Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Старцев, Об одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Бартлетта–Мак–Кендрика, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 463–482

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:31:34

© 2001 г.

СТАРЦЕВ А. Н.*

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ
ДВУХ ТИПОВ, ОБОБЩАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ
БАРТЛЕТТА–МАК-КЕНДРИКА**

Рассматривается замкнутая (по числу частиц) система взаимодействующих частиц двух типов A и B . Частицы типа B обладают запасом некоторой «энергии», а частицы типа A способны приобретать ее при взаимодействии с единичной интенсивностью, обладая при этом некоторым порогом чувствительности. Если запас приобретенной «энергии» достигает уровня чувствительности, то частица типа A переходит в частицу типа B . Частица типа B , исчерпавшая запас своей «энергии», погибает. Процесс заканчивается, если в системе остаются частицы одного типа. При условиях, когда в системе достаточно много частиц обоих типов, описывается класс предельных законов для числа частиц ν , изменивших свой тип в предположении, что уровни чувствительности частиц типа A задаются независимыми показательно распределенными случайными величинами с параметром 1, а времена потери «энергии» частицами типа B — произвольными одинаково распределенными взаимно независимыми случайными величинами, не зависящими от предыдущих случайных величин.

Ключевые слова и фразы: частицы, взаимодействие, изменение типа, немарковские модели, порядковые статистики, граничные задачи, предельные теоремы.

1. Введение. Рассматривается замкнутая (по числу частиц) система взаимодействующих частиц двух типов A и B . Частицы типа B обладают запасом некоторой «энергии», а частицы типа A способны приобретать ее при взаимодействии с единичной интенсивностью, обладая при этом некоторым порогом чувствительности. Если запас приобретенной «энергии» достигает уровня чувствительности, то частица типа A переходит в частицу типа B . Частица типа B , исчерпавшая запас своей «энергии», погибает. Процесс заканчивается, если в системе остаются частицы одного типа. Пусть в момент времени $t > 0$ система состоит из $\xi_A(t)$ частиц типа A и $\xi_B(t)$ частиц типа B , причем $\xi_A(0) = n$, $\xi_B(0) = m$. Далее, пусть времена потери «энергии» частицами типа B

*Институт математики АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан; e-mail: root@im.tashkent.su

задаются независимыми одинаково распределенными случайными величинами (н.о.р.с.в.) $T_1, \dots, T_m, \dots$, а уровни чувствительности частиц типа B — н.с.в. $L_1, \dots, L_n$, имеющими показательное распределение с параметром 1 ($L_i \in \exp(1)$) и не зависящими от $T_1, \dots, T_m$.

Легко показать, что описанный выше процесс в общем случае не будет марковским. Однако если распределение $F(x) = \mathbf{P}\{T_1 < x\}$ абсолютно непрерывно, то $\xi(t) = (\xi_A(t), \xi_B(t))$ будет неоднородным во времени марковским процессом с фазовым пространством $\mathbf{Z}_+^2$, с поглощающими состояниями вида $(k, 0)$ и следующими вероятностями возможных переходов:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = (s - 1, i + 1) \mid \xi(t) = (s, i)\} = si \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = (s, i - 1) \mid \xi(t) = (s, i)\} = \alpha(t) i \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = (s, i) \mid \xi(t) = (s, i)\} = 1 - (\alpha(t) + s) i \Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\alpha(t) = F'(t)/(1 - F(t))$.

Действительно, если (s, i) — состояние процесса в некоторый момент $t > 0$, а η_t — количество «энергии», приобретенное каждой из s существующих частиц типа A к этому моменту, то вероятность того, что j -я из них не изменит типа в интервале $(t, t + \Delta t)$, равна

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{L_j > \eta_t + i \Delta t \mid L_j > \eta_t\} \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{L_j > x + i \Delta t \mid L_j > x\} d\mathbf{P}\{\eta_t < x\} = e^{-i \Delta t}, \end{aligned}$$

а вероятность того, что k -я из i существующих частиц типа B погибнет в том же интервале, равна

$$\mathbf{P}\{T_k > t + \Delta t \mid T_k > t\} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \alpha(t) \Delta t + o(\Delta t),$$

откуда уже легко находятся вероятности переходов (1.1).

Заметим, что формализация исходной модели как полумарковского процесса приводит к большим трудностям ввиду сложности в описании времен пребывания процесса в своих состояниях.

Если $T_1, T_2, \dots$ также показательно распределены с параметром ρ , т.е. $F(x) = 1 - \exp(-\rho x)$, то $\alpha(t) = \rho$ и мы приходим к однородному марковскому процессу со следующими вероятностями возможных переходов:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = (s - 1, i + 1) \mid \xi(t) = (s, i)\} = si \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = (s, i - 1) \mid \xi(t) = (s, i)\} = \rho i \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = (s, i) \mid \xi(t) = (s, i)\} = 1 - (\rho + s) i \Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Модель (1.2) известна как процесс Бартлетта — Мак-Кендрика и достаточно хорошо изучена как модель распространения эпидемий. (Обзор результатов и литературные ссылки по этому поводу см. в работе автора [1].) В этом случае $\xi_A(t)$ и $\xi_B(t)$ интерпретируются как число восприимчивых индивидуумов в популяции и число источников инфекции соответственно, а величины $T_1, T_2, \dots$ и $L_1, L_2, \dots$ — соответственно, как инфекционные периоды источников инфекции и иммунологические барьеры восприимчивых (см. [2]). При этом первый из переходов в (1.2) отражает процесс заражения восприимчивых, второй — процесс устранения источников инфекции, а функционал ν — число частиц, изменивших свой тип, — интерпретируется как размер эпидемии.

Более общие, в сравнении с (1.2), марковские модели с взаимодействием частиц были введены Б. А. Севастьяновым [3], и для них были получены соответствующие уравнения Колмогорова для производящей функции вероятностей состояний, которые, однако, в общем случае не разрешимы в явном виде. Тем не менее, ряд существенных результатов точного и асимптотического характера был получен в работах А. В. Калинин. В частности, в работе [4] процессы эпидемий исследуются прямым решением уравнений Колмогорова.

Объектом данного исследования является число частиц ν , изменивших свой тип к моменту окончания процесса, для распределения которого можно записать следующее представление:

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = \mathbf{P}\{L_{(1)} \leq S_m, \dots, L_{(k)} \leq S_{m+k-1}, L_{(k+1)} > S_{m+k}\}, \quad (1.3)$$

где $L_{(1)} \leq L_{(2)} \leq \dots \leq L_{(n)}$ — вариационный ряд, образованный из с.в. $L_1, L_2, \dots, L_n$, а $S_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$.

Соотношение (1.3) легко следует из определения исходного процесса взаимодействия. Действительно, величина S_m представляет собой суммарную «энергию», которую приобретают частицы типа A от m первоначальных частиц типа B , и если при этом $L_{(1)} = \min(L_1, \dots, L_n) > S_m$, то ни одна из частиц типа A не сможет изменить свой тип, т.е. $\mathbf{P}\{\nu = 0\} = \mathbf{P}\{L_{(1)} > S_m\}$. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично и приводят к (1.3).

Отметим, что Болл [5] получил ряд результатов точного и асимптотического характера для рассматриваемого процесса, но в терминах процесса эпидемий (обзор по этому поводу см. в [1]), при этом он также основывался на соотношении (1.3), которое впервые было предложено Селлке [6], но в ситуации, когда как $\{T_i\}$, так и $\{L_i\}$ показательно распределены (комментарии по этому поводу см. также в работе [1]).

Работа автора [1], посвященная процессам эпидемий, соответствует случаю, когда частица типа A , получившая запас «энергии», превосходящий ее уровень чувствительности, также погибает. При этом величина ν задает число частиц типа A , погибших к моменту поглощения

процесса, и в этом случае будет иметь место более простое, чем (1.3), соотношение

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = \mathbf{P}\{L_{(k)} \leq S_m, L_{(k+1)} > S_m\},$$

которое позволяет описать класс предельных распределений для ν при более общих предположениях относительно $\{T_i\}$ и $\{L_i\}$, основываясь на асимптотической теории порядковых статистик.

Если же исходить из (1.3), то возникает необходимость в асимптотической теории для совместного распределения порядковых статистик $L_{(1)}, L_{(2)}, \dots, L_{(k)}$ при различных соотношениях между k и n . Соответствующая теория пока отсутствует и ее развитие упирается в большие аналитические трудности. Однако если $L_1, L_2, \dots, L_n$ — н.о.р.с.в. с показательным распределением, а $T_1, T_2, \dots$ — н.о.р.с.в., не зависящие от $L_1, L_2, \dots, L_n$, то задачу о распределении величины ν удастся свести к задаче о моменте первого выхода через подвижную границу сумм н.с.в. в схеме серий.

Аналогичный подход для асимптотического анализа модели (1.2) был использован в работе А. В. Нагаева и автора [7]. В данной статье эти результаты существенно обобщаются, а применяемая в ней редукция к граничным задачам является принципиально иной. Большая общность рассматриваемой модели состоит также и в том, что в ней появляются новые параметры, участвующие в описании предельных случаев, к их числу относится, прежде всего, дисперсия с.в. T_1 .

Отметим также, что модели рассматриваемого типа могут служить и для описания реакции химической кинетики и при этом величины $L_1, L_2, \dots, L_n$ интерпретируются как потенциальные барьеры молекул [8].

2. Редукция к граничной задаче. Известно [9, гл. 1, п. 6], что если $L_1, L_2, \dots, L_n$ — н.о.р.с.в. и $L_1 \in \exp(1)$, то $L_{(1)}, L_{(2)} - L_{(1)}, \dots, L_{(n)} - L_{(n-1)}$ являются н.с.в., причем $L_{(k+1)} - L_{(k)} \in \exp(n - k)$. А тогда (1.3) может быть записано в виде

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = \mathbf{P}\{\tilde{S}_1 \leq S_m, \dots, \tilde{S}_k \leq S_{m+k-1}, \tilde{S}_{k+1} > S_{m+k}\}, \quad (2.1)$$

где $\tilde{S}_k = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_k$, $\tilde{\xi}_i = \xi_i / (n - i + 1)$, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — н.о.р.с.в. такие, что $\xi_1 \in \exp(1)$.

Если ввести обозначения $\eta_1 = \tilde{\xi}_1$, $\eta_2 = \tilde{\xi}_2 - T_{m+1}, \dots, \eta_{k+1} = \tilde{\xi}_{k+1} - T_{m+k}$, $\zeta_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$, то соотношение (2.1) перепишется в виде

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = \mathbf{P}\{\zeta_1 \leq S_m, \dots, \zeta_k \leq S_m, \zeta_{k+1} > S_m\}.$$

Как уже отмечалось, асимптотический анализ распределения ν будет проводится при $n \rightarrow \infty$ в схеме серий. Теперь введем следующие

обозначения:

$$\begin{aligned} A_k &\equiv A_k(n) = \mathbf{E} S_k, \quad B_k^2 \equiv B_k^2(n) = \mathbf{D} \zeta_k, \quad C_k \equiv C_k(n) = \mathbf{E} \zeta_{k+1}, \\ D_n^2 &= \mathbf{D} \zeta_{k_n+1}, \quad t_k = t_{nk} = \frac{\mathbf{D} \zeta_k}{D_n^2}, \quad k = 1, \dots, k_n, \\ \Pi_k(\lambda) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что с.в. $T_1, \dots, T_{k_n}$ удовлетворяют условию Линдберга:

$$L_n = \frac{1}{B_{k_n}^2} \sum_{i=1}^{k_n} \int_{|X - \mathbf{E} T_i| > \varepsilon B_{k_n}} (X - \mathbf{E} T_i)^2 d\mathbf{P}\{T_i < X\} \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Поскольку мы будем иметь дело в основном с одинаково распределенными с.в., то и классификацию предельного поведения распределения ν проведем именно для этого случая. Предварительно положим

$$a_n = \mathbf{E} T_1, \quad \sigma_n^2 = \mathbf{D} T_1, \quad \theta_n = (na_n)^{-1}, \quad \hat{\sigma}_n = n\sigma_n.$$

Параметр θ_n играет роль регулирующего, подобно параметру ρ/n в модели (1.2). В связи с этим отметим, что $\theta_n = \rho/n$, если $T_1 \in \exp(\rho)$. По отношению к параметру θ_n будем рассматривать следующие основные случаи: 1) *регулярный*: $0 < \varepsilon < \theta_n < 1 - \varepsilon$ или $1 + \varepsilon < \theta_n < 1/\varepsilon \quad \forall \varepsilon$; 2) *переходный первого типа*: $\theta_n \rightarrow \infty$; 3) *пороговый*: $\theta_n \rightarrow 1$; 4) *переходный второго типа*: $\theta_n \rightarrow 0$. При этом случай 4) будет рассматриваться при произвольных m , случай $0 < \varepsilon < \theta_n < 1 - \varepsilon$ при $m = O(n)$, а остальные — при $m = o(n)$. Как будет ясно из дальнейшего, это не ограничивает общности.

При получении интегральных предельных теорем мы будем исходить из следующего представления:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu > k_n\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 \leq S_m, \dots, \zeta_{k_n+1} \leq S_m\} \\ &\times \int \mathbf{P}\{\zeta_1^* \leq g_1(u), \dots, \zeta_{k_n+1}^* \leq g_{k_n+1}(u)\} d\mathbf{P}\{S_m^* < u\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_k^* &= \frac{\zeta_k - C_k}{D_n}, \quad S_m^* = \frac{S_m - A_m}{B_m}, \\ g_k(u) &\equiv g_{nk}(u) = d_n u + \frac{A_m - C_k}{D_n}, \quad d_n = \frac{B_m}{D_n}. \end{aligned}$$

Далее, если $\zeta_n(t)$ — случайная ломаная, построенная по точкам (t_k, ζ_k^*) , и $g_n(t, u)$ — ломаная с вершинами в точках $(t_k, g_k(u))$, $k = 0, 1, \dots, k_n + 1$, то (2.4) может быть записано в виде

$$\mathbf{P}\{\nu > k_n\} = \int \mathbf{P}\{\zeta_n(t) < g_n(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1\} d\mathbf{P}\{S_m^* < u\}. \quad (2.5)$$

Таким образом, мы свели задачу к принципу инвариантности для сумм независимых с.в., но с подвижной относительно исходных параметров границей. Согласно принципу инвариантности, можно сконструировать $\zeta_n(t)$ и стандартный винеровский процесс $w(t)$ на одном вероятностном пространстве так, что (см. [10]) $\zeta_n(t) = w(t) + \varepsilon_n(t)$, где случайный процесс $\varepsilon_n(t)$ обладает тем свойством, что

$$\varepsilon_n \equiv \sup_{0 \leq t \leq 1} |\varepsilon_n(t)| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \text{т.е. } \varepsilon_n = o_p(1).$$

В силу этого из (2.5) имеем

$$\mathbf{P}\{\nu > k_n\} = \int \mathbf{P}\{w(t) < g_n(t, u) + o_p(1), 0 \leq t \leq 1\} d\mathbf{P}\{S_m^* < u\}. \quad (2.6)$$

Таким образом, остается изучить асимптотическое поведение границы $g_n(t, u)$ при $n \rightarrow \infty$ в зависимости от остальных параметров. Сразу отметим, что в большинстве рассматриваемых случаев предельная граница $g(t, u)$ будет вырожденной.

3. Идеи доказательства и вспомогательные результаты. Одна из теорем (теорема 4.1) в переходном случае первого типа доказывается без использования соотношения (2.6). В условиях этой теоремы задача сводится к изучению момента первого выхода через асимптотически постоянную границу сумм н.о.р.с.в. с показательным распределением.

Доказательство других теорем основывается на представлении (2.6) и подразделяется на два основных случая. В первом из них предельная граница $g(t, 0)$ является непрерывной функцией (теорема 4.4) и каких-либо проблем с применением принципа инвариантности не возникает. Во втором же она является вырожденной, а именно, $g(t, 0) = \infty$ при $0 < t < 1$. При этом возникает необходимость в дополнительном обосновании применения принципа инвариантности в такой ситуации.

Лемма 3.1 ([11]). *Если $h_n(t)$ — невозрастающая функция на $(\tau_n, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(1) = h_0$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{w(t) < h_n(t), \tau_n < t \leq 1\} = \Phi(h_0).$$

Лемма 3.2. *Если $\theta_n < 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $m \rightarrow \infty$, $\beta_{3n} \equiv \mathbf{E}|T_1 - a_n|^3 < \infty$, $(\theta_n n)^3 \beta_{3n} = o(m)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu > n(1 - \theta_n)\} = 1$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $n(1 - \theta_n)$ является целым числом. Тогда из (2.2) и (2.4) имеем

$$\mathbf{P}\{\nu > n(1 - \theta_n) - 1\} = \mathbf{P}\{\zeta_{nk}^0 < A_{m+k} - C_k, k = 1, 2, \dots, n(1 - \theta_n)\},$$

где $\zeta_{nk}^0 = \zeta_{nk} - \mathbf{E} \zeta_{nk}$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\nu > n(1 - \theta_n)\} \leq 1 - \sum_{k=1}^{n(1-\theta_n)} \mathbf{P}\{\zeta_{nk}^0 \geq A_{m+k} - C_k\} \equiv 1 - \sum_{k=1}^{n(1-\theta_n)} P_{nk}. \quad (3.1)$$

В силу неравенства Чебышева

$$P_{nk} \leq \frac{\mathbf{E} |\zeta_{nk}^0|^3}{(A_{m+k} - C_k)^3} \leq \frac{\gamma_{3k} + (m+k) \beta_{3n}}{\theta_n^{-3} f_n^3(k/n)}, \quad (3.2)$$

где

$$f_n(x) = \frac{m}{n} + x + \theta_n \ln(1-x),$$

$$\gamma_{3k} = \sum_{i=1}^k \mathbf{E} \left| \frac{\xi_i}{n-i+1} - \frac{1}{n-i+1} \right|^3 \leq \frac{c \cdot k}{n(n-k)^2}. \quad (3.3)$$

Далее, заметим, что $f_n(x)$ является вогнутой функцией и поэтому при $0 \leq x \leq 1 - \theta_n$ имеем

$$f_n(x) \geq \frac{m}{n} + \left(1 + \frac{\theta_n \ln \theta_n}{1 - \theta_n}\right) x \geq \frac{m}{n} + c(\varepsilon) x, \quad (3.4)$$

где $c(\varepsilon) = ((1 - \varepsilon) \ln(1 - \varepsilon))/\varepsilon$.

Теперь из (3.2)–(3.4) имеем

$$P_{nk} \leq C \frac{\theta_n^3(m+2k)}{(m+c(\varepsilon)k)^3}.$$

Отсюда при $m \leq n(1 - \theta_n)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n(1-\theta_n)} P_{nk} &= \sum_{k=1}^m P_{nk} + \sum_{k=m+1}^{n(1-\theta_n)} P_{nk} \leq C \theta_n^3 m \sum_{k=1}^m \frac{1}{(m+c(\varepsilon)k)^3} \\ &+ \frac{C \theta_n^3}{c^3(\varepsilon)} \sum_{k=m+1}^{n(1-\theta_n)} \frac{1}{k^2} \leq C \frac{\theta_n^3}{\varepsilon^3 m} + C \frac{\theta_n^3 n^3 \beta_{3n}}{c^3(\varepsilon)} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = o(1). \end{aligned}$$

Утверждение леммы в рассматриваемом случае теперь следует из (3.1). Если $m > n(1 - \theta_n)$, то доказательство упрощается.

Далее, приведем некоторые технические результаты, касающиеся показательно распределенных случайных величин.

Лемма 3.3 (см. [9, гл. 1, § 4]). Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\xi_1 \in \exp(1)$, то

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_k \leq \lambda, \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} > \lambda\} = \Pi_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots$$

Лемма 3.4. Пусть $\tilde{S}_k$ определены так же, как в соотношении (2.1).

1) Если $k_n \rightarrow \infty$ и $n - k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\tilde{S}_{k_n} - \mathbf{E} \tilde{S}_{k_n}}{\sqrt{\mathbf{D} \tilde{S}_{k_n}}} < x \right\} \Rightarrow \Phi(x).$$

2) Для любых фиксированных $k = 0, 1, 2, \dots$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k} - \ln n < x\} \Rightarrow G_k(x),$$

где $G_k(x)$ — функция распределения с плотностью $G'_k(x) = \exp(-kx - e^{-x})/(k-1)!$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение 1), необходимо просто проверить справедливость условия Линдеберга для последовательности $\{\tilde{\xi}_i, i = 1, \dots, k_n\}$.

Для доказательства 2) рассмотрим характеристическую функцию

$$\begin{aligned} f_{n,k}(t) &= \mathbf{E} \exp \{it(\tilde{S}_{n-k} - \ln n)\} = e^{-it \ln n} \prod_{j=k}^n \frac{1}{1 - it/j} \\ &\sim e^{-it(\sum_{j=i}^{k-1} 1/j - c)} \prod_{j=k}^n \frac{e^{it/j}}{1 - it/j}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где c — постоянная Эйлера. Переходя в (3.5) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая следующее представление для гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{itz}}{z \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z/k) e^{-z/k}},$$

получим $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(t) = \Gamma(k - it)/\Gamma(k)$. Соответствующую плотность распределения легко найти с помощью формулы обращения.

Заметим, что подобная лемма для случайных величин с геометрическими распределениями была доказана в работе автора [12].

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основных утверждений в соответствии с проведенной выше классификацией предельных случаев.

4. Формулировки основных утверждений.

4.1. Переходный случай первого типа ($\theta_n \rightarrow \infty$). Первая из приводимых ниже теорем относится к случаю неодинаково распределенных с.в. $T_1, T_2, \dots$.

Теорема 4.1. Пусть $L_1, \dots, L_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $L_1 \in \exp(1)$, а $T_1, \dots, T_m, \dots$ — не зависящие от них неотрицательные независимые случайные величины, удовлетворяющие условию (2.3) и такие, что для любых

фиксированных $k = 0, 1, \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_{m+k} = a < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nB_{m+k} = b < \infty$. Тогда для любого $k \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu = k\} = \begin{cases} \Pi_k(a), & b = 0, \\ \delta_{0k} \Phi\left(-\frac{a}{b}\right) + \int_0^\infty \Pi_k(x) d\Phi\left(\frac{x-a}{b}\right), & b > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Следствие 4.1.1. Если $T_1, T_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} m/\theta_n = a < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{m}\hat{\sigma}_n = b < \infty$, то (4.1) имеет место.

Всюду в дальнейшем $T_1, T_2, \dots$ — н.о.р.с.в., удовлетворяющие условию (2.3), а $L_1, \dots, L_n$ — те же, что и в теореме 4.1.

Теорема 4.2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} m/\theta_n = \infty$, $m = o(n)$, $\hat{\sigma}_n^2 = o(m/\theta_n^2)$, то

$$\mathbf{P}\left\{\nu > \frac{m}{\theta_n - 1} - \sqrt{\frac{m}{\theta_n}(1 + \theta_n \hat{\sigma}_n^2)}x\right\} \Rightarrow \Phi(x).$$

4.2. Регулярный случай ($0 < \varepsilon < \theta_n < 1 - \varepsilon$, $1 + \varepsilon < \theta_n < 1/\varepsilon$).

Теорема 4.3. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $0 < \varepsilon < \theta_n < 1 - \varepsilon$, $m = O(n)$ и, кроме того, либо $m = O(\sqrt{n(1 + \hat{\sigma}_n^2)})$ и $n^3\beta_{3n} = o(m)$, либо $m/\sqrt{n(1 + \hat{\sigma}_n^2)} \rightarrow \infty$; 2) $1 + \varepsilon < \theta_n < 1/\varepsilon$, $m = o(n)$, $\hat{\sigma}_n^2 = o(m)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\nu - \gamma_n > -b_n x\} \Rightarrow \Phi(x),$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} n\alpha_n, & \theta_n < 1, \\ \frac{m}{\theta_n - 1}, & \theta_n > 1, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{\theta_n \sqrt{n(1 - \alpha_n)[\alpha_n + (1 - \alpha_n)\hat{\sigma}_n^2(\alpha_n + m/n)]}}{\alpha_n - 1 + \theta_n}, & \theta_n < 1, \\ \sqrt{m\theta_n^2(1 + \theta_n\hat{\sigma}_n^2)/(\theta_n - 1)^3}, & \theta_n > 1, \end{cases}$$

а α_n — положительный корень уравнения

$$f_n(x) \equiv \frac{m}{n} + x + \theta_n \ln(1 - x) = 0. \quad (4.2)$$

З а м е ч а н и е. Из условия $n^3\beta_{3n} = o(m)$ в силу неравенства между моментами следует, что $\hat{\sigma}_n^2 = o(m^{2/3})$.

4.3. Пороговый случай ($\theta_n \rightarrow 1$).**Теорема 4.4.** Если

$$\frac{m}{n(1 + \hat{\sigma}_n^2)} \rightarrow \infty, \quad \beta_n \equiv \frac{m(\theta_n - 1)}{1 + \hat{\sigma}_n^2} \rightarrow \beta_0, \quad |\beta_0| < \infty,$$

$$\frac{m^3}{n(1 + \hat{\sigma}_n^2)} \rightarrow \gamma_0 < \infty,$$

то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \nu > \frac{m^2 x}{1 + \hat{\sigma}_n^2} \right\} \Rightarrow \mathbf{P} \{ w(t) < g_x(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \},$$

где

$$g_x(t) = \left[x^{-1/2} - \beta_0 x^{1/2} t - \gamma_0 x^{3/2} \frac{t^2}{2} \right]. \quad (4.3)$$

Следствие 4.4.1. Если в предположениях теоремы 4.4 $\gamma_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \nu > \frac{m^2 x}{1 + \hat{\sigma}_n^2} \right\} \Rightarrow 1 - e^{\beta_0 - |\beta_0|} \int_0^{\beta_0 x q} P_{q^2}(u) du,$$

где $q = \beta_0/2$, $P_\alpha(u) = \sqrt{\alpha/(\pi u^3)} \exp(2\sqrt{\alpha} - u - \alpha/u)$, $\alpha > 0$, $u > 0$.**Следствие 4.4.2.** Если $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \nu > \frac{m^2 x}{1 + \hat{\sigma}_n^2} \right\} \Rightarrow 2\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) - 1.$$

Теорема 4.5. Если $\theta_n \rightarrow 1$, $m|1 - \theta_n| \rightarrow \infty$, $m = o(n)$, $1 - \theta_n = o(\sqrt{m/n})$, $\hat{\sigma}_n^2 = o(\sqrt{m^3/n})$, то

$$\mathbf{P} \{ \nu - \sqrt{2mn} > -b_n x \} \Rightarrow \Phi(x),$$

где $b_n = [n^3/(2m)]^{1/4} (1 + \hat{\sigma}_n^2)^{1/2}$.**Теорема 4.6.** Если $\theta_n \rightarrow 1$, $m|1 - \theta_n| \rightarrow \infty$, $m = o(n)$, $\sqrt{m/n} = O(1 - \theta_n)$, $\hat{\sigma}_n^2 = o(m|1 - \theta_n|)$ и, кроме того, $\sqrt{m/n} \geq \delta(1 - \theta_n)$ при $\theta_n < 1$, $\delta > 0$, то

$$\mathbf{P} \{ \nu > \gamma_n - b_n x \} \Rightarrow \Phi(x),$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} n(1 - \theta_n)(1 + \delta_1), & \theta_n < 1, \\ \frac{2m}{(\theta_n - 1)(1 + \delta_1)}, & \theta_n > 1, \end{cases} \quad \delta_1 = \sqrt{1 + \frac{2m}{n(1 - \theta_n)^2}},$$

$$b_n = \begin{cases} \left(\frac{n(1 + \delta_1)(1 + \hat{\sigma}_n^2)}{(1 - \theta_n) \delta_1^2} \right)^{1/2}, & \theta_n < 1, \\ \left(\frac{2m(1 + \hat{\sigma}_n^2)}{(\theta_n - 1)^3 (1 + \delta_1) \delta_1^2} \right)^{1/2}, & \theta_n > 1. \end{cases}$$

Сразу отметим, что если $T_1 \in \exp(\rho)$, то из приведенных результатов вытекают все теоремы, полученные А. В. Нагаевым и автором в работе [7].

Далее, как нетрудно заметить, во всех сформулированных теоремах выполняется ограничение $\hat{\sigma}_n^2 = o(m)$. Следующее утверждение показывает, что если $\hat{\sigma}_n^2$ и m одного порядка, то картина существенно меняется.

Теорема 4.7. Если $\hat{\sigma}_n^2 \rightarrow \infty$, $m \sim c\hat{\sigma}_n^2$, $0 < c < \infty$, $m = o(n)$, $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $0 < \theta_0 < \infty$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\nu > mx\}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \mathbf{P}\{w(t) < u + (\theta_0^{-1} - 1)\sqrt{cx}t, 0 \leq t \leq 1\} d\Phi\left(-\frac{\sqrt{c}}{\theta_0} + \sqrt{x}u\right).$$

Следствие 4.7.1. Если в условиях теоремы 4.7 $\theta_0 = 1$, то

$$\mathbf{P}\{\nu < mx\} \Rightarrow G(x) \equiv 2 \int_0^\infty \Phi(\sqrt{x}u - \sqrt{c}) d\Phi(u).$$

Легко понять, что распределение $G(x)$ имеет скачок в нуле, так как $G(0) = \Phi(-\sqrt{c})$, т.е. в рассматриваемых условиях имеется положительная вероятность, что величина ν равна нулю.

4.8. Переходный случай второго типа ($\theta_n \rightarrow 0$). Пусть $\delta_n \equiv \ln n - (m+n)a_n = \ln n - (1+m/n)/\theta_n$, $r_n = \hat{\sigma}_n^2 e^{-\delta_n}/n$.

Теорема 4.8. Если $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $\theta_n \equiv (na_n)^{-1} \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $me^{\delta_n/2}/(n\theta_n\sqrt{1+r_n}) \rightarrow \infty$;
- 2) $me^{\delta_n/2}/(n\theta_n\sqrt{1+r_n}) = O(1)$, $(n\theta_n)^3\beta_{3n} = o(m)$,

то

$$\mathbf{P}\{\nu > n\alpha_n - b_n x\} \Rightarrow \Phi(x),$$

где α_n — корень уравнения (4.2),

$$b_n = \begin{cases} \left[(1+r_n) \left(1 + \left(\frac{m}{n} \frac{r_n}{1+r_n} \right)^2 \right) e^{\delta_n} \right]^{1/2}, & r_n = O(1), \frac{m}{n} r_n = O(1), \\ \left[\left(1 + \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right) r_n e^{\delta_n} \right]^{1/2}, & r_n \rightarrow \infty, r_n = o(e^{\delta_n}), m = O(n), \\ \left(\frac{mr_n}{n} e^{\delta_n} \right)^{1/2}, & \frac{m}{n} \rightarrow \infty, \frac{m}{n} r_n \rightarrow \infty, \frac{m}{n} r_n = o(e^{\delta_n}). \end{cases}$$

Теорема 4.9. Если $\delta_n \rightarrow \delta_0$, $|\delta_0| < \infty$, и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $m/(\sqrt{n}\theta_n) \rightarrow \infty$, $\hat{\sigma}_n = o(\min(m/(\sqrt{n}\theta_n), n/\sqrt{m+n}))$;
- 2) $m/(\sqrt{n}\theta_n) = O(1)$, $(n\theta_n)^3\beta_{3n} = o(m)$,

то для любого целого фиксированного $k \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{n - \nu = k\} = \Pi_k(e^{\delta_0}).$$

Для специальной схемы серий, образованной с помощью масштабного параметра, теорема 4.9 была получена другим методом Боллом [5] (1986 г.). В случае $T_1 \in \exp(\rho)$ она была доказана Дэниелсом [13] (1967 г.) для «малых m », а также автором [12] (1971 г.) и Селлке [6] (1983 г.) при произвольных m .

5. Доказательства теорем.

5.1. Доказательство теоремы 4.1. В силу (2.1), (2.2) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu = k\} &= \mathbf{P}\left\{\xi_1 \leq nB_m S_m^* + nA_m, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_{k+1} > nB_m S_m^* \right. \\ &\quad \left. + n\sqrt{B_{m+k}^2 - B_m^2}(S_{m+k} - S_m)^* + nA_{m+k} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\xi_2}{n-1} + \dots + \frac{k}{n-k}\xi_{k+1}\right)\right\} \\ &= \int \mathbf{P}\left\{\xi_1 \leq a + bx + o_p(1), \dots, \xi_1 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \xi_{k+1} > a + bx + o_p(1)\right\} d\mathbf{P}\{S_m^* < x\}, \end{aligned}$$

где $o_p(1) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, а $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р.с.в. такие, что $\xi_1 \in \exp(1)$.

Отсюда в силу центральной предельной теоремы и леммы 3.2 получим для любого $k \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu = k\} = \int_{-a/b}^{\infty} \Pi_k(a + bx) d\Phi(x) = \int_0^{\infty} \Pi_k(x) d\Phi\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Для $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu = 0\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_1 > a + bx) d\Phi(x) \\ &= \Phi\left(-\frac{a}{b}\right) + \int_{-a/b}^{\infty} \Pi_0(a + bx) d\Phi(x), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

5.2. Доказательство теорем 4.4 и 4.7. Начнем с теоремы 4.4. В соответствии с (2.6) и (4.3) нам необходимо показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t, u) = g_x(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} - \beta_0 \sqrt{x} t - \gamma_0 \sqrt{x^3} \frac{t^2}{2}.$$

Из (2.2), (2.4) и (2.5) имеем

$$g_n(t_k, u) \equiv g_k(u) = d_n u + \frac{A_m - C_k}{D_n}. \quad (5.1)$$

Таким образом, необходимо изучить асимптотическое поведение $g_k(u)$ при $k \leq k_n = [m^2 x / (1 + \hat{\sigma}_n^2)]$. Не ограничивая общности, будем считать, что $m^2 x / (1 + \hat{\sigma}_n^2)$ является целым числом.

Поскольку $k_n = o(n)$, имеем при $k \rightarrow \infty$, $k \leq k_n$, $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} D_n^2 &= \mathbf{D}\zeta_{k_n+1} = \mathbf{D}\left(\frac{\xi_1}{n} + \dots + \frac{\xi_{k_n+1}}{n - k_n} - T_{m+1} - \dots - T_{m+k_n}\right) \\ &= k_n \sigma_n^2 + \frac{k_n}{n(n - k_n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ C_k &= \mathbf{E}\zeta_{k+1} = \frac{1}{n - k} + \dots + \frac{1}{k} - ka_n \\ &= -\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) - ka_n + O\left(\frac{1}{n - k}\right), \\ t_k &= \frac{D_k^2}{D_n^2} = \frac{k_n \sigma_n^2 + k/(n(n - k)) + O(1/n^2)}{k_n \sigma_n^2 + k_n/(n(n - k_n)) + O(1/n^2)} \\ &= \frac{k}{k_n} \frac{1 + \hat{\sigma}_n^2 + o(1)}{1 + \hat{\sigma}_n^2 + o(1)} \sim \frac{k}{k_n}, \\ d_n &= \frac{B_m^2}{D_n^2} \sim \frac{m \hat{\sigma}_n^2}{k_n(1 + \hat{\sigma}_n^2)} = \frac{\hat{\sigma}_n^2}{mx}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} g_k(u) &\sim \frac{ma_n + ka_n + b_n(1 - k/n)}{\sqrt{k_n \sigma_n^2 + k_n/(n(n - k_n))}} \\ &\sim \frac{m + (1 - \theta_n)k - (\theta_n/2)k^2/n + o(k^2/n^2)}{\sqrt{k_n(1 + \hat{\sigma}_n^2)}} \\ &= \frac{m}{\sqrt{k_n(1 + \hat{\sigma}_n^2)}} - \frac{\sqrt{k_n}(\theta_n - 1)}{\sqrt{1 + \hat{\sigma}_n^2}} \frac{k}{k_n} \\ &\quad - \frac{\theta_n k_n^{3/2}}{2n\sqrt{1 + \hat{\sigma}_n^2}} \left(\frac{k}{k_n}\right)^2 + o(1) \sim g_x(t), \end{aligned}$$

если $k \sim tk_n$, $0 < t < 1$, что и требовалось доказать.

Что касается следствия 4.4.1, то его утверждение опирается на явную формулу для вероятности $\mathbf{P}\{w(t) < a + bt, 0 \leq t \leq 1\}$, в нужном нам виде эту формулу можно найти в [10].

В условиях теоремы 4.7 имеем $k_n = m^2 x / \hat{\sigma}_n^2$, $d_n^2 \sim \hat{\sigma}_n^2 / (mx) \sim 1/(cx)$, $g_k(u) \sim u/\sqrt{cx} + (1/\theta_0)(1/\sqrt{x} + \sqrt{x}(1 - \theta_0)c\theta_k)$ и в силу этого

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\nu > \frac{m^2 x}{\hat{\sigma}_n^2}\right\} &\sim \int_{u > -\sqrt{c}/\theta_0} \mathbf{P}\left\{w(t) < \frac{u}{\sqrt{cx}} + \frac{1}{\theta_0 \sqrt{x}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{x} \left(\frac{1}{\theta_0} - 1\right) ct, 0 \leq t \leq 1\right\} d\Phi(x), \end{aligned}$$

откуда легко следует утверждение теоремы.

5.3. Доказательства теорем 4.2, 4.3, 4.5, 4.6 и 4.8. Общей чертой доказательства этих теорем является то, что предельная граница $g(t, u)$ вырождена в указанном ранее смысле, следствием чего и является возникновение нормального закона в качестве предельного.

Доказательство теоремы 4.3. Пусть сначала $0 < \varepsilon < \theta_n < 1 - \varepsilon$ и $m/\sqrt{n(1 + \hat{\sigma}_n^2)} \rightarrow \infty$. В этом случае возьмем $k_n = n\alpha_n - b'_n x$, где α_n — корень уравнения $f_n(x) = 0$ (см. (4.2)), а последовательность $b'_n = o(n)$ будет выбрана позже.

Исходя из (5.1) с учетом (5.2) имеем

$$d_n^2 \sim \frac{m}{n\alpha_n} \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2 + (1 - \alpha_n)^{-1}} = O(1),$$

$$g_n(t_k, u) \sim d_n u + \frac{ma_n + ka_n + \ln(1 - k/n)}{\sqrt{n\alpha_n \sigma_n^2 + \alpha_n/(n(1 - \alpha_n))}} = d_n u + b''_n f_n\left(\frac{k}{n}\right),$$

где

$$b''_n = \frac{1}{\theta_n} \left(\frac{n(1 - \alpha_n)}{\alpha_n(1 + (1 - \alpha_n)\hat{\sigma}_n^2)} \right)^{1/2}.$$

Отсюда легко находим, что

$$g_n(1, u) \sim b''_n f_n\left(\frac{k_n}{n}\right) + d_n u = d_n u + b''_n \left[f'_n(\alpha_n) \left(\frac{k_n}{n} - \alpha_n \right) + o\left(\frac{k_n}{n} - \alpha \right) \right]$$

$$\sim d_n u - \frac{b''_n}{n} f'_n(\alpha_n) b'_n x = d_n u + x, \quad (5.3)$$

если

$$b'_n = -\frac{n}{b''_n f'_n(\alpha_n)} = \frac{\theta_n}{\alpha_n - 1 + \theta_n} \left[n\alpha_n(1 - \alpha_n) \left(1 + (1 - \alpha_n)\hat{\sigma}_n^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Из (5.3) следует, что если $k'_n = n\alpha_n - b'_n x_1$, где $x_1 \rightarrow \infty$, $x_1 = o(n\alpha_n/b'_n)$, то $t_{k'_n} \rightarrow 1$ и при этом $g_n(t_{k'_n}, u) \sim x_1 \rightarrow \infty$.

Заметим, что в рассматриваемом случае $g_n(0, u) \rightarrow \infty$. Отсюда следует в силу вогнутости $f_n(x)$, что $\mathbf{P}\{\nu > k'_n\} \rightarrow 1$. Теперь из (2.6) и леммы 3.1 легко получаем

$$\mathbf{P}\{\nu > n\alpha_n - b'_n x\} = \int \Phi(d_n u + x) d\Phi(u) + o(1)$$

$$= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + d_n^2}}\right) + o(1). \quad (5.4)$$

Если выбрать $b_n = \sqrt{1 + d_n^2} b'_n$, то отсюда следует утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

Если же $m = O(\sqrt{n(1 + \hat{\sigma}_n^2)})$, то нужный результат получается с использованием леммы 3.2.

Пусть теперь $1 + \varepsilon < \theta_n < 1/\varepsilon$, $m \rightarrow \infty$, $m = o(n)$. В этом случае уравнение $f_n(x) \equiv m/n + x + \theta_n \ln(1 - x) = 0$ имеет асимптотическое

решение $\alpha_n = m/(n(\theta_n - 1))$. Полагая $k_n = n\alpha_n - b'_n x = m/(\theta_n - 1) - b'_n x$, где $b'_n = o(m/(\theta_n - 1))$, в силу (5.2) имеем

$$d_n^2 \sim \frac{(\theta_n - 1) \hat{\sigma}_n^2}{1 + \hat{\sigma}_n^2} = O(1),$$

$$g_n(t_{k_1}, u) \sim d_n u + \frac{ma_n + ka_n + \ln(1 - k/n)}{\sqrt{(m/(\theta_n - 1)) \sigma_n^2 + m/(n^2(\theta_n - 1))}} \sim d_n u + b''_n f_n\left(\frac{k}{n}\right),$$

где $b''_n = (n/\theta_n) \sqrt{(\theta_n - 1)/(m(1 + \hat{\sigma}_n^2))}$. По аналогии с (5.3) получим, что $g_n(1, u) \sim d_n u + x$, если $b'_n = -n/(f'_n(\alpha_n) b''_n)$, т.е. $b'_n \sim [\theta_n^2 m(1 + \hat{\sigma}_n^2)/(\theta_n - 1)^3]^{1/2}$.

Заметим, что в данном случае

$$g_n(0, u) \sim b''_n f_n(0) \sim \left(\frac{\theta_n - 1}{\theta_n} \frac{m}{1 + \hat{\sigma}_n^2} \right)^{1/2} \rightarrow \infty.$$

Теперь, так же, как и при получении (5.4), имеем

$$\mathbf{P}\{\nu_n > n\alpha_n - b_n x\} \Rightarrow \Phi(x),$$

где

$$b_n = \sqrt{1 + d_n^2} b'_n = \left(\frac{m\theta_n^2(1 + \theta_n^2 \hat{\sigma}_n^2)}{(\theta_n - 1)^3} \right)^{1/2}.$$

Тем самым теорема 4.3 доказана полностью.

Доказательство теоремы 4.2. Если $\hat{\sigma}_n = o(1)$, $\theta_n \hat{\sigma}_n^2 = O(1)$, то доказательство второго случая предыдущей теоремы проходит практически без изменений и при этом

$$d_n \sim \theta_n \hat{\sigma}_n^2, \quad g_n(0, u) \sim \sqrt{\frac{m}{\theta_n}} \rightarrow \infty, \quad b_n^2 \sim \frac{m(1 + \theta_n \hat{\sigma}_n^2)}{\theta_n}.$$

Если же $\theta_n \hat{\sigma}_n^2 \rightarrow \infty$, то $d_n \rightarrow \infty$, и тогда, исходя из (2.4), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu > k_n\} &= \mathbf{P}\{\zeta_k \leq S_m, 1 \leq k \leq k_n + 1\} \\ &= \mathbf{P}\left\{ \zeta_k^* d_n^{-1} - \frac{A_m - C_k}{B_m} \leq S_m^*, 1 \leq k \leq k_n + 1 \right\} \\ &= \mathbf{P}\{S_m^* \geq -\tilde{g}_{n,k} + o_p(1), 1 \leq k \leq k_n + 1\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Теперь, используя (5.2), находим

$$\tilde{g}_{n,k} \equiv \frac{A_m - C_k}{B_m} \sim \frac{ma_n + ka_n + \ln(1 - k/n)}{\sqrt{m\sigma_n^2}} \sim \frac{nf_n(k/n)}{\sqrt{m\theta_n^2 \hat{\sigma}_n^2}}.$$

А так как $f_n(x)$ убывает на $[0, 1)$ при $\theta_n > 1$, из (5.3) получим

$$\mathbf{P}\{\nu > k_n\} \sim \mathbf{P}\{S_m^* \geq -\tilde{g}_{n,k_n}\} \sim 1 - \Phi(-x) = \Phi(x),$$

если $k_n = m/(\theta_n - 1) - b_n x$, где $b_n = \sqrt{m\hat{\sigma}_n^2} = \sqrt{(m/\theta_n)\theta_n\hat{\sigma}_n^2}$ и при этом $b_n = o(m/\theta_n)$ в силу условия $\theta_n\hat{\sigma}_n^2 = o(m/\theta_n)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.5. В условиях теоремы имеем следующее асимптотическое поведение корня уравнения $f_n(x) = 0$: $\alpha_n \sim \sqrt{2m/n}$. Полагая, как и ранее, $k_n = n\alpha_n - b_n x$, получим

$$d_n^2 \sim \sqrt{\frac{m}{2n}} \frac{\hat{\sigma}_n^2}{1 + \hat{\sigma}_n^2} = o(1),$$

$$g_{k_n}(u) \sim \frac{ma_n + ka_n + \ln(1 - k_n/n)}{\sqrt{k_n\sigma_n^2 + k_n/(n(n - k_n))}} \sim \frac{n^{5/4}}{\sqrt[4]{2m}} f_n\left(\frac{k_n}{n}\right) \left(1 + \hat{\sigma}_n^2\right)^{-1/2} = x,$$

если

$$b_n = -\frac{\sqrt[4]{2mn(1 + \hat{\sigma}_n^2)}}{f'_n(\alpha_n)} \sim \left(\frac{n^3}{2m}\right)^{1/4} \sqrt{1 + \hat{\sigma}_n^2}.$$

Далее, ввиду условия $\hat{\sigma}_n^2 = o(\sqrt{m^3/n})$ имеем

$$b_n = o(n\alpha_n), \quad g_n(0, u) \sim \left(\frac{m^3}{2n}\right)^{1/4} (1 + \hat{\sigma}_n^2)^{-1/2} \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 4.6. Схема доказательства остается прежней. В условиях данной теоремы имеем

$$d_n \sim \begin{cases} \frac{2m}{n(\theta_n - 1)(1 + \delta_1)}, & \theta_n > 1, \\ (1 - \theta_n)(1 + \delta_1), & \theta_n < 1, \end{cases}, \quad \delta_1 = \sqrt{1 + \frac{2m}{n(1 - \theta_n)^2}},$$

$$d_n^2 \sim \begin{cases} \frac{(\theta_n - 1)(1 + \delta_1)\hat{\sigma}_n^2}{2(1 + \hat{\sigma}_n^2)} = o(1), & \theta_n \downarrow 1, \\ \frac{m}{n(1 - \theta_n)} \frac{\hat{\sigma}_n^2}{(1 + \delta_1)(1 + \hat{\sigma}_n^2)} = o(1), & \theta_n \uparrow 1, \end{cases}$$

$$b_n^2 \sim \begin{cases} \frac{n(1 + \delta_1)(1 + \hat{\sigma}_n^2)}{(1 - \theta_n)\delta_1^2}, & \theta_n < 1, \\ \frac{2m(1 + \hat{\sigma}_n^2)}{(\theta_n - 1)^3(1 + \delta_1)\delta_1^2}, & \theta_n > 1, \end{cases}$$

$$g_n(0, u) \sim \frac{m}{\sqrt{n\alpha(1 + \hat{\sigma}_n^2)}} \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{(\theta_n - 1)m(1 + \delta_1)}{2(1 + \hat{\sigma}_n^2)}}, & \theta_n > 1, \\ \sqrt{\frac{m^2}{n(1 - \theta_n)(1 + \hat{\sigma}_n^2)(1 + \delta_1)}}, & \theta_n < 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что в условиях теоремы $g_n(0, u) \rightarrow \infty$ и условие $b_n = o(n\alpha_n)$ также имеет место.

Доказательство теоремы 4.8. Если α_n — положительный корень уравнения $f_n(x) = m/n + x + \theta_n \ln(1 - x) = 0$, то мы имеем в предположениях теоремы $\alpha_n \rightarrow 1$, $n(1 - \alpha_n) \sim e^{\delta_n} \rightarrow \infty$.

Таким образом, если $k_n = n\alpha_n - b'_n x$, где $b'_n = o(n(1 - \alpha_n))$, то

$$\begin{aligned} D_n^2 &= k_n \sigma_n^2 + \frac{k_n}{n(n - k_n)} + O\left(\frac{1}{(n - k_n)^2}\right) \\ &\sim \frac{1 + (1 - \alpha_n) \hat{\sigma}_n^2}{n(1 - \alpha_n)} = (1 + r_n) e^{-\delta_n}, \\ d_n^2 &= \frac{m \sigma_n^2}{D_n} \sim \frac{m}{n} \frac{(1 - \alpha_n) \hat{\sigma}_n^2}{1 + (1 - \alpha_n) \hat{\sigma}_n^2} \sim \frac{m}{n} \frac{r_n}{1 + r_n}, \\ g_n(1, u) &\sim d_n u + \frac{n a_n}{D_n} f_n\left(\frac{k_n}{n}\right) \sim d_n u - \frac{n a_n}{D_n} f'_n(\alpha_n) \frac{b'_n}{n} x. \end{aligned}$$

Таким образом, $g_n(1, u) \sim d_n u + x$, если

$$b'_n = -\frac{D_n}{a_n f'_n(\alpha_n)} \sim n(1 - \alpha_n) D_n \sim \sqrt{1 + r_n} e^{\delta_n/2}.$$

Теперь, выбирая $b_n = \sqrt{1 + d_n^2} b'_n$, как и в (5.4), получим утверждение теоремы в первых двух случаях, участвующих в описании b_n . При этом ограничение $m e^{\delta_n/2} / (n \theta_n \sqrt{1 + r_n}) \rightarrow \infty$ обеспечивает выполнение условия $g_n(0, u) \rightarrow \infty$. Если же это ограничение не выполнено и при этом $\beta_{3n} = o(m / (\theta_n^3 n^3))$, то необходимо предварительно воспользоваться леммой 3.2.

В третьем случае величина $d_n \rightarrow \infty$ и поэтому, как и в (5.5), имеем

$$\mathbf{P}\{\nu > k_n\} = \mathbf{P}\{S_m^* \geq -\tilde{g}_{n,k} + o_p(1), 1 \leq k \leq k_n + 1\},$$

где

$$\tilde{g}_{n,k} = \frac{A_m - C_k}{B_m} \sim -\frac{n f_n(k/n)}{\sqrt{m \theta_n \hat{\sigma}_n^2}}.$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае $\tilde{g}_{n,1} \sim \sqrt{m} n a_n / \hat{\sigma}_n = \sqrt{m/n} n a_n / (\hat{\sigma}_n / \sqrt{n}) \rightarrow \infty$ и поэтому в силу вогнутости функции $f_n(x)$

$$\mathbf{P}\{\nu > k_n\} \sim \mathbf{P}\{S_m^* \geq -\tilde{g}_{n,k}\} \sim \Phi(x),$$

если $k_n = n\alpha_n - b_n x$, где $b_n = ((m r_n / n) e^{\delta_n})^{1/2}$.

5.4. Доказательство теоремы 4.9. Сначала покажем, что в условиях теоремы $\mathbf{P}\{\nu > k_n\} \rightarrow 1$, если $k_n = [n\delta]$, $0 < \delta < 1$. Если выполнено условие 2), то это следует из леммы 3.2. Если же выполнено 1), то в соответствии с (2.4) необходимо показать, что $A_m / D_n \rightarrow \infty$ и $(A_m - C_{k_n}) / D_n \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\frac{A_m}{D_n} \sim \frac{m a_n}{\sqrt{k_n \sigma_n^2 + k_n / (n(n - k_n))}} = \frac{m}{\theta_n \sqrt{n \delta} \sqrt{\hat{\sigma}_n^2 + 1 / (1 - \delta)}} \rightarrow \infty,$$

а второе выражение стремится к бесконечности в силу возрастания границы при $k < n(1 - \theta_n)$.

Теперь, опираясь на этот факт, покажем, что $\mathbf{P}\{\nu > \ell_n\}$ также стремится к единице, если $\ell_n \rightarrow \infty$ и $h_n \equiv n - \ell_n \rightarrow \infty$. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{A_m - C_{k_n}}{\mathbf{D}\zeta_{\ell_n+1}} \rightarrow \infty, \quad \frac{A_m - C_{\ell_n}}{\mathbf{D}\zeta_{\ell_n+1}} \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что в случае 1)

$$\frac{A_m - C_{k_n}}{\mathbf{D}\zeta_{\ell_n+1}} \sim \frac{m/n + \delta + \theta_n \ln(1 - \delta)}{\theta_n \sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n + 1/h_n}} \rightarrow \infty.$$

В случае 2) из условия $\theta_n^3 n^3 \beta_{3n} = o(m)$ следует, что $\hat{\sigma}_n^2 = o(m^{2/3}/\theta_n^2)$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Рассмотрим второе выражение:

$$\begin{aligned} \frac{A_m - C_{\ell_n}}{\mathbf{D}\zeta_{\ell_n+1}} &\sim \frac{ma_n + a_n \ell_n + \ln(1 - \ell_n/n)}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n + 1/h_n}} \\ &= \frac{(m+n)a_n - \ln n - h_n a_n + \ln h_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n + 1/h_n}} \\ &= \frac{\ln h_n - h_n/(n\theta_n) - \delta_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n + 1/h_n}} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

если $h_n = O(n\theta_n)$.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu > n - k - 1\} = \mathbf{P}(\Delta_n) + o(1), \quad (5.6)$$

где

$$\Delta_n = \bigcap_{i=\ell_n}^{n-k} C_i, \quad C_i = \{\tilde{S}_i \leq S_{m+i-1}\}. \quad (5.7)$$

Теперь покажем, что $\mathbf{P}(\Delta_n) = \mathbf{P}(C_{n-k}) + o(1)$. Заметив, что $\mathbf{P}(\Delta_n) = \mathbf{P}(C_{n-k}) - \mathbf{P}(\cup_{i=\ell_n}^{n-k-1} C_{n-k} \bar{C}_i)$, оценим величину

$$Q = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=\ell_n}^{n-k-1} C_{n-k} \bar{C}_i\right) \leq \sum_{i=\ell_n}^{n-k-1} \mathbf{P}(C_{n-k} \bar{C}_i) \equiv \sum_{i=\ell_n}^{n-k-1} Q_{ni}. \quad (5.8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} Q_{ni} &= \mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k} \leq S_{m+n-k-1}, \tilde{S}_i > S_{m+i-1}\} \\ &= \mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k} - \tilde{S}_i \leq S_{m+n-k-1} - S_{m+i-1} + S_{m+i-1} - \tilde{S}_i, \\ &\quad S_{m+i-1} - \tilde{S}_i < 0\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k} - \tilde{S}_i \leq T_{m+i} + \dots + T_{m+n-k-1}\} \leq \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{n-k} \leq \tilde{S}_{nk}\}, \end{aligned}$$

где $\hat{S}_{nk} = T_{m+\ell_n} + \dots + T_{m+n-k-1}$.

Заметив, что

$$\mathbf{E} \hat{S}_{nk} = (h_n - k - 1) a_n, \quad \mathbf{D} \hat{S}_{nk} = (h_n - k - 1) \sigma_n^2,$$

находим

$$\begin{aligned} Q_{ni} &\leq \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{n-k} \leq \hat{S}_{nk}^* \sqrt{h_n} \sigma_n + a_n h_n + o(1)\} \\ &= \int_{-a_n \sqrt{h_n} / \sigma_n}^{+\infty} \left[1 - e^{-(a_n h_n + \sigma_n \sqrt{h_n} x)(k+1)} \right] d\Phi(x) + o(1) \\ &\leq (k+1) \int_{-\infty}^{+\infty} (a_n h_n + \sigma_n \sqrt{h_n} |x|) d\Phi(x) + o(1) \\ &= (k+1) \left[a_n h_n + \sigma_n \sqrt{h_n} \right] + o(1). \end{aligned}$$

Теперь, с учетом того, что $a_n = (\ln n - \delta_n)/(m+n)$, из (5.8) находим

$$Q_n \leq (k+1)(h_n - k - 1) \left(a_n h_n + \frac{\hat{\sigma}_n \sqrt{h_n}}{n} \right) + o(1) = o(1),$$

если $h_n = o(n^{1/3})$.

Таким образом, из (5.6)–(5.8) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu > n - k - 1\} &= \mathbf{P}(C_{n-k}) + o(1) = \mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k} \leq S_{n+m-k-1}\} + o(1) \\ &= \mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k}^\circ \leq S_{n+m-k-1}^\circ + (n+m) a_n - \ln n + o(1)\} + o(1), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{S}_{n-k}^\circ = \tilde{S}_{n-k} - \ln n, \quad S_{n+m-k-1}^\circ = S_{n+m-k-1} - (m+n) a_n.$$

А так как

$$\mathbf{D} S_{n+m-k-1}^\circ = (m+n-k-1) \sigma_n^2 \leq \frac{m+n}{n^2} \tilde{\sigma}_n^2 = o(1)$$

то в силу леммы 3.4

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{n - \nu \leq k - 1\} &= \mathbf{P}\{\tilde{S}_{n-k}^\circ \leq -\delta_n\} + o(1) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(k)} \int_{-\infty}^{-\delta_0} e^{-(k-1)x} e^{-e^{-x}} dx + o(1) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(k)} \int_{e^{\delta_0}}^{\infty} u^{k-1} e^{-u} du + o(1) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} + o(1), \end{aligned}$$

где $\lambda = e^{\delta_0}$, что равносильно утверждению теоремы.

Автор признателен рецензенту за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению содержания работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Старцев А. Н.* О распределении размера эпидемии в одной немарковской модели. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 827–839.
2. *Марчук Г. И.* Математические методы в иммунологии. М.: Наука, 1985, 240 с.
3. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц. — Тезисы докладов III Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. Т. II. Вильнюс: Институт математики и кибернетики АН ЛитССР, 1981, с. 139–140.
4. *Калинкин А. В.* Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 773–780.
5. *Ball F. A* unified approach to the distribution of total size and total area under the trajectory of infectives in epidemic models. — Adv. Appl. Probab., 1986, v. 18, p. 289–310.
6. *Sellke T.* On the asymptotic distribution of the size of a stochastic epidemic. — J. Appl. Probab., 1983, v. 20, p. 390–394.
7. *Нагаев А. В., Старцев А. Н.* Асимптотический анализ одной стохастической модели эпидемий. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 1, с. 97–105.
8. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Черновский Д. С.* Что такое математическая биофизика. М.: Просвещение, 1971, 136 с.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1984, 738 с.
10. *Борисов И. С., Боровков А. А.* Аппроксимация второго порядка для случайных ломаных в принципе инвариантности Донскера–Прохорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 2, с. 225–245.
11. *Startsev A. N.* On approximation conditions of the distribution of the maximum sums of independent random variables. — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math., 1988, v. 13, № 2, p. 269–275.
12. *Старцев А. Н.* Предельные теоремы для размера эпидемии в общей вероятностной модели. — Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1971, с. 60–73.
13. *Daniels H. E.* The distribution of the total size of an epidemic. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1965/66. V. 4. Berkeley: Univ. of California Press, 1967, p. 281–293.

Поступила в редакцию
4.II.1999