Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Г. Н. Петровская, Слабая сходимость одного функционала, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 779–784

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:30:36

14. Irle A. Games of stopping with infinite horizon. — Math. Methods Oper. Res., 1995, v. 42, p. 345–359.
15. Доманский В. К. Об одном классе игровых задач остановки последовательности сумм случайных величин. — Современные направления теории игр. Вильнюс: Мокслас, 1976, с. 86–93.
16. Прессман Э. Л., Соппин И. М. Игровые задачи оптимальной остановки. Существование и единственность точек равновесия. — Вероятностные проблемы управления в экономике. М.: Наука, 1977, с. 115–144.
17. Мазалов В. В., Кочетов Э. А. Игры с оптимальной остановкой случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 820–826.

Поступила в редакцию
21.III.2000

© 2001 г.

КРУГЛОВ В. М.* , ПЕТРОВСКАЯ Г. Н.*

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА¹⁾

Изучается функционал $T_n = (S_1^2 + \dots + S_n^2)/(nV_n^2)$, построенный по последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, где $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $V_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$. Пусть G — функция распределения случайной величины $\int_0^1 W^2(t) dt$, где $W(t)$, $t \in [0, 1]$, — винеровский процесс. Доказано, что функция распределения T_n слабо сходится к G при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда функция распределения случайной величины X_1 принадлежит области притяжения нормального закона и $EX_1 = 0$.

Ключевые слова и фразы: слабая сходимость, сходимость по вероятности, случайная величина, функция распределения.

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $V_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$. Положим $S_n/V_n = 0$, если $V_n = 0$. В статье [1] доказано, что последовательность случайных величин $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к случайной величине со стандартной нормальной функцией распределения Φ тогда и только тогда, когда $EX_1 = 0$ и распределение случайной величины X_1 принадлежит области притяжения нормального закона. Упомянутая статья [1] подводит определенный итог многочисленным исследованиям об асимптотическом поведении последовательности $\{X_n/V_n\}_{n \geq 1}$. Заинтересованный читатель может обратиться к списку литературы, приведенному в [1]. Отметим, что там не упомянута интересная, на наш взгляд, статья [2], в которой среди прочего указано необходимое и достаточное условие слабой сходимости функций распределения случайных величин S_n/V_n к Φ для независимых симметричных (необязательно одинаково распределенных) случайных величин.

Цель настоящей заметки показать, что существуют функционалы, отличные от S_n/V_n , слабая сходимость которых равносильна принадлежности функции распределения случайной величины X_1 области притяжения нормального закона. Мы подробно обсудим один такой функционал. Если нормирование функционалов производить не функциями от V_n , а положительными числами, то примеры таких функционалов и историю их возникновения можно найти в [3].

* МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 99-01-00846, 99-01-00847, 01-01-00644 и INTAS, грант 99-01317.

Известное определение принадлежности функции распределения случайной величины X_1 области притяжения нормального закона (см. [5, с. 185]) можно сформулировать следующим образом: $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{B_n} (S_n - \mathbf{E}S_n) < x \right\} = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^1, \quad (1)$$

для некоторой последовательности $\{B_n\}_{n \geq 1}$ положительных чисел. В силу теоремы 2 из [3] утверждение (1) равносильно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{B_n^2 n} \sum_{k=1}^n (S_k - \mathbf{E}S_k)^2 < x \right\} = G(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^1, \quad (2)$$

где $G(x)$ — функция распределения случайной величины, представимой в виде интеграла $\int_0^1 W^2(t) dt$ от винеровского процесса $W(t)$, $t \in [0, 1]$. По поводу вывода явного вида функции G см. [4]. Вид функции G также указан в [3].

Рассмотрим специальную последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ случайных величин, каждая из которых принимает только два значения ± 1 , причем каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. В этом случае имеет место (2) с $B_n^2 = n$, $\mathbf{E}S_n = 0$. Из приводимой ниже леммы 1 следует, что моменты любого порядка величин $(S_1^2 + \dots + S_n^2)/n^2$ сходятся к соответствующим моментам функции распределения G . Элементарный подсчет дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2 \right) = \int_0^\infty x dG(x), \\ \frac{7}{12} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2 \right)^2 = \int_0^\infty x^2 dG(x). \end{aligned}$$

Предметом нашего исследования будет функционал $T_n = (S_1^2 + \dots + S_n^2)/(nV_n^2)$, построенный по последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых одинаково распределенных случайных величин.

Теорема. Для того чтобы функции распределения случайных величин T_n слабо сходились к функции распределения G при $n \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения случайной величины X_1 принадлежала области притяжения нормального закона и выполнялось равенство $\mathbf{E}X_1 = 0$.

Нам понадобятся два утверждения, которые мы сформулируем в виде лемм.

Лемма 1. Если последовательность $\{T_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, то последовательность $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ также слабо компактна и

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^2 \right]^s = C(s) \leq 2(s^2)! \left(2 + \frac{8e}{3} \right)^{2s^2} M^{2s^2} \quad \forall s = 1, 2, \dots,$$

где M — некоторое положительное число.

Доказательство. Докажем, что слабая компактность последовательности $\{T_n\}_{n \geq 1}$ влечет слабую компактность последовательности $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$. Привлекая неравенство Коши–Буняковского, мы получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{nV_n} X_k \right)^2 &= \left(\frac{1}{nV_n} \sum_{k=1}^n S_k \right)^2 \leq \frac{1}{nV_n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2, \\ \left(\sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{nV_n} X_{n-k+1} \right)^2 &= \left(\frac{1}{nV_n} \sum_{k=1}^n (S_n - S_{n-k}) \right)^2 \leq \frac{1}{nV_n^2} \sum_{k=1}^n (S_n - S_{n-k})^2. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{n+1}{nV_n} S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{nV_n} X_k + \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{nV_n} X_{n-k+1}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2 \leq 2 \frac{1}{nV_n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2 + 2 \frac{1}{nV_n^2} \sum_{k=1}^n (S_n - S_{n-k})^2.$$

Обе случайные величины-слагаемые, стоящие справа, одинаково распределены. Поэтому $\mathbf{P}\{S_n^2 > xV_n^2\} \leq 2\mathbf{P}\{T_n > x/4\}$ для любого $x > 0$. Отсюда следует слабая компактность последовательности $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$, так как по предположению последовательность $\{T_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится.

В [1] (см. теорему 2.5) доказано, что следствием слабой компактности последовательности $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ являются следующие два утверждения:

$$\mathbf{E} \exp \left\{ \frac{(S_n/V_n)^2}{4(1+4e/3)^2 M^2} \right\} \leq 2, \quad M = \max \left\{ 1, \sup_{n \geq 1} \mathbf{E} \left| \frac{S_n}{V_n} \right| \right\} < \infty.$$

Поэтому для любых $1 \leq k \leq n$ и $l = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^{2l} = \mathbf{E} \left(\frac{V_k}{V_n} \frac{S_k}{V_k} \right)^{2l} \leq \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_k} \right)^{2l} \leq 2 \left(2 + \frac{8e}{3} \right)^{2l} M^{2l} l!$$

Из условия $m_1 + \dots + m_n = s$ следует, что не более s слагаемых удовлетворяют неравенству $m_i \geq 1$. Пусть $m_{i_1} \geq 1, \dots, m_{i_r} \geq 1$, $m_{i_1} + \dots + m_{i_r} = s$, $1 \leq r \leq s$. Привлекая неравенство Гёльдера, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left(\frac{S_1}{V_n} \right)^{2m_1} \dots \left(\frac{S_n}{V_n} \right)^{2m_n} \right] &= \mathbf{E} \left[\left(\frac{S_{i_1}}{V_n} \right)^{2m_{i_1}} \dots \left(\frac{S_{i_r}}{V_n} \right)^{2m_{i_r}} \right] \\ &\leq \left[\mathbf{E} \left(\frac{S_{i_1}}{V_n} \right)^{2rm_{i_1}} \dots \mathbf{E} \left(\frac{S_{i_r}}{V_n} \right)^{2rm_{i_r}} \right]^{1/r} \\ &\leq \left[\prod_{k=1}^r 2(rm_{i_k})! \left(2 + \frac{8e}{3} \right)^{2rm_{i_k}} M^{2rm_{i_k}} \right]^{1/r} \leq 2(s^2)! \left(2 + \frac{8e}{3} \right)^{2s^2} M^{2s^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^2 \right]^s &= \frac{1}{n^s} \sum_{m_1 + \dots + m_n = s} \frac{s!}{m_1! \dots m_n!} \mathbf{E} \left[\left(\frac{S_1}{V_n} \right)^{2m_1} \dots \left(\frac{S_n}{V_n} \right)^{2m_n} \right] \\ &\leq \frac{1}{n^s} \sum_{m_1 + \dots + m_n = s} \frac{s!}{m_1! \dots m_n!} 2(s^2)! \left(2 + \frac{8e}{3} \right)^{2s^2} M^{2s^2} = 2(s^2)! \left(2 + \frac{8e}{3} \right)^{2s^2} M^{2s^2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых неотрицательных целых чисел $m_2, \dots, m_r$ и r , таких, что $1 \leq r \leq 4$ и $1 + m_2 + \dots + m_r = 4$, выполняется неравенство

$$\left| \mathbf{E} \frac{X_1 X_2^{m_2} \dots X_r^{m_r}}{V_n^4} \right| \leq \sqrt{2} \left| \mathbf{E} \frac{X_1 X_2}{V_n^2} \right|^{1/2} \left| \mathbf{E} \frac{X_3^{m_2} X_4^{m_2} \dots X_{2r-1}^{m_r} X_{2r}^{m_r}}{V_n^6} \right|^{1/2}.$$

Кроме того, если последовательность $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, то

$$\sup_{n \geq 1} \left| n^{2(r-1)} \mathbf{E} \frac{X_3^{m_2} X_4^{m_2} \dots X_{2r-1}^{m_r} X_{2r}^{m_r}}{V_n^6} \right| < \infty.$$

Доказательство. Лемма представляет собой частный случай общих утверждений такого сорта из [1]. По поводу приведенных утверждений см. формулы (3.11) и (3.13) в только что упомянутой статье.

Доказательство теоремы. Достаточность. Предположим, что функция распределения случайной величины X_1 принадлежит области притяжения нормального закона и $\mathbf{E}X_1 = 0$. В этом случае, как было отмечено выше, справедливы формулы (1) и (2) с $\mathbf{E}S_n = 0$. По теореме Райкова-Гнеденко (см. теоремы 4 и 5 в [5], а также лемму 3.2 в [1]) последовательность $\{V_n/B_n\}_{n \geq 1}$ сходится по

вероятности к единице. Отсюда и из соотношения (2) следует, что функции распределения случайных величин T_n слабо сходятся к функции распределения G при $n \rightarrow \infty$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Сначала мы докажем, что функция распределения случайной величины X_1 принадлежит области притяжения нормального закона. Воспользуемся одним результатом из [6], согласно которому условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq k \leq n} X_k^2}{V_n^2} = 0 \quad \text{по вероятности}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция распределения случайной величины X_1 принадлежала области притяжения нормального закона. По неравенству Маркова

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k^2 > \varepsilon V_n^2 \right\} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E} \left(\frac{\max_{1 \leq k \leq n} X_k^2}{V_n^2} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left(\frac{X_k}{V_n} \right)^4, \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Поэтому достаточно доказать, что сумма моментов четвертого порядка сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Мы докажем это, анализируя поведение второго момента случайной величины T_n . Вычисление $\mathbf{E} T_n^2$ мы начнем с замечания, что случайные величины X_k/V_n , $k = 1, \dots, n$, одинаково распределены и, следовательно, $\mathbf{E}(X_1/V_n)^m = \mathbf{E}(X_k/V_n)^m$, $k = 1, \dots, n$, $m = 1, 2, \dots$. В частности, слагаемые в сумме (3) равны между собой. Случайные величины $X_i X_j / V_n^2$, $1 \leq i \neq j \leq n$, также одинаково распределены. Поэтому справедливо равенство

$$\mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} = \mathbf{E} \frac{X_k^2 X_l^2}{V_n^4}, \quad 1 \leq k \neq l \leq n.$$

Аналогично можно доказать, что для любых $1 \leq i \neq j \neq k \neq l \leq n$

$$\mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} = \mathbf{E} \frac{X_i X_j X_k^2}{V_n^4}, \quad \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4} = \mathbf{E} \frac{X_i X_j X_k X_l}{V_n^4}.$$

Далее мы будем пользоваться этими равенствами, не оговаривая это специально. Запишем второй момент случайной величины T_n в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{E} T_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^4 + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^2 \left(\frac{S_r}{V_n} \right)^2. \quad (4)$$

С помощью длинных, но несложных вычислений получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^4 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left[C_k^1 \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^4 + 6C_k^2 \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} + 8C_k^3 \mathbf{E} \frac{X_1 X_2^3}{V_n^4} \right. \\ &\quad \left. + 36C_k^3 \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} + 24C_k^4 \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4} \right] \\ &= \frac{n+1}{2n} \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^4 + \frac{n^2-1}{n} \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} + \frac{4(n^2-1)}{3n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2^3}{V_n^4} \\ &\quad + \frac{3(n^2-1)(n-2)}{2n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} + \frac{(n^2-1)(n-2)(n-3)}{5n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем второе слагаемое правой части в (4) в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^2 \left(\frac{S_r}{V_n} \right)^2 &= \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^4 \\ &\quad + \frac{4}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \frac{S_k^3 (S_r - S_k)}{V_n^4} + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \frac{S_k^2 (S_r - S_k)^2}{V_n^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поступая так же, как при вычислении (5), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^4 &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \mathbf{E} \left(\frac{S_k}{V_n} \right)^4 = \frac{n^2-1}{3n} \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^4 \\ &+ \frac{(n^2-1)(n-2)}{2n} \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} + \frac{2(n^2-1)(n-2)}{3n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2^3}{V_n^4} \\ &+ \frac{3(n^2-1)(n-2)(n-3)}{5n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} \\ &+ \frac{(n^2-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{15n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обратимся к подсчету второго слагаемого правой части равенства (6). Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{4}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \frac{S_k^3 (S_r - S_k)}{V_n^4} &= \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (r-k) \mathbf{E} \frac{S_k^3 X_{k+1}}{V_n^4} \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (r-k) \left[C_k^1 \mathbf{E} \frac{X_1 X_2^3}{V_n^4} + 3C_k^2 \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} + 6C_k^3 \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4} \right] \\ &= \frac{(n^2-1)(n+2)}{6n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2^3}{V_n^4} + \frac{(n^2-1)(n^2-4)}{10n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} \\ &+ \frac{(n^2-1)(n^2-4)(n-3)}{30n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нам осталось вычислить третье слагаемое правой части (6). Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < r \leq n} \mathbf{E} \frac{S_k^2 (S_r - S_k)^2}{V_n^4} &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (r-k) \mathbf{E} \frac{S_k^2 X_{k+1}^2}{V_n^4} \\ &+ \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (r-k)(r-k-1) \mathbf{E} \frac{S_k^2 X_{k+1} X_{k+2}}{V_n^4} = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (r-k) k \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} \\ &+ \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n [(r-k)k(k-1) + (r-k)(r-k-1)k] \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} \\ &+ \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (r-k)(r-k-1)k(k-1) \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4} \\ &= \frac{(n^2-1)(n+2)}{12n} \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} + \frac{(n^2-1)(n^2-4)}{15n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3^2}{V_n^4} \\ &+ \frac{(n^2-1)(n^2-4)(n-3)}{90n} \mathbf{E} \frac{X_1 X_2 X_3 X_4}{V_n^4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим K_n сумму всех слагаемых в (5), (7), (8), (9), кроме тех, которые содержат множители $\mathbf{E}(X_1/V_n)^4$ и $\mathbf{E}(X_1^2 X_2^2/V_n^4)$. Убедимся, что $K_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу лемм 1 и 2 для этого достаточно, чтобы $n^2 \mathbf{E}(X_1 X_2/V_n^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажем последнее соотношение. С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{E} \frac{V_n^2}{V_n^2} = \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \frac{X_k^2}{V_n^2} = n \mathbf{E} \frac{X_1^2}{V_n^2}, \\ \mathbf{E} T_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) \mathbf{E} \frac{X_1 X_2}{V_n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} + \left[\frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n-1}{2} \right] \mathbf{E} \frac{X_1 X_2}{V_n^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $n^2 \mathbf{E}(X_1 X_2 / V_n^2) \rightarrow 0$, так как $\mathbf{E} T_n \rightarrow \frac{1}{2}$ по лемме 1. Тем самым доказано, что $K_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из (4)–(9) следует, что величину $\mathbf{E} T_n^2$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E} T_n^2 = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n} \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^4 + \frac{(n^2 - 1)(7n + 2)}{12n} \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4} + K_n.$$

Воспользовавшись равенствами

$$1 = \mathbf{E} \left(\frac{V_n}{V_n} \right)^4 = \mathbf{E} \left[\frac{1}{V_n^4} \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 \right)^2 \right] = n \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^4 + n(n-1) \mathbf{E} \frac{X_1^2 X_2^2}{V_n^4},$$

мы перепишем величину $\mathbf{E} T_n^2$ в виде

$$\mathbf{E} T_n^2 = \frac{(n+1)(7n+2)}{12n^2} - \frac{n+1}{4} \mathbf{E} \left(\frac{X_1}{V_n} \right)^4 + K_n.$$

Отсюда следует, что $n \mathbf{E} (X_1 / V_n)^4 \rightarrow 0$, так как $\mathbf{E} T_n^2 \rightarrow \frac{7}{12}$ по лемме 1 при $n \rightarrow \infty$. Тем самым доказано, что сумма четвертых моментов в (3) стремится к нулю при неограниченном возрастании n и, следовательно, функция распределения случайной величины X_1 принадлежит области притяжения нормального закона.

Нам осталось доказать равенство $\mathbf{E} X_1 = 0$. Предположим, что $\mathbf{E} X_1 \neq 0$. Заметим, что имеет место (1). В силу теоремы 2 из [3] выполняется соотношение (2). Далее, по теореме Райкова–Гнеденко последовательность $\{V_n / B_n\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к единице. По предположению функции распределения случайных величин T_n слабо сходятся к G . Следовательно, функции распределения случайных величин $(S_1^2 + \dots + S_n^2) / (n B_n^2)$ также слабо сходятся к G . Из соотношений $k \mathbf{E} X_1 = \mathbf{E} S_k = S_k - (S_k - \mathbf{E} S_k)$, $k^2 (\mathbf{E} X_1)^2 \leq 2[S_k^2 + (S_k - \mathbf{E} S_k)^2]$ следует, что

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n B_n^2} (\mathbf{E} X_1)^2 = \frac{1}{n B_n^2} \sum_{k=1}^n k^2 (\mathbf{E} X_1)^2 \leq \frac{2}{n B_n^2} \left[\sum_{k=1}^n S_k^2 + (S_k - \mathbf{E} S_k)^2 \right].$$

Случайные величины, стоящие справа, образуют слабо компактную последовательность. Следовательно, последовательность $\{n B_n^{-1} \mathbf{E} X_1\}_{n \geq 1}$ ограничена. С другой стороны, известно (см. [7, с. 99 и 504]), что существует медленно меняющаяся последовательность вещественных чисел $\{l_n\}_{n \geq 1}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n / l_n \sqrt{n}) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (l_n / \sqrt{n}) = 0$. Поэтому $n / B_n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $n |\mathbf{E} X_1| / B_n \rightarrow \infty$ при неограниченном возрастании n . Мы пришли к противоречию с предположением, что $\mathbf{E} X_1 \neq 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giné E., Götze F., Mason D. M. When is the Student t -statistic asymptotically standard normal? — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 3, p. 1514–1531.
2. Егоров В. А. Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 643–650.
3. Круглов В. М. К принципу инвариантности. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 239–261.
4. Erdős P., Kac M. On certain limit theorems of the theory probability. — Bull. Amer. Math. Soc., 1946, v. 52, p. 292–302.
5. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, 264 с.
6. O'Brien G. L. A limit theorem for sample maxima and heavy branches in Galton–Watson trees. — J. Appl. Probab., 1980, v. 17, p. 539–545.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

Поступила в редакцию
5.II.2001