | \mathcal{X}^i) = e^{m_1(\mathcal{X}^i) - m_2(\mathcal{X}^i)} \prod_{j=1}^{k_i} f(\tau_j^\mu), \quad (18)$$

здесь $f(x) = dm_2(x)/dm_1(x)$, $\mu \in \mathcal{M}$ и $\mu | \mathcal{X}^i = \sum_{j=1}^{k_i} \delta_{\tau_j^\mu}$. Известно, что последовательность

$$\frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1 | \mathcal{X}^i) = e^{m_1(\mathcal{X}^i) - m_2(\mathcal{X}^i)} \prod_{j=1}^{k_i} f(\tau_j), \quad (19)$$

где $\mu_1 | \mathcal{X}^i = \sum_{j=1}^{k_i} \delta_{\tau_j}$, является мартингалом.

А значит, последовательность

$$-\ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1 | \mathcal{X}^i) = (m_2 - m_1)(\mathcal{X}^i) - \int_{\mathcal{X}^i} \ln f(x) d\mu_1(x)$$

является субмартингалом. Можно написать его разложение Дуба

$$\begin{aligned} -\ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1 | \mathcal{X}^i) &= \int_{\mathcal{X}^i} (f(x) - 1 - \ln f(x)) dm_1(x) \\ &\quad - \int_{\mathcal{X}^i} \ln f(x) d(\mu_1 - m_1)(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Лемма 3. Если выполняется условие

$$\int_{\mathcal{X}^*} \left(\sqrt{f(x)} - 1 \right)^2 dm_1(x) < +\infty,$$

то последовательность (20) равномерно интегрируема.

Доказательство. Будем проверять достаточное условие равномерной интегрируемости

$$\sup_i \mathbf{E} \left(-\ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1 | \mathcal{X}^i) \right)^2 < +\infty.$$

Для того чтобы оценить это выражение, нужно оценить математическое ожидание и дисперсию членов последовательности и воспользоваться формулой $\mathbf{E}\xi^2 = (\mathbf{E}\xi)^2 + \mathbf{D}\xi$.

Найдем математическое ожидание членов последовательности, пользуясь свойствами интегралов по мерам с независимыми приращениями:

$$\begin{aligned} -\mathbf{E} \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1 | \mathcal{X}^i) &= \int_{\mathcal{X}^i} (f(x) - 1 - \ln f(x)) dm_1(x) \\ &\quad + \mathbf{E} \int_{\mathcal{X}^i} \ln f(x) d(\mu_1 - m_1)(x) = \int_{\mathcal{X}^i} (f(x) - 1 - \ln f(x)) dm_1(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя то, что $(f - 1) - \ln f \asymp (f - 1)^2 \asymp (\sqrt{f} - 1)^2$ при $f \in [1 - \delta, 1 + \varepsilon]$, можем утверждать, что справедливо следующее неравенство:

$$- \mathbf{E} \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1} (\mu_1 | \mathcal{X}^i) \leq c(\delta, \varepsilon) \int_{\mathcal{X}^*} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1(x) < +\infty. \quad (22)$$

Теперь разберемся с дисперсиями членов последовательности:

$$\mathbf{D} \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1} (\mu_1 | \mathcal{X}^i) = \mathbf{D} \int_{\mathcal{X}^i} \ln f d(\mu_1 - m_1)(x) = \int_{\mathcal{X}^i} (\ln f)^2 dm_1(x).$$

Так же, как и раньше, воспользуемся тем, что при $f \in [1 - \delta, 1 + \varepsilon]$ справедливо $\ln f \asymp (f - 1) \asymp (\sqrt{f} - 1)$. В итоге получим, что дисперсии равномерно ограничены при том же условии, что и ожидания.

Из всего этого следует, что

$$\sup_i \mathbf{E} \left(- \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1} (\mu_1 | \mathcal{X}^i) \right)^2 < c(\delta, \varepsilon) \int_{\mathcal{X}^*} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1(x) < +\infty,$$

и в то же время равномерная интегрируемость последовательности (20). Лемма доказана.

Применяя теорему о сходимости субмартингалов (см. [8, с. 498]), можно утверждать, что с вероятностью 1

$$\ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1} (\mu_1 | \mathcal{X}^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left((m_1 - m_2)(\mathcal{X}^i) + \int_{\mathcal{X}^i} \ln f(x) d\mu_1(x) \right) \quad (23)$$

и что предел в правой части является плотностью $\mathcal{P}_2$ на $\mathcal{M} | \mathcal{X}^*$ относительно $\mathcal{P}_1$ на той же части пространства $\mathcal{M}$, а значит, и $\mathcal{P}_2 \ll \mathcal{P}_1$ там же.

На оставшейся части пространства $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*$ в силу условия (4) теоремы меры m_1 и m_2 конечны, так как справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_{\{f < 1 - \delta\}} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1(x) &\geq (\sqrt{1 - \delta} - 1)^2 \int_{\{f < 1 - \delta\}} dm_1(x), \\ \int_{\{f > 1 + \varepsilon\}} \left(\sqrt{\frac{1}{f}} - 1 \right)^2 dm_2(x) &\geq \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon}} - 1 \right)^2 \int_{\{1/f < 1/(1 + \varepsilon)\}} dm_2(x). \end{aligned}$$

Значит, опять можем воспользоваться леммой 2, т.е. $\mathcal{P}_2 \ll \mathcal{P}_1$ на пространстве $\mathcal{M} | \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*$. Наконец, пользуясь независимостью $\mu_i | \mathcal{X}^*$ и $\mu_i | \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*$, получаем $\mathcal{P}_2 \ll \mathcal{P}_1$ на всем $\mathcal{X}$. Докажем формулу для плотности. Пользуясь формулами (14), (23), можем записать

$$\begin{aligned} \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1} (\mu_1) &= (m_1 - m_2)(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*) + \int_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*} \ln f(x) d\mu_1(x) \\ &+ \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ (m_1 - m_2)(\mathcal{X}^i \cap \mathcal{X}^*) + \int_{\mathcal{X}^i \cap \mathcal{X}^*} \ln f(x) d\mu_1(x) \right\}. \end{aligned}$$

Далее, используя условие (4), можем преобразовать эту формулу

$$\begin{aligned} \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu_1) &= (m_1 - m_2)(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*) + \int_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^*} \ln f(x) d\mu_1(x) \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}^*} (1 - f + \ln f) dm_1(x) + \int_{\mathcal{X}^*} \ln f(x) d(\mu_1 - m_1)(x). \end{aligned}$$

Положив $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$, получим формулу (5).

Н е о б х о д и м о с т ь. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} (\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 dm &= \int_{\mathcal{X}^*} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1 \\ &\quad + \int_{\{x: f < 1 - \delta\}} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1 + \int_{\{x: f > 1 + \varepsilon\}} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1. \end{aligned}$$

Предположим, что интеграл $\int_{\{x: f > 1 + \varepsilon\}} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1$ расходится. Докажем, что тогда $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$ сингулярны. Поскольку справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\{x: f > 1 + \varepsilon\}} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1 &= \int_{\{x: f > 1 + \varepsilon\}} \left(\frac{1}{\sqrt{f}} - 1 \right)^2 dm_2 \\ &\leq m_2(\{x: f > 1 + \varepsilon\}), \end{aligned}$$

то $m_2(\{x: f > 1 + \varepsilon\}) = \infty$. Если $m_1(\{x: f > 1 + \varepsilon\}) < \infty$, то $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$ сингулярны, так как пуассоновская мера μ_2 в этом случае имеет бесконечное число нагрузок на этой части пространства, а μ_1 — конечное, значит, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$ сосредоточены на разных множествах. Таким образом, если $m_2(\{x: f > 1 + \varepsilon\}) = \infty$, то и $m_1(\{x: f > 1 + \varepsilon\}) = \infty$.

В этом случае рассмотрим такое семейство подмножеств множества $\{x: f > 1 + \varepsilon\}$, обозначим его $\{\mathcal{A}^n\}_{n=1}^{\infty}$, что $m_1(\mathcal{A}^n) > 2^n$. Так как $(dm_2/dm_1)(x) > 1 + \varepsilon$, то получаем $m_2(\mathcal{A}^n) > (1 + \varepsilon) m_1(\mathcal{A}^n) \forall n \in \mathbf{N}$.

Для каждого $\ell > 0$ рассмотрим множество мер

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\ell^{(1)} &= \left\{ \mu \in \mathcal{M}: \mu(\mathcal{A}^n) < (1 + \ell) m_1(\mathcal{A}^n) \right. \\ &\quad \left. \text{при всех достаточно больших } n \right\}. \end{aligned}$$

при всех достаточно больших n . Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 \left\{ \mu: \mu(\mathcal{A}^n) \geq (1 + \ell) m_1(\mathcal{A}^n) \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \mu_1(\mathcal{A}^n) \geq (1 + \ell) m_1(\mathcal{A}^n) \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \mu_1(\mathcal{A}^n) - m_1(\mathcal{A}^n) \geq \ell m_1(\mathcal{A}^n) \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ |\mu_1(\mathcal{A}^n) - m_1(\mathcal{A}^n)| \geq \ell m_1(\mathcal{A}^n) \right\} \\ &\leq \frac{\mathbf{D}\mu_1(\mathcal{A}^n)}{\ell^2(m_1(\mathcal{A}^n))^2} = \frac{m_1(\mathcal{A}^n)}{\ell^2(m_1(\mathcal{A}^n))^2} = \frac{1}{\ell^2 m_1(\mathcal{A}^n)} \leq \frac{1}{\ell^2 2^n}. \end{aligned}$$

Здесь мы применили неравенство Чебышева и тот факт, что дисперсия пуассоновской случайной величины равна ее параметру. Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли получаем

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{M}_\ell^{(1)}) = \mathbf{P} \{ \exists n_0: \forall n > n_0 \mu_1(\mathcal{A}^n) < (1 + \ell) m_1(\mathcal{A}^n) \} = 1. \quad (24)$$

Рассмотрим также множество

$$\mathcal{M}_\ell^{(2)} = \left\{ \mu \in \mathcal{M}: \mu(\mathcal{A}^n) > (1 - \ell) m_2(\mathcal{A}^n) \right. \\ \left. \text{при всех достаточно больших } n \right\}.$$

Снова используя неравенство Чебышева, получим

$$\mathcal{P}_2 \left\{ \mu: \mu(\mathcal{A}^n) \leq (1 - \ell) m_2(\mathcal{A}^n) \right\} \leq \frac{1}{\ell^2 m_2(\mathcal{A}^n)} \leq \frac{1}{(1 + \varepsilon) \ell^2 2^n}.$$

Таким образом, опять имеем

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_\ell^{(2)}) = \mathbf{P} \left\{ \exists n_0: \forall n > n_0 \mu_2(\mathcal{A}^n) > (1 - \ell) m_2(\mathcal{A}^n) \right\} = 1. \quad (25)$$

Теперь выберем ℓ таким, чтобы для любого n выполнялось неравенство $(1 + \ell) m_1(\mathcal{A}^n) < (1 - \ell) m_2(\mathcal{A}^n)$. Это можно сделать, взяв, например, $\ell = \varepsilon/(2 + \varepsilon)$, поскольку будет выполняться $(1 + \ell)/(1 - \ell) = \varepsilon + 1 < m_2(\mathcal{A}^n)/m_1(\mathcal{A}^n)$. При таком выборе ℓ $\mathcal{M}^{(1)} \cap \mathcal{M}^{(2)} = \emptyset$. А значит, из формул (24) и (25) следует, что меры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ сингулярны.

Если предположить, что $\int_{\{x: f < 1 - \delta\}} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1 = \infty$, то аналогичным способом придем к сингулярности меры $\mathcal{P}_2$ относительно $\mathcal{P}_1$.

Теперь докажем, что из $\mathcal{P}_2 \ll \mathcal{P}_1$ следует $\int_{\mathcal{X}^*} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1 < \infty$.

Так же как при доказательстве достаточности, рассмотрим такие множества $\{\mathcal{X}^i\}_{i=1}^\infty$ на пространстве $\mathcal{X}^*$, что $\mathcal{X}^i \subseteq \mathcal{X}^{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}^*$, $\mathcal{X}^i \nearrow \mathcal{X}^*$ и $m_1(\mathcal{X}^i) < +\infty$, $m_2(\mathcal{X}^i) < +\infty$, и обозначим

$$\xi_i = \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu|_{\mathcal{X}^i}), \quad \xi = \ln \frac{d\mathcal{P}_2}{d\mathcal{P}_1}(\mu|_{\mathcal{X}^*}).$$

Используя (21), получаем $\mathbf{E}\xi_i = \int_{\mathcal{X}^i} (\ln f(x) - (f(x) - 1)) dm_1(x)$. Понятно, что подынтегральная функция неположительна. Поэтому

$$|\mathbf{E}\xi_i| = \left| \int_{\mathcal{X}^i} (\ln f(x) - (f(x) - 1)) dm_1(x) \right| \\ = \int_{\mathcal{X}^i} |\ln f(x) - (f(x) - 1)| dm_1(x) \geq c \int_{\mathcal{X}^i} (f(x) - 1)^2 dm_1(x).$$

В последнем неравенстве мы использовали тот факт, что $|\ln f - (f - 1)| \geq c(f - 1)^2$, $c > 0$. Для дисперсии воспользуемся оценкой $|\ln f| \leq k|f - 1|$, $k = k(\delta) > 0$, верной при $f > 1 - \delta$:

$$\mathbf{D}\xi_i = \int_{\mathcal{X}^i} (\ln f(x))^2 dm_1(x) \leq k^2 \int_{\mathcal{X}^i} (f(x) - 1)^2 dm_1(x).$$

Значит, можно утверждать, что $\mathbf{D}\xi_i \leq k^2 |\mathbf{E}\xi_i|/c$. Наша ситуация описывается следующей леммой.

Лемма 4. Если $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность случайных величин и $\xi_i \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, а также $\mathbf{D}\xi_i \leq c|\mathbf{E}\xi_i| \forall i \in \mathbf{N}$, $c > 0$, то $\sup_i \mathbf{D}\xi_i < \infty$.

Доказательство. На самом деле мы докажем даже большее: то, что из условий леммы следует $\sup_i |\mathbf{E}\xi_i| < \infty$.

Предположим, что $\sup_i |\mathbf{E}\xi_i| = \infty$. Перейдем к подпоследовательности $\xi'_i = \xi_{m_i}$ такой, что $|\mathbf{E}\xi'_i| \rightarrow \infty$ и ξ'_i сходится п.н. Введем обозначение

$$\zeta_i = \left| \frac{\xi'_i}{\sqrt{|\mathbf{E}\xi'_i|}} - \frac{\mathbf{E}\xi'_i}{\sqrt{|\mathbf{E}\xi'_i|}} \right|^2.$$

Ясно, что $\zeta_i \rightarrow 0$ п.н.

Но по условию леммы $\mathbf{E}\zeta_i \leq c$, откуда с помощью леммы Фату получаем $\mathbf{E} \liminf_{i \rightarrow \infty} \zeta_i \leq c$. Таким образом, мы получили противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует

$$\sup_i \mathbf{D}\xi_i = \sup_i \int_{\mathcal{X}^i} (\ln f)^2 dm_1(x) = \int_{\mathcal{X}^*} (\ln f)^2 dm_1(x) < \infty,$$

что эквивалентно сходимости интеграла $\int_{\mathcal{X}^*} (\sqrt{f} - 1)^2 dm_1(x)$. Тем самым доказана необходимость условий теоремы для $\mathcal{P}_2 \ll \mathcal{P}_1$, а с ней и вся теорема.

Авторы признательны А. М. Вершику и Н. В. Цилевич за постановку задачи и интерес, проявленный к этой работе, а также рецензенту, указавшему более короткое доказательство леммы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsilevich N., Vershik A.* Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson-Dirichlet measures. — C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1999, v. 329, № 2, p. 163–168.
2. *Tsilevich N., Vershik A., Yor M.* Distinguished properties of the gamma process and related topics. — Prepublication № 575. Paris: Universités Paris VI & Paris VII, 2000.
3. *Mémin J., Shiryaev A. N.* Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroissements indépendants. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, v. 70, p. 67–89.
4. *Newman C. M.* The inner product of path space measures corresponding to random processes with independent increments. — Bull. Amer. Math. Soc., 1972, v. 78, p. 268–272.
5. *Gelfand I. M., Graev M. I., Vershik A. M.* Models of representations of current groups. — Representations of Lie Groups and Lie Algebras. Ed. by A. A. Kirillov. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1985, p. 121–179.
6. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbf{R})^\mathbb{Z}$, связанная с унитарной подгруппой. — Функц. анализ и его прил., 1983, т. 17, в. 2, с. 70–72.
7. *Скорород А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964, 278 с.
8. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 575 с.
9. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1; 2. М.: Наука, 1994, 544 с; 368 с.
10. *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А., Смородина Н. В.* Локальные свойства распределений стохастических функционалов. М.: Наука, 1995, 254 с.

Поступила в редакцию
1.III.2001