Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Носко, Горизонт случайного поля конусов при наличии тренда: одномерные распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 792–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:40:55

Комбинируя (35) и (39)–(41), мы получаем, что при $n/4 < x < 2^{-1/\alpha} 8n^{1+1/\alpha}$

$$P\{S > x\} > \frac{1}{4} \exp \left\{ -\frac{3n}{8} \left(\alpha \ln \frac{x}{n} + 3 \ln 2 + \ln 6 - 1 \right) - 2 \cdot 8^{-\alpha} n^{1+\alpha} x^{-\alpha} \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — *Ann. Probab.*, 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
2. *Нагаев С. В.* О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах. — *Матем. заметки*, 1983, т. 34, № 2, с. 309–313.
3. *Nagaev S. V.* Lower bounds on large deviation probabilities for sums of independent random variables. — Международная конференция «Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистики». Тезисы докладов, С.-Петербург, 1998, с. 186–190.
4. *Нагаев С. В.* Некоторые уточнения вероятностных неравенств. — *Вестник МГУ, Серия мат. и мех.*, № 6, 1996, с. 64–66.
5. *Статулявичус В. А., Алешкявичене А. К.* О больших уклонениях в пуассоновской аппроксимации. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, № 2, с. 460–470.
6. *Aleskeviciene A. K., Statulevicius V. A.* Large deviations in approximation by Poisson law. — *Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of the Sixth Vilnius Conference* / ed. B. Grigelionis et al: VSP/TEV, 1994, p. 1–18.
7. *Алешкявичене А. К., Статулявичус В. А.* Большие уклонения в степенных зонах. — *Успехи матем. наук*, 1995, т. 50, в. 5, с. 63–82.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию
8.II.1999

© 2001 г.

НОСКО В. П.*

ГОРИЗОНТ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ КОНУСОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНДА: ОДНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾

Исследуется горизонт $\xi_T(x)$ случайного поля $\zeta(x, y)$ прямых круговых конусов на плоскости. Предполагается, что центры оснований конусов находятся в точках $s_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, плоскости (X, Y) , образующих пуассоновский точечный процесс S с интенсивностью $\lambda_0 > 0$ в полосе $\Pi_T = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq T\}$, а высоты конусов $h_1, h_2, \dots$ равны $h_n = h_n^* + f(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, где $f(y)$ — возрастающая непрерывная функция на $[0, \infty)$, $f(0) = 0$, и $h_1^*, h_2^*, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, которые не зависят от пуассоновского процесса S и имеют функцию распределения $F(h)$ с плотностью $p(h)$.

Для некоторых вариантов выбора функции распределения $F(h)$ и функции тренда $f(y)$ получены предельные (при $T \rightarrow \infty$) одномерные распределения процесса $\xi_T(x)$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаборатория теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vnosko@nw.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Научной программы «Университеты России» (грант № 5388), РФФИ (грант № 98-01-00524) и The Bank of Sweden Tercentenary Foundation.

Ключевые слова и фразы: случайное поле, горизонт случайного поля, случайное поле конусов, предельное распределение, теория экстремальных значений.

Введение. Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ — множество точек $s_n = (x_n, y_n)$ на плоскости (X, Y) , заключенное в полосе $\Pi_T = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq T\}$, и $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_n, n = 1, 2, \dots\}$ — совокупность прямых круговых конусов, основания которых лежат на плоскости (X, Y) , центры оснований расположены в точках s_n , высоты конусов равны h_n , а углы при вершине одинаковы для всех конусов и равны 2ϑ , $0 < \vartheta < \pi/2$. Предполагается, что S — пуассоновский точечный процесс на полосе Π_T , функция интенсивности которого $\lambda(x, y)$ равна $\lambda_0 > 0$ для всех $(x, y) \in \Pi_T$. Мы будем также предполагать, что $h_1, h_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) неотрицательных случайных величин, которые не зависят от S и имеют функцию распределения $F(h)$ и плотность $p(h)$.

Боковая поверхность конуса $\mathcal{K}_n$ с центром основания в точке (x_n, y_n) задается уравнением

$$z_n(x, y) = \begin{cases} h_n - r_n(x, y) \operatorname{ctg} \vartheta & \text{для } r_n(x, y) \leq R_n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1)$$

где $r_n(x, y) = [(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2]^{1/2}$ и $R_n = h_n \cdot \operatorname{tg} \vartheta$ — радиус основания конуса. Мы называем случайное поле

$$\zeta(x, y) = \sup_n z_n(x, y), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

случайным полем конусов, а случайный процесс

$$\xi_T(x) = \sup_{0 \leq y \leq T} \zeta(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3)$$

горизонтом этого поля $\zeta(x, y)$ на полосе Π_T . Такого рода модели встречаются, например, в задачах, связанных с процессами шлифования. Если интерпретировать поле $\zeta(x, y)$ как модель абразивного инструмента с зернами конической формы, то можно представить, что это поле движется в направлении, параллельном оси OY (в сторону отрицательных значений), с постоянной скоростью v_1 и вырезает «дыру» (или «профиль») в плоскости (X, Z) . Тогда горизонт $\xi_T(x)$ поля $\zeta(x, y)$ есть просто верхняя граница этой дыры («эффективный профиль» поля $\zeta(x, y)$). Поведение траекторий процесса $\xi_T(x)$ при $T \rightarrow \infty$ было детально изучено в [1], [2].

Предположим теперь, что поле $\zeta(x, y)$ не только движется в направлении, параллельном оси OY (с постоянной скоростью $v_1 = 1$), но и перемещается в направлении, параллельном оси OZ (с переменной скоростью $v_2(t)$). В таком случае мы, по существу, имеем дело с движущейся поверхностью $\zeta_t^*(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty, 0 \leq t \leq T$, задаваемой соотношением

$$\zeta_t^*(x, y) = \begin{cases} \zeta(x, y + t) + f(t) & \text{для } -t \leq y \leq T - t, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $f(t) = \int_0^t v_2(t) dt$. Вертикальное сечение $\zeta_t^*(x, y)$ плоскостью $y = 0$ в момент t , $0 \leq t \leq T$, представляет собой случайный процесс $\zeta_t^*(x, 0) = \zeta(x, t) + f(t)$, $-\infty < x < \infty$, так что верхняя граница дыры в плоскости (X, Z) , вырезанной движущейся поверхностью $\zeta_t^*(x, y)$, описывается случайным процессом $\xi_T^*(x) = \sup_{0 \leq t \leq T} [\zeta(x, t) + f(t)]$. Мы называем процесс

$$\xi_T^*(x) = \sup_{0 \leq y \leq T} [\zeta(x, y) + f(y)]$$

эффективным профилем поля $\zeta(x, y)$ на полосе Π_T при наличии тренда $f(y)$. Аргументация, указанная в работах [3], [4], приводит нас к «модельному процессу» $\xi_T(x)$ для $\xi_T^*(x)$, который определяется теми же соотношениями (1)–(3), но только с h_n вида $h_n = h_n^* + f(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, где $h_1^*, h_2^*, \dots$ — последовательность н.о.р. неотрицательных случайных величин, которые не зависят от пуассоновского процесса S и имеют

те же самые функцию распределения $F(h)$ и плотность $p(h)$, что и ранее. Некоторые свойства траекторий этого модельного процесса были исследованы в [3], [4].

Далее мы будем рассматривать модифицированный модельный процесс $\xi_T^{**}(x) = \max(f(T), \xi_T(x))$, где $\xi_T(x)$ — модельный процесс, и будем называть модифицированный модельный процесс $\xi_T^{**}(x)$ *горизонтом случайного поля конусов* $\zeta(x, y)$ *при наличии тренда* $f(y)$. Дальнейшая часть работы посвящена исследованию предельных одномерных распределений (при $T \rightarrow \infty$) процесса $\xi_T^{**}(x)$ при некоторых вариантах выбора функции распределения $F(h)$ и функции тренда $f(y)$.

Для простоты мы будем предполагать в дальнейшем, что $\vartheta = \pi/4$.

Одномерные распределения горизонтов при отсутствии тренда. В этом разделе мы рассматриваем только случай $f(y) \equiv 0$, так что $h_n = h_n^*$, $n = 1, 2, \dots$, и $\xi_T^{**}(x) = \xi_T(x)$. Как следует из [2], асимптотическое поведение конечномерных распределений процесса $\xi_T(x)$ полностью определяется асимптотическим поведением одномерных распределений $\xi_T(x)$. В соответствии с [2],

$$\mathbf{P}\{\xi_T(x) \leq z\} = \begin{cases} \exp\left\{-2\lambda_0 T \int_z^\infty \bar{F}(z) dz\right\}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

для всех $-\infty < x < \infty$, так что достаточно исследовать асимптотическое поведение $\mathbf{P}\{\xi_T(0) \leq z\}$ при $T \rightarrow \infty$.

С использованием результатов Б. В. Гнеденко [5] в [4] были получены условия, достаточные для того, чтобы распределение $\xi_T(0)$ сходилась (при $T \rightarrow \infty$) к одному из распределений экстремальных значений, т.е. условия, при которых существуют функции $a(T) > 0$ и $b(T)$ такие, что для всех z

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{a(T)\xi_T(0) - b(T) \leq z\} = \Lambda(z), \quad (4)$$

где $\Lambda(z)$ — соответствующая функция распределения экстремальных значений. В [4] указаны и подходящие функции $a(T) > 0$, $b(T)$, при которых выполняется (4).

Например, если

$$F(h) = \begin{cases} 1 - \exp(-\beta h^2), & h \geq 0, \beta > 0, \\ 0, & h < 0, \end{cases} \quad (5)$$

(распределение Рэлея), то (4) выполняется с $\Lambda(z) = \exp\{-e^{-z}\}$, $-\infty < z < \infty$, и

$$a(T) = 2\sqrt{\beta \ln 2\lambda_0 T}, \quad (6)$$

$$b(T) = 2 \ln 2\lambda_0 T - \frac{1}{2} \ln \ln 2\lambda_0 T - \ln 2\sqrt{\beta}. \quad (7)$$

Для экспоненциального распределения

$$F(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta h}, & h \geq 0, \beta > 0, \\ 0, & h < 0, \end{cases} \quad (8)$$

(4) выполняется с той же $\Lambda(z)$ и с

$$a(T) \equiv \beta, \quad (9)$$

$$b(T) = \ln 2\lambda_0 T - \ln \beta. \quad (10)$$

Если F равномерно на отрезке $[0, H]$, то (4) выполняется с

$$\Lambda(z) = \begin{cases} \exp\{-z^2\}, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0, \end{cases}$$

$$a(T) = \sqrt{\frac{2\lambda_0 T}{H}}, \quad b(T) = H a(T). \quad (11)$$

Одномерные распределения горизонтов при наличии тренда. В этом разделе мы рассмотрим горизонт случайного поля $\zeta(x, y)$ при наличии тренда $f(y)$. Иначе говоря, мы рассматриваем процесс

$$\xi_T(x) = \max \left(f(T), \sup_{0 \leq y \leq T} \zeta(x, y) \right),$$

где $\zeta(x, y)$ — случайное поле, определяемое соотношениями (1) и (2), с h_n , имеющими вид $h_n = h_n^* + f(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, где $h_1^*, h_2^*, \dots$ — последовательность н.о.р. неотрицательных случайных величин, не зависящих от пуассоновского процесса S и имеющих функцию распределения $F(h)$ и плотность $p(h)$. (Для простоты мы используем здесь обозначение $\xi_T(x)$ вместо обозначения $\xi_T^{**}(x)$, употреблявшегося во введении.)

Из теоремы 1 в [4] вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_T(x) - f(T) \leq z\} &= \mathbf{P}\{\xi_T(x) \leq f(T) + z\} \\ &= \begin{cases} \exp\left\{-2\lambda_0 \int_{f(T)+z}^{\infty} dy \int_y^{\infty} dh \int_0^T p(h-f(t)) dt\right\}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь ситуация более сложная, чем в случае $f(y) \equiv 0$, так что мы будем исследовать предельные (при $T \rightarrow \infty$) распределения $\xi_T(x) - f(T)$ только для некоторых комбинаций $F(h)$ и $f(y)$.

Обозначая $\xi_T^{\circ}(x) = \xi_T(x) - f(T)$, $\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) = a(T) \xi_T^{\circ}(x) - b(T)$, $a(T) > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} &= \mathbf{P}\left\{\xi_T^{\circ}(x) \leq \frac{z+b(T)}{a(T)}\right\} \\ &= \begin{cases} \exp\left\{-2\lambda_0 \int_{f(t)+(z+b(T))/a(T)}^{\infty} dy \int_y^{\infty} dh \int_0^T p(h-f(t)) dt\right\}, & z \geq -b(T), \\ 0, & z < -b(T). \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

И опять вероятность $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\}$ не зависит от x .

Распределение Рэлея. Пусть $\bar{F}(h) = \exp(-\beta h^2)$, $h \geq 0$, $\beta > 0$. Как и в [3], [4], мы будем рассматривать такое распределение вместе с функцией тренда

$$f(y) = k[\ln(y+1)]^{\gamma}, \quad 0 < k < \infty, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Если обозначить

$$I_T(z) = 2\lambda_0 \int_{k[\ln(T+1)]^{\gamma} + (z+b(T))/a(T)}^{\infty} dh \int_0^T \exp\left\{-\beta(h - k[\ln(t+1)]^{\gamma})^2\right\} dt,$$

то тогда, в соответствии с (12),

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} = \begin{cases} \exp\{-I_T(z)\}, & z \geq -b(T), \\ 0, & z < -b(T). \end{cases}$$

Рассмотрим $I_{T-1}(z)$. Произведя подстановку $z = k[\ln(t+1)]^{\gamma}$ и полагая $h(T) = (z + b(T))/a(T)$, $h^*(T) = h(T-1)$, получаем

$$\begin{aligned} I_{T-1}(z) &= \frac{2\lambda_0}{\gamma} \int_{h^*(T)+k(\ln T)^{\gamma}}^{\infty} dh \int_0^{k(\ln T)^{\gamma}} \exp\left\{-\beta(h-z)^2\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{\left(\frac{z}{k}\right)^{1/\gamma}\right\} \left(\frac{1}{k}\right)^{1/\gamma} \frac{1}{\gamma} z^{(1-\gamma)/\gamma} dz \\ &= \frac{2\lambda_0}{\gamma} \left(\frac{1}{k}\right)^{1/\gamma} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta(\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^{\gamma})^2\right\} d\tilde{h} \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{k(\ln T)^\gamma} \exp\left\{-\beta z^2 + 2\beta [\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^\gamma] z + \left(\frac{z}{k}\right)^{1/\gamma}\right\} z^{\gamma^{-1}-1} dz, \quad (14)$$

где $\tilde{h} = h - (h^*(T) + k(\ln T)^\gamma)$.

Перепишывая внутренний интеграл в правой части (14) в виде

$$G(x) = \int_0^x g(t) \exp[S(t; x)] dt,$$

где $x = k(\ln T)^\gamma$, $g(t) = t^{(1-\gamma)/\gamma} \exp(-\beta t^2)$,

$$S(t; x) = \left(\frac{t}{k}\right)^{1/\gamma} + 2\beta \left\{ \tilde{h} + h^* \left(\exp \left(\left(\frac{x}{k}\right)^{1/\gamma} \right) \right) + x \right\} t,$$

и полагая $T \rightarrow \infty$, можно непосредственно убедиться в выполнении условий A_1 – A_4 леммы 4 в [4] (обобщающей теорему 2.6 из [6]) для каждого $\tilde{h} > 0$, если только $h(t) > 0$ для всех $t > 0$ (и, следовательно, $h^*(T) > 0$ для всех $T > 1$). Далее мы будем считать, что это условие выполнено. Поэтому в силу указанной леммы 4 для каждого $\tilde{h} > 0$

$$G(x) \sim \frac{g(x)}{S'_t(x; x)} \exp[S(x; x)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\begin{aligned} G(x) \sim & \frac{[k(\ln T)^\gamma]^{(1-\gamma)/\gamma} \exp\{-\beta k^2(\ln T)^{2\gamma}\}}{k\gamma^{-1}(\ln T)^{1-\gamma} + 2\beta[\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^\gamma]} \\ & \times \exp\left\{\ln T + 2\beta[\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^\gamma] k(\ln T)^\gamma\right\}, \end{aligned}$$

откуда, в соответствии с (14),

$$\begin{aligned} I_{T-1}(z) \sim & \frac{2\lambda_0}{k\gamma} \int_0^\infty \exp\left\{-\beta(\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^\gamma)^2\right\} \\ & \times \frac{(\ln T)^{1-\gamma} \exp\{-\beta k^2(\ln T)^{2\gamma}\}}{k\gamma^{-1}(\ln T)^{1-\gamma} + 2\beta[\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^\gamma]} \\ & \times T \exp\left\{2\beta[\tilde{h} + h^*(T) + k(\ln T)^\gamma] k(\ln T)^\gamma\right\} d\tilde{h}. \end{aligned}$$

Посредством подстановки $x = \tilde{h} + h^*(T)$ последнее сводится к

$$\begin{aligned} I_{T-1}(z) \sim & \frac{2\lambda_0}{k\gamma} T (\ln T)^{1-\gamma} \\ & \times \int_{h^*(T)}^\infty \left[(k\gamma)^{-1} (\ln T)^{1-\gamma} + 2\beta \left(x + k(\ln T)^\gamma \right) \right]^{-1} \exp(-\beta x^2) dx, \end{aligned}$$

и в силу условия $\gamma < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I_{T-1}(z) \sim & \frac{2\lambda_0}{k\gamma} T (\ln T)^{1-\gamma} \\ & \times \int_{h^*(T)}^\infty \left[(k\gamma)^{-1} (\ln T)^{1-\gamma} + 2\beta x \right]^{-1} \exp(-\beta x^2) dx. \end{aligned}$$

Пусть

$$a(T) = 2\sqrt{\beta \ln 2\lambda_0(T+1)}, \quad (15)$$

$$b(T) = 2 \ln 2\lambda_0(T+1) - \frac{1}{2} \ln \ln 2\lambda_0(T+1) - \ln 2\sqrt{\beta}. \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} h^*(T) &= \frac{z + 2 \ln 2\lambda_0 T - \frac{1}{2} \ln \ln 2\lambda_0 T - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \beta}{2\sqrt{\beta \ln 2\lambda_0 T}} \\ &= \sqrt{\beta^{-1} \ln 2\lambda} - \frac{\ln \ln 2\lambda + \ln \beta}{4\sqrt{\beta \ln 2\lambda}} + \frac{z - \ln 2}{2\sqrt{\beta \ln 2\lambda}}, \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda_0 T$.

Если T достаточно велико, то $h^*(T) < \sqrt{\beta^{-1} \ln 2\lambda}$, и мы можем записать

$$\begin{aligned} I_{T-1}(z) &= Q_{1,T} + Q_{2,T}(z) \\ &= \frac{2\lambda}{k\gamma} T (\ln T)^{1-\gamma} \beta^{-1/2} \int_{\sqrt{\ln 2\lambda}}^{\infty} \left[(k\gamma)^{-1} (\ln T)^{1-\gamma} + 2\sqrt{\beta} y \right]^{-1} \exp(-y^2) dy \\ &\quad + \frac{2\lambda_0}{k\gamma} T (\ln T)^{1-\gamma} \beta^{-1/2} \int_A^{\sqrt{\ln 2\lambda}} \left[(k\gamma)^{-1} (\ln T)^{1-\gamma} + 2\sqrt{\beta} y \right]^{-1} e^{-y^2} dy, \end{aligned}$$

где

$$A = \sqrt{\ln 2\lambda} - \frac{\ln \ln 2\lambda + \ln \beta}{4\sqrt{\ln 2\lambda}} + \frac{z - \ln 2}{2\sqrt{\ln 2\lambda}}.$$

Используя известное неравенство $1 - \Phi(x) < x^{-1} \varphi(x)$, где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$, соответственно, функция распределения и функция плотности стандартного нормального распределения $N(0, 1)$, $x > 0$, находим, что для достаточно больших T

$$Q_{1,T} < \frac{C \cdot T (\ln T)^{1-\gamma}}{(k\gamma)^{-1} (\ln T)^{1-\gamma} + 2\sqrt{\beta \ln 2\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln 2\lambda}} \exp(-\ln 2\lambda).$$

Правая часть имеет порядок $(\ln T)^{-1/2}$, так что $Q_{1,T} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Что касается $Q_{2,T}(z)$, то мы имеем (подробнее см. [7])

$$\begin{aligned} Q_{2,T}(z) &\sim \frac{2\lambda_0}{k\gamma} T (\ln T)^{1-\gamma} \beta^{-1/2} \frac{1}{(k\gamma)^{-1} (\ln T)^{1-\gamma}} \int_A^{\sqrt{\ln 2\lambda}} \exp(-y^2) dy \\ &\sim \frac{2\lambda}{\sqrt{\beta}} \frac{\exp\{-[A]^2\}}{2\{A\}} \sim e^{-z}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I_{T-1}(z) = e^{-z}, \quad z > -b(T),$$

и, поскольку $b(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, мы имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} = \exp\{-e^{-z}\}, \quad -\infty < z < \infty.$$

Пусть $a^*(T) = a(T-1)$ и $b^*(T) = b(T-1)$, $a(T)$ и $b(T)$ определены посредством (15) и (16). Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^*(T)}{a(T)} = 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^*(T)b(T) - a(T)b^*(T)}{a^*(T)} = 0,$$

так что мы можем использовать те же самые $a(T)$ и $b(T)$, что и в случае $f(y) \equiv 0$, т.е. $a(T)$ и $b(T)$, определенные посредством (6), (7) (см. замечание 3 в [2]).

Таким образом, в рассматриваемом случае $\xi_T(0) - f(T)$ имеет *то же самое* предельное распределение, что и в отсутствие тренда, и можно использовать *те же самые* функции $a(T)$ и $b(T)$, что и в последнем случае.

Экспоненциальное распределение. В этом разделе мы рассмотрим случай, когда h_1^* имеет экспоненциальное распределение, $F(h) = \exp(-\beta h)$, $h \geq 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$f(y) = kt^\gamma, \quad k > 0, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (17)$$

Пусть

$$a(T) \equiv \beta, \quad (18)$$

$$b(T) = \ln 2\lambda_0 T^* - \ln \beta, \quad (19)$$

где

$$T^* = \frac{1}{\beta k \gamma} T^{1-\gamma}. \quad (20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} &= \exp \left\{ -2\lambda_0 \int_{kT^{\gamma} + (z+b(T))/a(T)}^{\infty} dh \int_0^T \exp(-\beta(h - kt^{\gamma})) dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -2\lambda_0 \int_{kT^{\gamma} + (z+\ln 2\lambda_0 T^* - \ln \beta)/\beta}^{\infty} e^{-\beta h} dh \int_0^T \exp(\beta kt^{\gamma}) dt \right\}, \end{aligned}$$

$z > -b(T)$. Подстановка $\beta kt^{\gamma} = y$ дает

$$\int_0^T \exp(\beta kt^{\gamma}) dt = \left(\frac{1}{\beta k} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{\gamma} \int_0^{\beta k T^{\gamma}} \exp(y) y^{(1-\gamma)/\gamma} dy.$$

Применяя теорему 2.6 из [6] с $S(y) = y$, $f(y) = y^{(1-\gamma)/\gamma}$, получаем

$$\int_0^{\beta k T^{\gamma}} \exp(y) y^{(1-\gamma)/\gamma} dy \sim (\beta k T^{\gamma})^{(1-\gamma)/\gamma} \exp(\beta k T^{\gamma}),$$

так что

$$\int_0^T \exp(\beta kt^{\gamma}) dt \sim \frac{1}{\beta k \gamma} T^{1-\gamma} \exp(\beta k T^{\gamma}), \quad T \rightarrow \infty.$$

Комбинируя это соотношение с

$$\int_{kT^{\gamma} + (z+\ln 2\lambda_0 T^* - \ln \beta)/\beta}^{\infty} e^{-\beta h} dh = \frac{1}{\beta} \exp \left\{ -\beta \left(kT^{\gamma} + \frac{z + \ln 2\lambda_0 T^* - \ln \beta}{\beta} \right) \right\},$$

находим, что

$$2\lambda_0 \int_{kT^{\gamma} + (z+\ln 2\lambda_0 T^* - \ln \beta)/\beta}^{\infty} e^{-\beta h} dh \int_0^T \exp(\beta kt^{\gamma}) dt \sim \exp(-z)$$

для всех $z > -b(T)$. Поскольку $b(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, мы имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} = \exp\{-e^{-z}\}, \quad -\infty < z < \infty.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\xi_T(0) - f(T)$ опять имеет *то же самое* предельное распределение, что и в отсутствие тренда, но только здесь функция $b(T)$, определяемая (10), *заменяется* на (19).

Равномерное распределение. Рассмотрим теперь случай, когда распределение h_1^* равномерно на отрезке $[0, H]$, так что

$$p(h) = \begin{cases} H^{-1}, & h \in [0, H], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (21)$$

и

$$f(y) = kt^{\gamma}, \quad 0 < k < \infty, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (22)$$

Для такого случая мы положим $b(T) = H a(T)$, как и в случае с такой же $p(h)$, но с $f(y) \equiv 0$. Тогда, в соответствии с (12),

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} = \exp \left\{ -\lambda_0 \int_{kT^{\gamma} + H + z/a(T)}^{kT^{\gamma} + H} dy \int_y^{kT^{\gamma} + H} dh \int_{((h-H)/k)^{1/\gamma}}^T H^{-1} dt \right\},$$

если $0 < H + z/a(T) < H$, т.е. при $-Ha(T) < z < 0$ (поскольку $a(T) > 0$), и

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{\circ}(x) \leq z\} = \begin{cases} 0, & z \leq -Ha(T), \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$$

Мы хотим выбрать $a(T)$ таким образом, чтобы для некоторого $\alpha > 0$ и всех $-\infty < z < 0$

$$J_T(z) = \frac{2\lambda_0}{H} \int_{kT^\gamma + H + z/a(T)}^{kT^\gamma + H} dy \int_y^{kT^\gamma + H} dh \int_{((h-H)/k)^{1/\gamma}}^T dt \rightarrow (-z)^\alpha, \quad T \rightarrow \infty.$$

Но если $-Ha(T) < z < 0$, то тогда

$$\begin{aligned} J_T(z) &= \frac{2\lambda_0}{H} \int_{kT^\gamma + H + z/a(T)}^{kT^\gamma + H} dy \int_y^{kT^\gamma + H} \left[T - \left(\frac{h-H}{k} \right)^{1/\gamma} \right] dh \\ &= \frac{2\lambda_0}{H} k^2 \int_{T^\gamma + z/(ka(T))}^{T^\gamma} dt \int_t^{T^\gamma} [T - w^{1/\gamma}] dw = \frac{2\lambda_0}{H} k^2 \{J_{1,T}(z) - J_{2,T}(z)\}, \end{aligned}$$

где

$$J_{1,T}(z) = \int_{T^\gamma + z/(ka(T))}^{T^\gamma} dt \int_t^{T^\gamma} T dw = \frac{1}{2k^2 a^2(T)} T z^2,$$

в то время как

$$\begin{aligned} J_{2,T}(z) &= \int_{T^\gamma + z/(ka(T))}^{T^\gamma} dt \int_t^{T^\gamma} w^{1/\gamma} dw \\ &= \frac{\gamma+1}{\gamma} \left\{ -\frac{z}{ka(T)} T^{1+\gamma} - \frac{\gamma}{2\gamma+1} T^{1+2\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2\gamma+1} T^{1+2\gamma} \left(1 + \frac{z}{ka(T) T^\gamma} \right)^{(1+2\gamma)/\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Если мы выберем $a(T)$ так, чтобы $a(T) T^\gamma \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, то тогда

$$\begin{aligned} J_{2,T}(z) &= \frac{\gamma+1}{\gamma} \left\{ -\frac{z}{ka(T)} T^{1+\gamma} - \frac{\gamma}{2\gamma+1} T^{1+2\gamma} + \frac{\gamma}{2\gamma+1} T^{1+2\gamma} \right. \\ &\quad \times \left[1 + \frac{1+2\gamma}{\gamma} \frac{z}{ka(T) T^\gamma} + \frac{1}{2} \frac{1+2\gamma}{\gamma} \frac{1+\gamma}{\gamma} \frac{z^2}{k^2 a^2(T) T^{2\gamma}} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \frac{1+2\gamma}{\gamma} \frac{1+\gamma}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \frac{z^3}{k^3 a^3(T) T^{3\gamma}} + \dots \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2k^2 a^2(T)} T z^2 + \frac{1}{6\gamma k^3 a^3(T) T^{1-\gamma}} z^3 + \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_T(z) &\sim \frac{2\lambda_0 k^2}{H} \left\{ \frac{1}{2k^2 a^2(T)} T z^2 - \frac{1}{2k^2 a^2(T)} T z^2 - \frac{1}{6\gamma k^3 a^3(T) T^{1-\gamma}} z^3 \right\} \\ &= \frac{\lambda_0 T^{1-\gamma}}{3k\gamma H a^3(T)} z^3, \quad T \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что если мы положим $a^3(T) = \lambda_0 T^{1-\gamma}/(3k\gamma H)$, то тогда $J_T(z) \sim -z^3$. Отсюда вытекает, что при выборе

$$a(T) = \sqrt[3]{\frac{\lambda_0}{3k\gamma H}} T^{(1-\gamma)/3}, \quad b(T) = Ha(T), \quad (23)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^2(x) \leq z\} = \begin{cases} \exp\{-(-z)^3\}, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае предельное распределение $\xi_T(0) - f(T)$ отличается от предельного распределения $\xi_T(0)$, соответствующего случаю $f(t) \equiv 0$.

Полученные результаты суммируются в следующей теореме.

Теорема. Пусть

$$\xi_T(x) = \max \left(f(T), \sup_{0 \leq y \leq T} \zeta(x, y) \right),$$

где $\zeta(x, y)$ случайное поле, определяемое соотношениями (1) и (2), с h_n , имеющими вид $h_n = h_n^* + f(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, где $h_1^*, h_2^*, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, не зависящих от пуассоновского процесса S и имеющих функцию распределения $F(h)$ и плотность $p(h)$. Пусть

$$\xi_T^\circ(x) = \xi_T(x) - f(T) \quad \text{и} \quad \tilde{\xi}_T^\circ(x) = a(T) \xi_T^\circ(x) - b(T).$$

(i) Если функция распределения $F(h)$ для h_1^* и функция тренда $f(y)$ определены соотношениями (5) и (13), то тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \tilde{\xi}_T^\circ(x) \leq z \right\} = \exp\{-e^{-z}\}, \quad -\infty < z < \infty,$$

выполняется с $a(T)$ и $b(T)$, определяемыми соотношениями (6) и (7).

(ii) Если функция распределения $F(h)$ для h_1^* и функция тренда $f(y)$ определены соотношениями (8) и (17), то тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \tilde{\xi}_T^\circ(x) \leq z \right\} = \exp\{-e^{-z}\}, \quad -\infty < z < \infty,$$

выполняется с $a(T)$ и $b(T)$, определяемыми соотношениями (18)–(20).

(iii) Если функция распределения $F(h)$ для h_1^* и функция тренда $f(y)$ определены соотношениями (21) и (22), то тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \tilde{\xi}_T^\circ(x) \leq z \right\} = \begin{cases} \exp\{-(-z)^3\}, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0, \end{cases}$$

выполняется с $a(T)$ и $b(T)$, определяемыми соотношениями (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Носко В. П. Горизонт случайного поля конусов на плоскости. Средняя частота изломов горизонта. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 2, с. 259–269.
2. Носко В. П. Слабая сходимостъ горизонта случайного поля конусов, заданного на расширяющейся полосе. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 4, с. 693–706.
3. Nosko V. P. The horizon of the random cone field under a trend. — Statist. Research Report № 13. Lund: University of Lund, 1992, 34 p.
4. Nosko V. P. The horizon of the random cone field under a trend. — Adv. Appl. Probab., 1994, v. 26, p. 597–615.
5. Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. — Ann. Math., 1943, v. 44, № 3, p. 423–453.
6. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.
7. Nosko V. P. The horizon of the random cone field under a trend: one-dimensional distributions. Research Report № 6. Umeå: Umeå University, 1996, 17 p.

Поступила в редакцию
12.X.1998