Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Нижние границы для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 785–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:31:48

© 2001 г.

НАГАЕВ С. В.*

НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Выводятся нижние оценки для вероятностей больших уклонений суммы независимых случайных величин в терминах хвостовых вероятностей для числа успехов в неоднородной схеме Бернулли. Эти оценки удобны, когда велико отношение Ляпунова, а также в случае ограниченных слагаемых.

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, большие уклонения, закон Пуассона, отношение Ляпунова, схема Бернулли, теорема Крамера.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $S = \sum_1^n X_j$.

В предположении, что $\mathbf{E} X_j = 0$, $\mathbf{E} X_j^2 < \infty$, $j = 1, \dots, n$, в статье [1] (см. также [2]) получена оценка

$$\mathbf{P}\{S > x\} \geq \frac{1}{2} \sum_1^n \mathbf{P}\{X_j > 2x\}, \quad x > 2B. \quad (1)$$

Здесь и ниже $B^2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} X_j^2$, $j = 1, \dots, n$.

С другой стороны, в [3] при дополнительном условии $\mathbf{E}|X_j|^3 < \infty$, анонсирована другая нижняя оценка, действующая при $1 < x < c_1/\Lambda$,

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} \geq (1 - \Phi(x)) e^{-c_2 \Lambda x^3} (1 - c_3 \Lambda x), \quad (2)$$

где Λ — отношение Ляпунова в терминах третьих моментов, c_j — некоторые положительные постоянные, причем $c_2 < 1$, $c_1 c_3 < 1$ (см. также [4]). Оценки (1) и (2) дополняют друг друга, но они не охватывают всех возможных случаев.

Во-первых, при $\Lambda \geq c_1$ интервал, в котором действует оценка (2), вырождается. Во-вторых, может случиться, что $\mathbf{P}\{X_j > 2B\} = 0$ для всех j и тогда оценка (1) оказывается тривиальной.

Действительно, пусть, например, X_j одинаково распределены,

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1\} = \mathbf{P}\{X_1 = -1\} = p, \quad \mathbf{P}\{X_1 = 0\} = 1 - 2p.$$

Очевидно, в этом случае $\Lambda = 1/\sqrt{2pn}$. Поэтому, если $np < 2/c_1^2$, то оценка (2) вообще неприменима, а оценка (1) дает тривиальный результат $\mathbf{P}\{S > x\} \geq 0$ при $np > 2$.

В уже цитированной работе [1] показано (см. контрпример на с. 757), что оценка вида

$$\mathbf{P}\{S > x\} < \max \left\{ e^{-\alpha x^2/2B^2}, \sum_1^n \mathbf{P}\{X_j > \beta x\} \right\},$$

где α и β — любые постоянные, не всегда верна на всей полуоси $x \geq 0$.

В настоящей работе выводятся нижние оценки для $\mathbf{P}\{S > x\}$, которые являются более точными, нежели оценки (1) и (2) именно в ситуации, когда отношение Ляпунова велико, а слагаемые X_j либо ограничены, либо их распределения имеют быстро убывающие хвосты.

Пусть $\xi(\bar{p})$ — число успехов в неоднородной схеме Бернулли с вероятностями успехов $p_1, p_2, \dots, p_n$, $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Введем обозначение $\mathbf{P}\{\bar{p}; x\} = \mathbf{P}\{\xi(\bar{p}) > x\}$.

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 99-01-00493.

Теорема 1. Пусть слагаемые X_j симметрично распределены и L — любое положительное число. Тогда для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{S > x\} \geq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n (1 - p_j(L)) \mathbf{P}\left\{\bar{p}(L); \frac{x}{L}\right\}, \quad (3)$$

где

$$\bar{p}(L) = \left(\frac{p_1}{1 - p_1}, \dots, \frac{p_n}{1 - p_n} \right), \quad p_j = p_j(L) = \mathbf{P}\{X_j \geq L\}.$$

Доказательство. Пусть независимые случайные величины $X'_1, \dots, X'_n$ определяются равенствами

$$X'_j = \begin{cases} X_j, & X_j < L, \\ L, & X_j \geq L, \end{cases}$$

и $S' = \sum_{j=1}^n X'_j$. Очевидно,

$$\mathbf{P}\{S > x\} \geq \mathbf{P}\{S' > x\}. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{X'_j \leq x\} = F_j + E(x - L) p_j(L),$$

где

$$F_j(x) = \begin{cases} \mathbf{P}\{X_j \leq x\}, & x < L, \\ \mathbf{P}\{X_j < L\}, & x \geq L; \end{cases} \quad E(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

В этих обозначениях

$$\mathbf{P}\{S' \leq x\} = \sum_0^n \sum' p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_l} F_{j_1} * F_{j_2} * \dots * F_{j_{n-l}} * E(x - lL), \quad (5)$$

где $\sum'$ означает суммирование по $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-l}$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ таким, что множества $j_1, j_2, \dots, j_{n-l}$ и $i_1, i_2, \dots, i_l$ не пересекаются.

Если $l > x/L$, то $F_{j_1} * F_{j_2} * \dots * F_{j_{n-l}}(x - lL) < F_{j_1} * F_{j_2} * \dots * F_{j_{n-l}}(0)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & F_{j_1} * F_{j_2} * \dots * F_{j_{n-l}}(\infty) - F_{j_1} * F_{j_2} * \dots * F_{j_{n-l}}(x - lL) \\ & \geq \mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{n-l} X_{j_m} \geq 0, \max_{1 \leq m \leq n-l} |X_{j_m}| < L\right\} > \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{n-l} q_{j_m}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $l > x/L$, $q_j = 1 - 2p_j$. Сравнивая (5) и (6), имеем

$$\mathbf{P}\{S' > x\} \geq \frac{1}{2} \sum_{l > x/L} \sum' \prod_{k=1}^l p_{i_k} \prod_{m=1}^{n-l} q_{j_m} = \frac{1}{2} \prod_1^n (1 - p_j) \mathbf{P}\left\{\xi(\bar{p}(L)) > \frac{x}{L}\right\}. \quad (7)$$

Из (4) и (7) следует утверждение теоремы.

Используя неравенство

$$\mathbf{P}\{|X^s| > 2x\} \leq 2\mathbf{P}\{|X| > x\}, \quad (8)$$

где X^s — симметризация X , мы получаем следующее следствие.

Следствие. Для любого положительного x

$$\mathbf{P}\{|S| > x\} > \frac{1}{2} \prod_1^n (1 - p_j(L)) \mathbf{P}\left\{\bar{p}(L), \frac{2x}{L}\right\}, \quad (9)$$

где

$$\bar{p}(L) = \left(\frac{p_1}{1 - p_1}, \dots, \frac{p_n}{1 - p_n} \right), \quad p_j = p_j(L) = \mathbf{P}\{X_j^s \geq L\}.$$

Доказательство. В силу (8)

$$\mathbf{P}\{|S| > x\} > \frac{1}{2} \mathbf{P}\{|S^s| > 2x\} = \mathbf{P}\{S^s > 2x\}.$$

Остается применить оценку (3).

Границы (3) и (9) содержат свободный параметр L . С ростом L вероятности $p_j(L)$ и, следовательно, произведение $\prod_{j=1}^n (1 - p_j(L))$ возрастает. Что касается вероятности $\mathbf{P}\{\bar{p}(L); x/L\}$ как функции от L , последняя убывает с ростом L . Поэтому в каждом конкретном случае возникает задача оптимизации границы.

Эта задача упрощается, если X_j одинаково распределены. Действительно, из (4) и (7) вытекает, что для одинаково распределенных и симметричных X_j

$$\mathbf{P}\{S > x\} \geq \frac{1}{2} \sum_{l > x/L} C_n^l p^l (1 - 2p)^{n-l}, \quad (10)$$

где $p = \mathbf{P}\{X_1 \geq L\}$. Если условие симметрии не выполняется, то

$$\mathbf{P}\{|S| > x\} \geq \frac{1}{4} \sum_{2x/L < l \leq n} C_n^l p^l (1 - 2p)^{n-l}, \quad (11)$$

где $p = \mathbf{P}\{X_1^s \geq L\}$.

Пусть η_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с постоянной вероятностью успеха p . Обозначим $m_0 = [np]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Лемма 1. Для любых n и $p < \frac{1}{2}$

$$\mathbf{P}\{\eta_n \geq m_0\} > \frac{1}{3}.$$

Доказательство. Пусть $b(n, m, p) = \mathbf{P}\{\eta_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{b(n, m_0 + j, p)}{b(n, m_0 - j, p)} &= \frac{(n - m_0 + j) \cdots (n - m_0 - j + 1)}{(m_0 + j) \cdots (m_0 - j + 1)} \left(\frac{p}{q}\right)^{2j} \\ &= \frac{n - m_0 + j}{m_0 + j} \left(\frac{n - m_0}{m_0}\right)^{2j} \prod_{l=1}^{j-1} \frac{1 - l^2/(n - m_0)^2}{1 - l^2/m_0^2} \left(\frac{p}{q}\right)^{2j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что $(n - m_0)/m_0 \geq q/p$. Далее

$$\frac{n - m_0 + j}{m_0 + j} = \frac{n - m_0}{m_0} \frac{1 + j/(n - m_0)}{1 + j/m_0} > \frac{q}{2p}.$$

Наконец, для любого $l \leq m_0$

$$\frac{1 - l^2/(n - m_0)^2}{1 - l^2/m_0^2} > 1.$$

Оценивая правую часть (12) с помощью вышеприведенных неравенств, мы видим, что $b(n, m_0 + j, p)/b(n, m_0 - j, p) > \frac{1}{2}$, $1 \leq j \leq m_0$. Следовательно,

$$\sum_{m_0+1}^{2m_0} b(n, m, p) > \frac{1}{2} \sum_0^{m_0-1} b(n, m, p) = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{m_0}^{\infty} b(n, m, p)\right).$$

Отсюда $\sum_{m_0}^{\infty} b(n, m, p) > \frac{1}{3}$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть X_j одинаково распределены с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c(\alpha, n)}{|x|^{\alpha+1}}, & 1 \leq |x| \leq n^{1/\alpha}, \\ 0, & |x| < 1, |x| > n^{1/\alpha}, \end{cases}$$

где $c(\alpha, n) = \alpha/2(1 - 1/n)$, $1 < \alpha < 2$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E} X_1^2 = \frac{2c(\alpha, n)}{2 - \alpha} (n^{2/\alpha-1} - 1), \quad \mathbf{E} |X_1|^3 = \frac{2c(\alpha, n)}{3 - \alpha} (n^{3/\alpha-1} - 1).$$

Отсюда

$$\Lambda = \frac{(2 - \alpha)^{3/2} (1 - n^{1-3/\alpha})}{(3 - \alpha) 2c^{1/2}(n, \alpha) (1 - n^{1-2/\alpha})}.$$

При больших n значение Λ близко к $c(\alpha) = (2 - \alpha)^{3/2}/(3 - \alpha)\sqrt{\alpha}$.

Это означает, что при достаточно больших n к $\mathbf{P}\{S > x\}$ оценка (2) неприменима. Что касается оценки (1), то она дает тривиальный результат. Исследуем теперь, что дает в рассматриваемом случае оценка (10). Очевидно, при $1 \leq L \leq n^{1/\alpha}$

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} = \frac{c(\alpha, n)}{\alpha} \left(\frac{1}{L^\alpha} - \frac{1}{n} \right). \quad (13)$$

Подчиним L условию

$$n\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} = 2 \frac{x}{L}. \quad (14)$$

В силу (13) это условие можно записать в виде

$$L^{1-\alpha} - \frac{L}{n} = \gamma \frac{x}{n}, \quad (15)$$

где $\gamma = 2\alpha/c(\alpha, n)$, $L \geq 1$. Функция $g(y) = y^{1-\alpha} - y/n$, $y > 0$, убывает с ростом y . Поэтому существует обратная функция $g^{-1}(z)$.

Заметим, что $g(y) > y^{1-\alpha}/2$, если $y < (n/2)^{1/\alpha}$. Это означает, что $g^{-1}(z) > (2z)^{1/(1-\alpha)}$, если $\infty > z > z_0 = 2^{-1/\alpha} n^{(1-\alpha)/\alpha}$, т.е. при $\gamma x/n > z_0$

$$L > \left(\frac{2\gamma x}{n} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (16)$$

Условие $L \geq 1$ будет, очевидно, выполнено, если $2\gamma x/n \leq 1$. Возвращаясь теперь к (13), мы заключаем, что при $z_0 \leq \gamma x/n \leq \frac{1}{2}$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} < c_1(\alpha, n) \left(\frac{4x^\alpha}{n} \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где } c_1(\alpha, n) = \left(\frac{\alpha}{c(\alpha, n)} \right)^{2-\alpha/(\alpha-1)}. \quad (17)$$

Заметим, что ввиду (13) $\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} < \frac{1}{3}$ при $L \geq 2$ и $n > 4$. Применяя неравенства (17) и $e^{-x-x^2/(1-x)^2} < 1 - x$, $0 < x < 1$, мы приходим к оценке

$$(1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq L\})^n > \exp \left\{ -2c_1(\alpha, n) \left(\frac{4x^\alpha}{n} \right)^{1/(\alpha-1)} \right\}, \quad (18)$$

справедливой для $n > 4$ при условии

$$\frac{\gamma x}{n} < 2^{-\alpha}. \quad (19)$$

Последнее в силу (16) обеспечивает условие $L \geq 2$.

В силу (10) и (18)

$$\mathbf{P}\{S > x\} > \frac{1}{2} \exp \left\{ -2c_1(\alpha, n) \left(\frac{4x^\alpha}{n} \right)^{1/(\alpha-1)} \right\} \sum_{l > x/L} C_n^l p_0^l(L) (1 - p_0(L))^{n-l}, \quad (20)$$

если $n > 4$ и выполнено условие (19). Здесь $p_0(L) = \mathbf{P}\{X_1 \geq L\}/(1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq L\})$. Из (15) следует $L < (\gamma x/n)^{1/(1-\alpha)}$. Отсюда

$$\frac{1}{L} > \left(\frac{\gamma x}{n} \right)^{1/(\alpha-1)} > z_0^{1/(\alpha-1)} > 2^{1/\alpha(\alpha-1)} n^{-1/\alpha}.$$

Таким образом, при $x \geq 2^{1/\alpha(\alpha-1)} n^{-1/\alpha}$

$$\frac{x}{L} \geq 1. \quad (21)$$

Из (14) и (21) вытекает, что

$$np_0(L) > n\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} > \frac{x}{L} + 1. \quad (22)$$

Комбинируя (20), (22) и лемму 1, мы заключаем, что при $n > 4$

$$\mathbf{P}\{S > x\} > \frac{1}{6} \exp \left\{ -2c_1(\alpha, n) \left(\frac{4x^\alpha}{n} \right)^{1/(\alpha-1)} \right\},$$

если $2^{1/\alpha(\alpha-1)} n^{1/\alpha} \leq x \leq 2^\alpha n/\gamma$.

Если $x > 2^\alpha n/\gamma$, то можно, конечно, положить $L = 2$, но в таком случае оценка (10) будет нетривиальной только для $x \leq 2n$, хотя носитель распределения случайной величины S совпадает с отрезком $|x| < n^{1+1/\alpha}$. Случай $x > 2^\alpha n/\gamma$ мы рассмотрим позже, после доказательства теоремы 2.

Для вычисления вероятности $\mathbf{P}\{\bar{p}(L); x/L\}$ в теореме 1 можно воспользоваться пуассоновским приближением. На эту тему написано довольно много работ. Наиболее интересными являются работы [5]–[7], в которых для пуассоновского приближения выводится аналог известной теоремы Крамера о больших отклонениях. В них рассматривается общая схема, в которую испытания Бернулли помещаются как частный случай. Однако с точки зрения практических вычислений результаты, полученные в [5]–[7], не совсем удобны.

Во-первых, коэффициенты ряда, в терминах которого описывается поправочный множитель, не оценены. Во-вторых, накладываются ограничения сверху на математическое ожидание случайной величины, распределение которой приближается законом Пуассона. Именно поэтому в настоящей работе выводится оценка снизу для хвоста биномиального распределения, которая свободна от указанных недостатков, хотя, с другой стороны, асимптотически не столь точна.

Теорема 2. Пусть с.в. X_j принимают значения L и 0 с вероятностями соответственно p_j и $1 - p_j$. Тогда при

$$\gamma L < x < \frac{\lambda L}{(1+\varepsilon)(1+\eta)} \left(\frac{\varepsilon}{p^*} + 1 \right) \quad (23)$$

справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{S > x\} > (1 - \rho(\varepsilon, \gamma, \eta)) \exp \left\{ \frac{1+2\eta}{L} \left(1 - \ln \frac{x}{L\lambda} + c(\varepsilon, \eta) \right) x - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \lambda \right\}, \quad (24)$$

где γ, η — любые положительные числа, $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\rho(\varepsilon, \gamma, \eta) = \frac{(1+\eta)(1+\varepsilon)}{\gamma\eta^2}, \quad c(\varepsilon, \eta) = \ln \frac{1-\varepsilon/2}{1+2\eta}, \quad p^* = \max_j p_j, \quad \lambda = \sum_1^n p_j.$$

Доказательство. Прежде всего введем некоторые обозначения. Положим

$$f_j(h) = \mathbf{E} e^{hX_j}, \quad a_j(h) = \frac{f'_j(h)}{f_j(h)}, \quad b^2(h) = \frac{d^2}{dh^2} \ln f_j(h).$$

Обозначим

$$A(h) = \sum_1^n a_j(h), \quad B^2(h) = \sum_1^n b_j^2(h).$$

Пусть F_{jh} — функция распределения, соответствующая характеристической функции $f_j(h + it)/f_j(h)$. Положим $F_h(x) = F_{1h} * F_{2h} * \dots * F_{nh}(x)$, $R(x) = \prod_1^n f_j(h)$. Нетрудно

видеть, что $A(h)$ и $B^2(h)$ суть математическое ожидание и дисперсия распределения F_h . Известно (см., например, [8, гл. 16, § 6]), что для любого $h > 0$

$$\mathbf{P}\{S > x\} = R(h) \int_x^\infty e^{-hu} dF_h. \quad (25)$$

Обозначим $h(x)$ корень уравнения $A(h) = x$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнено условие

$$(e^{hL} - 1)p^* < \varepsilon, \quad (26)$$

$A(h) = (1 + \eta)x$ и $x > \gamma L$. Тогда

$$B^2(h) < \gamma^{-1}(1 + \eta)(1 + \varepsilon)x^2. \quad (27)$$

Доказательство. Очевидно,

$$f(h) = pe^{hL} + q, \quad a(h) = \frac{pLe^{hL}}{q + pe^{hL}}, \quad b^2(h) = \frac{pqL^2e^{hL}}{(q + pe^{hL})^2}.$$

(мы опускаем здесь текущий индекс j у p и q). Далее

$$q + pe^{hL} = 1 + p(e^{hL} - 1) \geq 1. \quad (28)$$

Поэтому

$$B^2(h) < \lambda L^2 e^{hL}. \quad (29)$$

С другой стороны, в силу (28) и условия (26)

$$a(h) > \frac{pLe^{hL}}{1 + \varepsilon} \quad (30)$$

и, следовательно,

$$(1 + \eta)x = A(h) > \frac{\lambda Le^{hL}}{1 + \varepsilon}. \quad (31)$$

Из (29) и (31) следует, что $B^2(h) < (1 + \eta)(1 + \varepsilon)xL$. Остается воспользоваться условием $L < x/\gamma$. Лемма доказана.

Выясним теперь, при каких x функция $h(x)$ удовлетворяет условию (26). Ответ на этот вопрос дает лемма 3.

Лемма 3. Если

$$x \leq \frac{\lambda L}{1 + \varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{p^*}\right), \quad (32)$$

то для $h = h(x)$ выполняется неравенство (26).

Доказательство. Обозначим $h_1(x)$ корень уравнения $\lambda Le^{hL} = (1 + \varepsilon)x$. Положим $\varphi(h) = \lambda Le^{hL}/(1 + \varepsilon)$. Пусть h^* — наибольшее значение h , при котором выполняется условие (26). Очевидно, $x^* = \varphi(h^*)$ является наибольшим из x , для которых $h_1(x) = \varphi^{-1}(x)$ удовлетворяет (26). Нетрудно видеть, что

$$x^* = \lambda L \left(\frac{\varepsilon}{p^*} + 1 \right) (1 + \varepsilon)^{-1}.$$

В силу (30)

$$A(h) \geq \frac{\lambda Le^{hL}}{1 + \varepsilon} := \varphi(h),$$

если h удовлетворяет неравенству (26). Поэтому $h(x) = A^{-1}(x) \leq \varphi^{-1}(x) \leq h^*$, при $x \leq x^*$, а это эквивалентно утверждению леммы.

Приступим теперь непосредственно к выводу оценок (24). Для этого положим в неравенстве (26) $h = h((1 + \eta)x)$. Очевидно, $\int_x^\infty e^{-hx} dF_h(x) > e^{-(1+2\eta)xh} (F_h(x + 2\eta x) - F_h(x))$. В силу леммы 2 при $h = h((1 + \eta)x)$

$$F_h(x + 2\eta x) - F_h(x) > 1 - \frac{B^2(h)}{\eta^2 x^2} > 1 - \frac{(1 + \eta)(1 + \varepsilon)}{\gamma \eta^2}.$$

Таким образом,

$$\int_x^\infty e^{-hx} dF_h(x) > e^{-(1+2\eta)xh} \left(1 - \frac{(1+\eta)(1+\varepsilon)}{\gamma\eta^2}\right), \quad (33)$$

где $h = h((1+\eta)x)$. Используя (28) и оценку $1+y > e^{y-y^2/2}$, мы заключаем, что при условии (26)

$$R(h) > \exp\left\{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda(e^{hL} - 1)\right\}. \quad (34)$$

В силу леммы 3 функция $h((1+\eta)x)$ удовлетворяет неравенству (26), если для x выполнено условие (23). Из (25), (33), и (34) следует, что

$$\mathbf{P}\{S > x\} > (1-\rho) \exp\left\{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda(e^{hL} - 1) - (1+2\eta)xh\right\},$$

где $h = h((1+\eta)x)$, $\rho = \rho(\varepsilon, \gamma, \eta) = (1+\eta)(1+\varepsilon)/(\gamma\eta^2)$. Нетрудно видеть, что для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\min_h (\alpha e^{hL} - \beta x h) = \frac{\beta x}{L} - \frac{\beta x}{L} \ln \frac{\beta x}{L\alpha}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{S > x\} > (1-\rho) \exp\left\{\frac{1+2\eta}{L} \left(1 - \ln \frac{(1+2\eta)x}{(1-\varepsilon/2)\lambda L}\right) x - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda\right\},$$

а это эквивалентно утверждению теоремы.

Вернемся теперь к примеру, приведенному после леммы 1. В нем остался неисследованным случай $x > 2^{\alpha-2}n$. Применим к этому случаю теорему 2, положив для простоты $\eta = \varepsilon = 1$, $\gamma = 8$. Тогда из (10) и (24) следует неравенство

$$\mathbf{P}\{S > x\} > \frac{1}{4} (1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq L\})^n \exp\left\{\frac{3x}{L} \left(\ln \frac{\lambda L}{x} + 1 - \ln 6\right) - \frac{\lambda}{2}\right\}, \quad (35)$$

верное при условии

$$8L < x < \frac{\lambda L}{4} \left(1 + \frac{1}{p_0(L)}\right). \quad (36)$$

Здесь

$$p_0(L) = \frac{\mathbf{P}\{X_1 \geq L\}}{1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq L\}}, \quad \lambda = np_0(L).$$

Для каждого x положим $L = L(x) = 8x/n$. Для таких L при $n \geq 8$ выполняется условие (36). Вследствие (13) при $n \geq 4$

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} \leq \frac{2}{3} L^{-\alpha}. \quad (37)$$

С другой стороны, при $1 \leq L \leq (n/2)^{1/\alpha}$

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq L\} > \frac{1}{3} L^{-\alpha}. \quad (38)$$

Заметим, что в силу (38)

$$\frac{\lambda L}{x} = 8p_0(L) > 2L^{-\alpha}, \quad 1 \leq L \leq \frac{n^{1/\alpha}}{2}. \quad (39)$$

Далее, ввиду (37)

$$(1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq L\})^n > \exp\left\{-\frac{4}{3} nL^{-\alpha}\right\} = \exp\left\{-\frac{4}{3} 8^{-\alpha} n^{1+\alpha} x^{-\alpha}\right\} \quad (40)$$

и

$$\lambda < nL^{-\alpha}. \quad (41)$$

Комбинируя (35) и (39)–(41), мы получаем, что при $n/4 < x < 2^{-1/\alpha} 8n^{1+1/\alpha}$

$$P\{S > x\} > \frac{1}{4} \exp \left\{ -\frac{3n}{8} \left(\alpha \ln \frac{x}{n} + 3 \ln 2 + \ln 6 - 1 \right) - 2 \cdot 8^{-\alpha} n^{1+\alpha} x^{-\alpha} \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — *Ann. Probab.*, 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
2. *Нагаев С. В.* О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах. — *Матем. заметки*, 1983, т. 34, № 2, с. 309–313.
3. *Nagaev S. V.* Lower bounds on large deviation probabilities for sums of independent random variables. — Международная конференция «Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистики». Тезисы докладов, С.-Петербург, 1998, с. 186–190.
4. *Нагаев С. В.* Некоторые уточнения вероятностных неравенств. — *Вестник МГУ, Серия мат. и мех.*, № 6, 1996, с. 64–66.
5. *Статулявичус В. А., Алешкявичене А. К.* О больших уклонениях в пуассоновской аппроксимации. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, № 2, с. 460–470.
6. *Aleskeviciene A. K., Statulevicius V. A.* Large deviations in approximation by Poisson law. — *Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of the Sixth Vilnius Conference* / ed. B. Grigelionis et al: VSP/TEV, 1994, p. 1–18.
7. *Алешкявичене А. К., Статулявичус В. А.* Большие уклонения в степенных зонах. — *Успехи матем. наук*, 1995, т. 50, в. 5, с. 63–82.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию
8.II.1999

© 2001 г.

НОСКО В. П.*

ГОРИЗОНТ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ КОНУСОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНДА: ОДНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾

Исследуется горизонт $\xi_T(x)$ случайного поля $\zeta(x, y)$ прямых круговых конусов на плоскости. Предполагается, что центры оснований конусов находятся в точках $s_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, плоскости (X, Y) , образующих пуассоновский точечный процесс S с интенсивностью $\lambda_0 > 0$ в полосе $\Pi_T = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq T\}$, а высоты конусов $h_1, h_2, \dots$ равны $h_n = h_n^* + f(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, где $f(y)$ — возрастающая непрерывная функция на $[0, \infty)$, $f(0) = 0$, и $h_1^*, h_2^*, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, которые не зависят от пуассоновского процесса S и имеют функцию распределения $F(h)$ с плотностью $p(h)$.

Для некоторых вариантов выбора функции распределения $F(h)$ и функции тренда $f(y)$ получены предельные (при $T \rightarrow \infty$) одномерные распределения процесса $\xi_T(x)$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаборатория теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vnosko@nw.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Научной программы «Университеты России» (грант № 5388), РФФИ (грант № 98-01-00524) и The Bank of Sweden Tercentenary Foundation.