Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Рецензия на книгу: Bass Richard F.
“Diffusions and Elilptic Operators”, *Теория вероятн.
и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 4, 818–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:04:41

оценивание параметров в распределении экстремального значения.

Глава 7 посвящена линейным временным рядам, шумы которых имеют тяжелые хвосты (введение в теорию временных рядов, авторегрессионные процессы с шумами, не имеющими конечной дисперсии, оценка автокорреляционной функции, периодограммы, задачи оценки параметров для авторегрессии со скользящим средним). В этой главе также затрагиваются нелинейные авторегрессионные модели с тяжелыми хвостами такие, как ARCH-модели.

В гл. 8 обсуждаются специальные предметы такие, как индекс экстремальности, т.е. величина, характеризующая связь между зависимостью и экстремальным поведением в модели, индекс больших выплат, т.е. мера вклада больших выплат в конечную сумму, вопрос о том, когда и как случается разорение в традиционных крамеровских предположениях и в случае больших выплат, бессрочные ренты и ARCH-процессы, свойства самой длительной серии успехов, договоры перестрахования, устойчивые процессы.

В четырех приложениях приведены сведения о типах сходимости (приложение 1), о слабой сходимости в метрических пространствах (приложение 2), о правильном изменении и субэкспоненциальности (приложение 3) и сведения из теории восстановления (приложение 4).

Книга содержит обширный и удобный в использовании вспомогательный материал: список литературы содержит 646 наименований, в алфавитный указатель входит более 1000 терминов.

Читатель, желающий не только изучить теорию экстремальных событий, но и найти иллюстрации ее применения, например, на основе величин 4580 страховых выплат по портфелю страхования от огня или данных о ежедневной логарифмической доходности по акциям компании БМВ за период с 2 января 1973 г. по 23 июля 1996 г., с интересом ознакомится с этой книгой.

12.11.2001 г.

В. К. Малиновский

B a s s R i c h a r d F. Diffusions and Elliptic Operators. Probability and Applications. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, xiv+232 p.

Одним из интересных направлений развития современных математических методов является взаимопроникновение и взаимообогащение теории вероятностей и теории дифференциальных уравнений. Надо сказать, что эта тематика нашла довольно широкое отражение в литературе. Достаточно вспомнить как книги [1]–[3], вышедшие довольно давно и ставшие уже классическими, так и монографии [4]–[5], появившиеся в последние годы. Однако эти издания предназначены, как правило, тем читателям, которые имеют достаточно глубокие знания в теории вероятностей или, если быть более точным, в теории стохастических дифференциальных уравнений и теории мартингалов. Рецензируемая книга имеет несколько иную направленность. Ее цель — ознакомить широкий круг читателей, в том числе не имеющих специального вероятностного образования, с методами теории вероятностей, которые могут оказаться полезными при исследовании свойств решений различных классов уравнений в частных производных.

Остановимся на содержании книги более подробно.

Первая глава «Стохастические дифференциальные уравнения» имеет вводный характер и содержит основные сведения из теории вероятностей: определения мартингала, локального мартингала, броуновского движения, стохастического дифференциального уравнения (для случая n переменных), теорему Гирсанова, определение и простейшие свойства интеграла Стратоновича, потракторные свойства стохастических дифференциальных уравнений.

Вторая глава «Представления решений» является, по сути дела, оправданием к написанию книги. Прочитав ее, даже неискушенный читатель сможет оценить мощь

и возможности вероятностных идей. Основное внимание в этой главе, впрочем, как и в последующих, уделяется уравнениям, включающим в себя операторы $\mathcal{L}$ вида

$$\mathcal{L}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, \quad (1)$$

где

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) y_i y_j \geq \Lambda(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^d y_i^2 \quad (2)$$

для некоторой функции $\Lambda(\mathbf{x})$ при всех $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d$.

Не касаясь проблем существования и единственности, а заранее предполагая, что решения рассматриваемых уравнений существуют и обладают определенной степенью гладкости, автор дает вероятностные представления в терминах математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов для решений уравнения Пуассона в ограниченной и неограниченной областях, уравнения Шредингера, задач Дирихле, Коши, Неймана, а также обсуждает вопрос существования фундаментального решения для сопряженных операторов.

В главе III «Регулярность решений» при помощи метода возмущений доказывается, что упомянутые выше уравнения имеют решения, обладающие необходимой степенью гладкости, и тем самым устанавливается, что вероятностные представления предыдущей главы для решений этих уравнений действительно справедливы.

В главе IV «Одномерные диффузионные процессы» освещены вопросы, относящиеся к естественной временной шкале регулярных диффузионных процессов, в частности, указаны методы нахождения естественной шкалы в терминах решений дифференциальных уравнений, связанных с соответствующими диффузионными процессами.

В главе V «Операторы недивергентного вида» рассматриваются равномерно эллиптические диффузионные операторы вида (1), удовлетворяющие дополнительным условиям: $\sup_i \|b_i\|_\infty \leq \Lambda_1$,

$$\Lambda_2 \sum_{i=1}^d y_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) y_i y_j \leq \Lambda_2^{-1} \sum_{i=1}^d y_i^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d, \quad (3)$$

для некоторых констант Λ_1, Λ_2 . Здесь особое внимание уделено теореме Крылова об аппроксимации резольвент и версии Крылова–Санова неравенства Харнака для положительных $\mathcal{L}$ -гармонических функций.

В главе VI «Мартингальные проблемы» рассматриваются вопросы существования и единственности решения мартингальной проблемы для равномерно эллиптических диффузионных операторов $\mathcal{L}$.

В главе VII «Операторы дивергентного вида» изучаются равномерно эллиптические диффузионные операторы, удовлетворяющие условию (3) и имеющие вид

$$\mathcal{L}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

где $a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x})$ для всех i, j и $\mathbf{x}$. Понятно, что если функции $a_{ij}(\mathbf{x})$ являются гладкими, то указанные операторы являются частными случаями операторов, исследованных в главе V. Однако специфическая форма операторов (4) позволяет получать оценки сверху и снизу для переходных плотностей диффузионных процессов, соответствующих таким операторам, и без предположений о гладкости функций a_{ij} . Именно этим вопросам и посвящена глава VII.

Заключительная глава носит название «Исчисление Малливена». Эта тема заслуживает по крайней мере монографии. Поэтому автор концентрируется лишь

на применении исчисления Маллиена к доказательству гладкости по u переходных плотностей $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ процессов, соответствующих операторам $\mathcal{L}$ с гладкими коэффициентами. Существуют два основных подхода к решению этой задачи: метод, опирающийся на теорему Гирсанова, и метод, использующий оператор Орштейна–Уленбека. Оба метода достаточно подробно обсуждаются в рассматриваемой главе.

Конечно в книге учебного характера трудно охватить все аспекты взаимообогащения теории вероятностей и теории дифференциальных уравнений в частных производных, но изучив ее, читатель несомненно будет подготовлен к чтению более сложных книг, в той или иной мере касающихся данной области.

20.I.2000 г.

В. А. Ватутин

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
2. Stroock D. W., Varadhan S. R. S. Multidimensional Diffusion Processes. New York: Springer-Verlag, 1979, 338 p.
3. Ватанабе Ш., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
4. Dawson D. A., Perkins E. A. Historical Processes. — Mem. Amer. Math. Soc., 1991, v. 93, № 454, 179 p.
5. Dynkin E. B. An Introduction to Measure-Valued Processes. CRM Monographs Series, 6, Providence: Amer. Math. Soc., 1994, 134 p.