Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Рогозин, Предельная теорема для отношений функций концентрации, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 801–803

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:34:46

© 2001 г.

РОГОЗИН Б. А.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ¹⁾

Доказывается предельная теорема для отношений функций концентраций сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: решетчатое и нерешетчатое распределения, функция концентрации Леви, предельные теоремы для отношений.

Напомним, что невырожденное распределение F с характеристической функцией f нерешетчатое, если $|f(t)| < 1$ при $t \neq 0$, и решетчатое с шагом $h > 0$, если $|f(2\pi k/h)| = 1$ при $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, и $|f(t)| < 1$ для остальных значений t , а функция концентрации случайной величины S_n $Q(n, z) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leq S_n \leq x + z\}$, где $S_n = X_1 + \dots + X_n$ при $n = 1, 2, \dots$ и $\{X_1, X_2, \dots\}$ — последовательность независимых случайных величин с распределением F . С помощью предельных теорем для отношений вероятностей (см. [1, теоремы 2а, 2б]) доказывается предельная теорема для отношений функций концентрации.

Теорема. Если распределение F нерешетчатое, то при фиксированных $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ и $m = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n+m, z_1)}{Q(n, z_2)} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (1)$$

Если распределение F решетчатое с шагом h , то при фиксированных $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$ и $m = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n+m, z_1)}{Q(n, z_2)} = \frac{[z_1/h] + 1}{[z_2/h] + 1}, \quad (2)$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Доказательство. Для применения предельных теорем для отношений вероятностей, установим, что при $z > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln Q(n, z) = 0. \quad (3)$$

Для этого докажем лемму.

Лемма. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/z} |f(t)|^{n+1} dt / \int_0^{1/z} |f(t)|^n dt = 1$.

Доказательство. Введем последовательность плотностей p_n , $n = 1, 2, \dots$:

$$p_n(t) = \frac{|f(t)|^n}{\int_0^{1/z} |f(t)|^n dt}$$

при $0 \leq t \leq 1/z$ и $p_n(t) = 0$ для остальных значений t . Докажем, что при любом ε , $0 < \varepsilon < 1/z$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A(\varepsilon)} p_n(t) dt = 0, \quad (4)$$

где $A(\varepsilon) = [\varepsilon, 1/z]$, если F — нерешетчатое распределение, и

$$A(\varepsilon) = \left[\varepsilon, \frac{1}{z} \right] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k\pi}{h} - \varepsilon, \frac{2k\pi}{h} + \varepsilon \right],$$

* Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: rogozin@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-01130, 00-15-96178) и INTAS (проект 99-01317).

если F — решетчатое распределение с шагом h . Нетрудно заметить, что ввиду непрерывности f для заданного ε существует $\delta > 0$ такое, что $A(\varepsilon) \subset \{t: 0 \leq t \leq 1/z, |f(t)| \leq 1 - \delta\}$. Для этого δ имеет место неравенство

$$\int_0^{1/z} |f(t)|^n dt \geq l \left(B \left(\frac{\delta}{2} \right) \right) \left(1 - \frac{\delta}{2} \right)^n, \quad (5)$$

где $B(\delta/2) = \{t: 0 \leq t \leq 1/z, |f(t)| > 1 - \delta/2\}$ и мера Лебега этого множества $l(B(\delta/2)) > 0$. Следовательно, так как $|f(t)| \leq 1 - \delta$ на $A(\varepsilon)$ и имеет место (5), то немедленно получаем соотношение (4). Из этого соотношения следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/z} |f(t)| p_n(t) dt = 1$. Последнее утверждение совпадает с утверждением леммы.

Из этой леммы немедленно получаем соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \int_0^{1/z} |f(t)|^n dt n^{-1} = 0. \quad (6)$$

Для функций концентрации (см. [2, лемма 2.2.1]) имеют место при некоторых положительных постоянных A_1 и A_2 следующие неравенства:

$$A_1 z \int_0^{1/z} |f(t)|^{2n} dt \leq Q(n, z) \leq A_2 z \int_0^{1/z} |f(t)|^n dt.$$

Применяя соотношение (6) к этим неравенствам, получим (3).

Если F — решетчатое распределение с шагом h , то, поскольку функция концентрации не зависит от сдвига случайной величины, без ограничения общности можно считать, что распределение F сосредоточено в точках $\{\dots, -h, 0, h, \dots\}$, т.е. является арифметическим с шагом h . Далее, выберем последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$, для которой $Q(n, h/2) = \mathbf{P}\{S_n = x_n\}$. В силу теоремы 2а [1], так как имеет место (3), для фиксированных $m = 0, 1, \dots$ и $z > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_n \leq S_{n+m} \leq x_n + z\} / Q(n, h/2) = [z/h] + 1$. Откуда вытекает, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_n \leq S_{n+m} \leq x_n + z\} &\leq Q(n+m, z) \leq \left(\left[\frac{z}{h} \right] + 1 \right) Q\left(n+m, \frac{h}{2}\right) \\ &\leq \left(\left[\frac{z}{h} \right] + 1 \right) Q\left(n, \frac{h}{2}\right), \end{aligned}$$

что $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n+m, z) / Q(n, h/2) = [z/h] + 1$; из последнего равенства следует соотношение (2).

Если F — нерешетчатое распределение, то можно выбрать последовательность вещественных чисел $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ таких, что $Q(n, z) = \mathbf{P}\{y_n \leq S_n \leq y_n + z\}$ (см. [2, следствие теоремы 1.1.3]). Для фиксированных $m = 0, 1, \dots$, $z > 0$, $\alpha > 0$ в силу соотношения (3) и теоремы 2б [1]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{y_n \leq S_{n+m} \leq y_n + \alpha z\}}{Q(n, z)} = \alpha. \quad (7)$$

Откуда при $\alpha = 1$, так как $Q(n+m, z) \leq Q(n, z)$, следует соотношение (1) при $z_1 = z_2 = z$. Таким образом, для доказательства соотношения (1) необходимо установить, что при фиксированных $z > 0$, $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n, \alpha z)}{Q(n, z)} = \alpha. \quad (8)$$

Если α — целое число, то (8) вытекает из неравенства $Q(n, \alpha z) \leq \alpha Q(n, z)$ и соотношения (7). Если $\alpha = k_1/k_2$, где k_1 и k_2 — целые положительные числа, то выберем y таким образом, чтобы $\alpha z = k_1 y$ и $z = k_2 y$, и так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (Q(n, \alpha z) / Q(n, y)) (Q(n, z) / Q(n, y))^{-1} = k_1/k_2$, то соотношение (8) доказано при рациональном $\alpha > 0$. Для доказательства соотношения (8) при иррациональном α используем рациональные приближения для α и соотношение (8), доказанное для рациональных α . Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kesten H. Sums of independent random variables — without moment conditions. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, № 3, p. 702–732.
2. Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 173 с.

Поступила в редакцию
29.I.2001

© 2001 г.

CACOULOS T.*, PAPADATOS N.**,
PAPATHANASIOU V.¹⁾

AN APPLICATION OF A DENSITY TRANSFORM AND THE LOCAL LIMIT THEOREM²⁾

Рассмотрим абсолютно непрерывную случайную величину X с конечной дисперсией σ^2 . Известно, что существует другая случайная величина X^* (которую можно рассматривать как преобразование X) с унимодальной плотностью, удовлетворяющая обобщенному ковариационному тождеству типа Стейна $\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 \mathbf{E}[g'(X^*)]$ для любой абсолютно непрерывной функции g с производной g' , такой, что $\mathbf{E}|g'(X^*)| < \infty$. С помощью этого преобразования получены верхние границы для расстояния по вариации между двумя абсолютно непрерывными случайными величинами X и Y . В качестве приложения предлагается доказательство локальной предельной теоремы для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в наиболее общей постановке.

Ключевые слова и фразы: преобразование плотности, локальная предельная теорема для плотностей, полная вариация.

1. Introduction. For an absolutely continuous (a.c.) random variable (r.v.) X with density f , mean μ , variance σ^2 , and support $S(X)$ (through this paper we will always mean the support of an absolutely continuous r.v. X with density f to be the set $S(X) = \{x: f(x) > 0\}$), consider the r.v. X^* with density f^* given by the relation

$$f^*(x) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^x (\mu - t)f(t) dt = \frac{1}{\sigma^2} \int_x^{\infty} (t - \mu)f(t) dt. \quad (1.1)$$

The following known properties of X^* (see [9] or [15]) will be used in the sequel.

Lemma 1.1. (i) *The density f^* is unimodal and absolutely continuous with mode μ and maximal value $f^*(\mu) = \mathbf{E}|X - \mu|/(2\sigma^2)$.*

(ii) *For any absolutely continuous function g such that $\mathbf{E}|g'(X^*)| < \infty$,*

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 \mathbf{E}[g'(X^*)]. \quad (1.2)$$

Moreover, X^ is characterized by this property.*

* University of Athens, Department of Mathematics, Panepistemiopolis, 157 84 Athens, Greece.

** University of Cyprus, Department of Mathematics and Statistics, P. O. Box 20537, Nicosia 1678, Cyprus.

¹⁾ Part of this work was done when the author was visiting the University of Cyprus.

²⁾ Research partially supported by the Ministry of Industry, Energy and Technology of Greece, grant 1369.