Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Вакуленко, А. С. Монин, Об оценке мульти-
модальных спектров временных рядов, *Теория ве-
роятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 417–
426

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3893>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 07:05:42

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ**

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 46
Выпуск 3, 2001 год
июль, август, сентябрь

© 2001 г. ВАКУЛЕНКО Н. В., МОНИН А. С.*

**ОБ ОЦЕНКЕ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ СПЕКТРОВ
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ¹⁾**

Оценки мультимодальных спектров случайных последовательностей рассматриваются на примере дендрохронологических рядов (ДХР). Эти ряды представляются в виде сумм сглаженной компоненты, спектр которой оказывается в этом случае пропорциональным частоте в степени $-\frac{1}{3}$, и налагающихся на нее нескольких слабо выраженных частных максимумов. Лучшей выраженности этих максимумов можно добиться, рассматривая результаты скользящего сглаживания по времени с различными окнами сглаживания и строя спектры сглаженного ряда. При этом выявляются 7 максимумов с периодами около 2.7, 4.7, 23.7, 60, 120, 180 и 745 лет.

Ключевые слова и фразы: стационарные случайные последовательности, спектры, дендрохронологические ряды.

У случайных временных рядов, встречающихся в природе и в технике, частные спектры нередко имеют один, два или несколько максимумов. Они называются, соответственно, унимодальными, бимодальными и мультимодальными. Эмпирическая оценка периодов, соответствующих этим максимумам, позволяет выявить механизмы колебательных процессов в генерирующих эти ряды системах. Одним из способов, позволяющих выявить эти максимумы и соответствующие им периоды, является аппроксимация их спектров рациональными функциями от частоты. Однако такая аппроксимация не всегда может быть достаточно точной, и необходимые для нее расчеты оказываются громоздкими, особенно в случаях, когда количество максимумов заранее неизвестно. В таких случаях желательно использовать те или иные упрощенные

*Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Нахимовский просп., 38, 117218 ГСП-7, Москва, Россия; e-mail: amonin@sio.rssi.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-05-64142.

процедуры. В настоящей статье эта проблема будет рассматриваться на примере дендрохронологических рядов (ДХР), являющихся одним из наиболее информативных видов климатических рядов.

Первичной характеристикой климата справедливо считается поле температуры приземного воздуха. Однако прямые данные о его значениях в прошлом охватывают всего лишь несколько столетий, чего совершенно недостаточно для оценки сколько-нибудь долгопериодных колебаний климата. Для таких оценок приходится использовать те или иные заменители. Для выявления климатических циклов с длительностями от десятков до тысяч лет наиболее подходящими представляются ДХР (т.е. ряды ширин годовичных колец деревьев), отражающие, кстати говоря, колебания не только температуры воздуха, но также и количества осадков. Однако эти ряды в цифровом виде, пригодном для их детальной статистической обработки, до сих пор, как правило, не публиковались, а сохранялись лишь у их авторов. В настоящее время это положение резко улучшилось в связи с опубликованием в Интернете Международного банка данных о кольцах деревьев (МБДКД), содержащего более 6000 рядов измерений ширин годовичных колец деревьев, в том числе 3 275 ДХР.

Девять наиболее длинных ДХР в МБДКД имеют длины от 8 тысяч до 1 500 лет. Два самых длинных ряда следующие: «Тропа Мафусайла», Калифорния, $37^{\circ}26'$ с.ш., $118^{\circ}10'$ з.д., остистые сосны, длительность 7 979 лет, автор Д. Грейбилл; «Хозяин Белых Гор», Калифорния, $37^{\circ}24'$ с.ш., $118^{\circ}10'$ з.д., остистые сосны, 7 103 лет, С. Фергесон, Е. Шуман, Г. Фриттс. Заметим, что дальнейшее пополнение МБДКД длинными ДХР представляется весьма желательным.

Значения ДХР даются не в ширинах годовичных колец деревьев, а в их аномалиях относительно биологических возрастных норм роста деревьев — так называемых «индексах» (по которым и осуществляется «склейка» образующих ДХР отрезков рядов для индивидуальных деревьев с перекрывающимися периодами их роста). Значения каждого из ДХР испытывают весьма существенную изменчивость во времени, представляющуюся на первый взгляд хаотической, но в этом хаосе скрыты закономерности, проявляющиеся, например, при сглаживании ДХР по достаточно длительным интервалам времени. В качестве примера на рис. 1 кривыми 1а, 2а изображены два наиболее длинных из указанных выше 9 ДХР, сглаженные по 501 году. Заметим, что кривые 1а и 2а во многих отношениях весьма близки друг другу (хотя они и получены по разным деревьям и разными авторами), лишь частные минимум и максимум 2 500 лет и 1 500 лет до н. э. на кривой 2а выражены заметно резче, чем на кривой 1а. Продолжительный максимум между минимумами 4 000 и 500 лет до н. э. соответствует, по-видимому, так называемому климатическому оптимуму. Однако максимум в начале нашей эры представляется несколько неожиданным. Это различие между двумя ДХР в

очень близких местностях типично не только для ДХР, но и для других характеристик климата — поля температуры приземного воздуха, количества осадков, свойств почвы, ее влажности и т.п. Оно объясняется существенной пятнистостью географических условий.

Рис. 1. ДХР «Тропа Мафусаила», «Хозяин Белых Гор»: а — ДХР после 501-летнего сглаживания; б — спектральные плотности, умноженные на частоту в степени $\frac{1}{3}$.

Известным примером является резкая пятнистость поля температуры в зимнем Сибирском антициклоне, где наиболее низкие температуры были зарегистрированы вокруг поселка Оймякон. Не меньшей пятнистостью обладает поле осадков, особенно в случаях конвективных облаков. Пятнистость географических условий создает широко извест-

ное различие в качествах вина из виноградников в близких местностях, как например, крымский мускат «Красный камень», грузинское вино «Хванчкара», или, например, в качестве ячменя, из которого делают лучшее шотландское виски «Глен Фидич» и «Глен Ливет». Горизонтальная пятнистость заметна даже в верхних слоях океанских вод. Она определяет местонахождение плотных косяков рыбы, разыскиваемых рыболовными флотилиями.

Конкретный анализ различий в ДХР требует дальнейшего более детального рассмотрения, здесь же нашей главной задачей является изучение спектров ДХР.

Для вычисления спектров мы использовали процедуру, заложенную в известную компьютерную программу «Статистика» (обоснования которой весьма обстоятельно изложены в § 18 книги А. М. Яглома [1]). При этой процедуре заданный отрезок ДХР рассматривается как индивидуальная реализация отрезка стационарной случайной последовательности, описывающей аномалии годовых приростов деревьев данного вида. Этому отрезку соответствует периодограмма — случайная функция от частоты f (здесь всюду измеряемой в единицах цикл/год), пропорциональная сумме квадратов косинусного и синусного преобразований Фурье отрезков последовательности. Она может рассматриваться как оценка спектральной плотности $s(f)$. Такая оценка является асимптотически несмещенной: ее математическое ожидание при неограниченном увеличении длины отрезка T стремится к $s(f)$. Однако эта оценка не является состоятельной — ее дисперсия при T , стремящемся к бесконечности, не стремится к нулю, а имеет ненулевой конечный предел. Более того, значения периодограммы на различных частотах некоррелированы и даже статистически независимы (эти утверждения строго доказываются для гауссовских случайных процессов), так что она подобна «белому шуму», наложенному на спектральную плотность. Все это относится, конечно, и к индивидуальной реализации ДХР. Состоятельную оценку спектральной плотности можно получить, подвергнув периодограмму скользящему сглаживанию по частотам из некоторого «спектрального окна» подходящей формы и ширины. В настоящей работе мы использовали так называемое «окно Тьюки», причем после серии численных экспериментов с варьированием ширины окна от 11 до 101 точки мы остановились на ширине в 51 точку.

Спектры наших 9 ДХР охватывают по частоте 3–4 декады, так что для их графического изображения целесообразно выбрать по оси абсцисс логарифмический масштаб $x = \lg f$ (здесь мы используем десятичные логарифмы). При этом в качестве ординат целесообразно откладывать значения $fs(f)$ — тогда площади под такой спектральной кривой будут изображать вклады каждого интервала частот в полную дисперсию случайной последовательности. Но нам здесь удобнее использовать логарифмический масштаб по ординатам.

рифмические масштабы и для этих ординат, т.е. полагать $y = \lg[fs(f)]$. Отметим, что на таких графиках спектров всех упомянутых выше 9 наиболее длинных ДХР «белый шум» выглаживается не полностью, но все они очень неплохо аппроксимируются прямыми линиями с одинаковым наклоном $\frac{2}{3}$, т.е. $y = \frac{2}{3}x + \text{const}$. После потенцирования отсюда получается следующий степенной спектральный закон:

$$s(f) = \frac{3}{2} \delta^2 f^{-1/3}, \quad (1)$$

где δ^2 — полная дисперсия рассматриваемого здесь участка спектра. При этом $f^{1/3}s(f)$ есть постоянная. Такие спектры для первых двух из наших ДХР показаны на рис. 1 кривыми 16, 26. Возрастание спектральной плотности с убыванием частоты можно назвать «красным шумом»; при этом энергетический спектр $fs(f)$ возрастает, наоборот, с увеличением частоты, образуя тем самым «фиолетовый шум» и указывая, что, по-видимому, на рассматриваемом участке спектра энергия передается от короткопериодных колебаний к длиннопериодным (как это происходит, например, при действии механизма параметрического резонанса).

Кривые 16, 26 демонстрируют не только спектральный закон (1). Они показывают, что остаточный «белый шум» усиливается в сторону высоких частот (причем, согласно нашим численным экспериментам, с увеличением ширины спектрального окна «белый шум» ослабевает, а занимаемая им высокочастотная область сужается). Кроме того, видно, что «белый шум» неравномерен: на него налагается целый ряд интервалов его усиления — частных максимумов спектра. Они могут представлять очень большой, если не основной интерес для спектрального описания колебаний климата.

Предположение, что спектры климатических рядов мультимодальны, т.е. содержат несколько частных максимумов и минимумов, уже высказывалось в литературе. Но периоды, соответствующие этим частным максимумам, у разных авторов получались различными, и каких-либо физических процессов, порождающих колебания климата с такими периодами, не указывалось. Так, например, Скудери [2] привел спектры колебаний температуры, содержащие 15 максимумов, а именно: 424, 266, 192, 176, 151, 125, 111, 87, 81, 72, 64, 55, 51, 43 и 31 лет, причем первые пять из них этот автор считает значимыми (по-видимому, без должных оснований). Никаких физических процессов, порождающих колебания с такими периодами, Скудери не указывает.

Однако упомянутые выше частные максимумы выражены весьма неярко, и определение соответствующих им периодов колебаний представляется малонадежным. Поэтому желательно улучшить их спектральное разрешение, т.е. усилить их резкость или как бы «проявить» спектр, находящийся под «белым шумом». Варьированием параметров

спектрального окна этого достичь не удастся, так как уменьшение ширины окна приводит к усилению «белого шума», маскирующего частные максимумы, а увеличение ширины окна ослабляет не только «белый шум», но и находящиеся под ним частные максимумы. Но можно попытаться «проявить» спектр при помощи модификаций заданной ДХР. Простейшими и наиболее естественными такими модификациями могут быть, в частности, процедуры скользящего сглаживания данной ДХР по моментам времени из некоторого «временного окна» подходящей формы и ширины. Здесь мы ограничились рассмотрением только «прямоугольных окон», т.е. среднего арифметического скользящего сглаживания. При этом, конечно, следует иметь в виду, что такое сглаживание будет искажать спектр, уменьшая спектральную плотность на периодах, меньших, чем ширина «временного окна», а также имеющих тот же порядок величины.

Ширины временных окон можно выбирать любым способом. Например, брать все четные ширины. Но реально в этом нет прямой необходимости, и мы здесь ограничиваемся иллюстрациями для ширин 5, 7, 15, 31, 71, 151, 251 и 501 лет. Результаты, т.е. «проявленные» спектры модифицированных ДХР, проиллюстрированы на примере ДХР «Тропа Мафусаила» на рис. 2 (первые два таких спектра изображены в координатах x, y , использованных выше, шесть последующих — в координатах $\lg f, fs(f)$, но с разными масштабами по оси ординат на каждом из графиков). Они представляются нам поразительными. Оказалось, что из-за сглаживания спектральная плотность между частными максимумами уменьшается на 3–4 порядка, в то время как сами максимумы понижаются лишь на порядок, так что они приобретают вид резких «пиков» между глубокими «провалами». Максимумы «проявленных» спектров определяются, по-видимому, главным образом, природой исходной ДХР, и лишь в небольшой степени, возможно, выбранной процедурой модификации. Действительно, например, два максимума, проявляющиеся на спектрах всех наших ДХР после их семилетнего сглаживания, оказались соответствующими одним и тем же периодам — около 2.7 и 4.7 лет (первый из них соответствует, по-видимому, квазидвухлетнему циклу колебаний общей циркуляции атмосферы, некоторое превышение над которым создается, возможно, особенностями нашей процедуры; второй же максимум явно соответствует так называемой цикличности Эль-Ниньо–Южное колебание, проявляющейся во многих характеристиках общей циркуляции атмосферы и океана).

На первый взгляд может показаться странным, что дополнительное сглаживание может приводить к заострениям максимумов и минимумов на спектральной плотности. На самом же деле здесь происходит не только линейное преобразование исходного ряда, каковым является

Рис. 2. Спектры ДХР «Тропа Мафусаила» после сглаживания по «временным окнам» различной ширины (ширина окон в годах указана цифрами на кривых).

сглаживание, но и последующее нелинейное (квадратичное) преобразование исходного временного ряда в периодограмму; эта нелинейность и может порождать заострение экстремумов на спектральной плотности.

Думается, что такая процедура «проявления» спектров может оказаться полезной не только для ДХР, но и для других случайных последовательностей с мультимодальными спектрами.

Специфической особенностью климатической системы является наличие периодических внешних воздействий на нее в виде колебаний распределения инсоляции по поверхности Земли, создаваемых движениями этой планеты относительно Солнца. При этом следует иметь в виду, что привычное представление, будто Земля обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце, и это «кеплерово» движение лишь слегка возмущается прямыми гравитационными воздействиями остальных тел Солнечной системы, неточно.

На самом деле, и Земля, и остальные планеты, и само Солнце обращаются вокруг центра инерции Солнечной системы («барицентра»), который, как показали вычисления, находится вне Солнца. Так, для пары тел Солнце–Юпитер, взятой изолированно, центр инерции находится на расстоянии от центра Солнца в 1.1 от его радиуса, и оба тела обращаются вокруг этого центра по подобным эллипсам с одним и тем же периодом ЮП ~ 11.86 года. Влияние Сатурна на положение центра инерции вдвое слабее: для пары тел Солнце–Сатурн, взятой изолированно, центр инерции находится на расстоянии от центра Солнца в 0.6 от его радиуса, и два эти тела обращались бы вокруг этого центра инерции по подобным эллипсам с периодом около 29.46 года (соизмеримым с ЮП — их отношение равно $\frac{5}{2}$). Вклад остальных планет в положение «барицентра» мал, так что решение задачи о ньютоновском движении трех тел — Солнца, Юпитера и Сатурна — определяет основное гравитационное поле в Солнечной системе, переменное во времени.

Влияния Юпитера и Сатурна на положение центра инерции трех тел здесь складываются, и все тела движутся вокруг этого «барицентра» по спиралевидным траекториям с петлями.

Допустив, что у задачи трех тел имеется периодическое решение, назовем период повторения конфигурации трех тел Главным периодом Солнечной системы (ГП). Для нас здесь будет достаточно весьма округленной его оценки — около 60 лет. Ясно, что и ГП, и ЮП будут сказываться на орбитальном движении и Солнца, и Земли и могут сказываться на поведении недр Солнца, а также на колебаниях в климатической системе.

Однако влияние ГП и ЮП и прямые воздействия на Землю других планет довольно малы, а собственных колебаний с периодами внешних воздействий у климатической системы, по-видимому, не имеется, так что резонансной раскачки не происходит. Но даже малые периодические

воздействия создают периодические колебания параметров климатической системы, придавая ей способности к параметрическому резонансу, т.е. к возбуждению разрастающихся колебаний на кратных периодах, прежде всего — на удвоенном. Простой моделью параметрического резонанса является, как известно, маятник с качающимся подвесом, математически описываемым уравнением Матье. Очевидно, что при учете орбитальных движений Солнца движение Земли удивительно похоже на маятник с качающимся подвесом.

Заметим еще, что колебательные моды системы реагируют на периодические внешние воздействия не индивидуально, а коллективно, причем суммарная коллективная реакция оказывается не периодической, а циклической: это означает, что в цугах многократного повторения цикла колебаний в нем и фаза колебаний повторяется не строго (и фаза иногда может испытывать «сбои», т.е. скачки), но циклы все же без труда идентифицируются и нумеруются. Ярким примером является известный цикл солнечных пятен, средняя длительность которого настолько близка к ЮП, что какие-либо другие гипотезы о природе этого цикла вряд ли заслуживают рассмотрения.

15-летнее сглаживание практически не добавляет новых периодов к двум предыдущим, так что Солнечный цикл в колебаниях климата почти незаметен; 31-летнее сглаживание добавляет очень хорошо выраженный «пик», соответствующий 23.5-летнему «двойному солнечному циклу» (в нашей работе [3] он был обнаружен визуально в климатических рядах, подвергнутых 7-летнему и 31-летнему сглаживанию и последующему вычитанию второго из первого). Далее, 71-летнее сглаживание добавляет предсказанный в работе [4] «пик» около периода в 59 лет — Главного периода Солнечной системы. 151-летнее и 251-летнее сглаживания «проявляют» спектральные максимумы около более длинных периодов, свойственных движению трех тел — Солнца, Юпитера и Сатурна, в том числе 120- и 180-летнего периодов, полученных и использованных при более точных расчетах в работах [5], [6].

Таким образом, в области периодов от 5 до 250 лет обнаруживаются только вынужденные колебания климатической системы — ее реакция на внешние воздействия.

Заметим, что резкость «проявления» последних спектральных максимумов существенно уменьшилась, так что при изображении спектров в выбранной здесь системе координат дальнейшее продвижение в сторону низких частот вряд ли будет полезным. В то же время кривые 1а, 2а показывают, что именно в области периодов в несколько сотен или даже тысяч лет могут находиться собственные периоды колебаний климатической системы. И действительно, на спектре, соответствующем ширине окна сглаживания в 501 год, проявляется максимум около периода в 750 лет (отметим, что дальнейшее увеличение ширины окна

сглаживания не меняет положения этого максимума на оси частот, а только уменьшает его высоту).

Отметим еще, что в следующей за рассмотренными здесь декаде на оси абсцисс находятся периоды в 19, 23, 41 и 100 тыс. лет, предсказываемые астрономической теорией колебаний климата М. Миланковича, но для ДХР они недостижимы, и для их выявления требуются совершенно другие исходные данные (такие, например, как слоистость колонок донных осадков глубокого океана).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
2. Scuderi L. A. A 2000 year tree ring record of annual temperatures in the Sierra Nevada mountains. — Science, 1993, v. 259, p. 1433–1436.
3. Вакуленко Н. В., Монин А. С. О двойном солнечном цикле в колебаниях климата. — Докл. РАН, 2000, т. 374, № 3, с. 385–389.
4. Монин А. С., Шишков Ю. А. Циркуляционные механизмы колебаний климата атмосферы. — Изв. АН, сер. физика атмосферы и океана, 2000, т. 36, № 1, с. 27–34.
5. Fairbridge R. W., Shirley J. H. Prolonged minima and the 179-year cycle of the Solar inertial motion. — Solar Phys., 1987, v. 110, p. 191–220.
6. Charvatova I. Solar Terrestrial Variability in Relation to Solar Inertial Motion. Preprint CTS-95-04. Praha, 1995.

Поступила в редакцию
27.III.2001