Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Лебедев, L^p -значные случайные меры и хорошие расширения стохастического базиса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 563–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:22:14

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2001 г.

ЛЕБЕДЕВ В. А.*

 **L^p -ЗНАЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МЕРЫ И ХОРОШИЕ РАСШИРЕНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКОГО БАЗИСА¹⁾**

В настоящей статье в развитие работы автора [1] доказывается существование продолжения L^p -значной случайной меры θ в смысле Бихтелера и Жакода [2] при хорошем относительно θ расширении стохастического базиса. Основной результат, даваемый теоремой 2, анонсирован автором в [3].

Ключевые слова и фразы: хороший момент остановки, σ -конечная L^p -значная случайная мера, хорошее расширение стохастического базиса, продолжение случайной меры.

1. Множества семимартингалов, хороших относительно расширения стохастического базиса. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ есть стохастический базис, состоящий из полного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и фильтрации $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, удовлетворяющей обычным условиям. Для данного стохастического базиса естественным образом определяются предсказуемая σ -алгебра $\mathcal{P}$ и опциональная σ -алгебра $\mathcal{O}$ на $\Omega \times \mathbf{R}_+$. Представляют интерес также σ -алгебры, промежуточные между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}$, например, достижимая σ -алгебра $\mathcal{A}$. Важную роль в нашей статье будут играть среди них σ -алгебры, порождаемые опциональными случайными мерами.

Итак, пусть E — сепарабельное метрическое пространство, универсально измеримое в своем пополнении, μ — опциональная $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(E)$ - σ -конечная целочисленная случайная мера на $(\mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E))$, для простоты $\mathbf{P}$ -п.н. не нагружающая множество $\{0\} \times E$, а ν — ее дуальная предсказуемая проекция. Пусть, наконец, ψ есть $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(E)$ -измеримая функция на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$ с $0 < \psi \leq 1$ такая, что возрастающий процесс $\psi * \nu$ $\mathbf{P}$ -п.н. конечен.

Определим множество

$$J = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+ : \nu(\omega, \{t\} \times E) > 0\}.$$

Без ограничения общности (расширяя E , если необходимо) будем предполагать, что

$$\nu(\omega, \{t\} \times E) = 1_J(\omega, t). \quad (1)$$

Если h — $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(E)$ -измеримая функция на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, для которой определен процесс $h * \nu$, а T — момент остановки, то на множестве $\{T < \infty\}$ имеем $\Delta(h * \nu)_T = \int_E h_{T,u} \nu(\{T\} \times du)$, а если, кроме того, T предсказуемо, то на этом множестве $\Delta(h * \nu)_T = \mathbf{E}[\Delta(h * \mu)_T | \mathcal{F}_{T-}]$. С использованием множества J меры μ и ν разлагаются следующим стандартным образом. Именно, пусть $\mu^d = 1_{J \times E} \cdot \mu$, $\nu^d = 1_{J \times E} \cdot \nu$, $\mu^c = \mu - \mu^d$, $\nu^c = \nu - \nu^d$. Так как множество J предсказуемо, то меры ν^d

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-15-96033.

и ν^c являются дуальными предсказуемыми проекциями мер μ^d и μ^c соответственно. При этом в силу определения множества J процесс $h * \nu^d$ чисто скачкообразен, а $h * \nu^c$ непрерывен.

Для характеристики σ -алгебры на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, порождаемой $\mathcal{P}$ и мерой μ , прежде всего занумеруем скачки процесса $\psi * \mu$. Именно, пусть для $i \geq 1$ $S_{i0} = 0$ и для $j > 0$

$$S_{ij} = \inf \left\{ t > S_{i,j-1} : 2^{-i} < \Delta(\psi * \mu)_t \leq 2^{-i+1} \right\}.$$

Пусть β — $\mathcal{B}$ -измеримый процесс со значениями в $E \cup \delta$, где δ — дополнительный элемент такой, что его значение на графике $\llbracket S_{ij} \rrbracket$ дает точку сосредоточения на E меры μ в момент S_{ij} , а вне объединения $\cup_{i,j=1}^{\infty} \llbracket S_{ij} \rrbracket$ равный δ . Обозначим через $\mathcal{R}(\mu)$ σ -алгебру на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, порождаемую $\mathcal{P}$ и процессом β . Тогда процесс $h * \mu$ $\mathcal{R}(\mu)$ -измерим для любой $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(E)$ -измеримой функции h на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, для которой определен интеграл $h * \mu$, и в этом смысле мера μ $\mathcal{R}(\mu)$ -измерима. Будем называть μ -хорошими моменты остановки T , для которых $\llbracket T, \infty \rrbracket \in \mathcal{R}(\mu)$. Заметим, что σ -алгебра $\mathcal{R}(\mu)$ порождается стохастическими интервалами вида $\llbracket T, \infty \rrbracket$, где в качестве T берутся моменты S_{ij} , предсказуемые моменты, а также сужения тех и других на множества σ -алгебры $\mathcal{F}_{T,r}$, порождаемой значениями $\mathcal{R}(\mu)$ -измеримых процессов X в момент T , т.е. случайными величинами $X_{T1\{T < \infty\}}$. Очевидно, σ -алгебра $\mathcal{F}_{T,r}$ порождается $\mathcal{F}_{T-}$ и значениями процесса β на множестве $\{0 \leq t \leq T\}$.

Структура μ -хороших моментов остановки легко характеризуется с использованием теоремы 9 гл. IV из [4] следующим образом. Именно, если T — μ -хороший момент остановки, то существует разбиение множества $\{T < \infty\}$ на такие непересекающиеся $\mathcal{F}_{T,r}$ -измеримые множества A_{ij} , $i, j > 0$, и A_0 , что $\llbracket T_{A_{ij}} \rrbracket \subset \llbracket S_{ij} \rrbracket$, а момент T_{A_0} достижим и его график не пересекается с графиками моментов S_{ij} , а если выполнено условие (1), то момент T_{A_0} предсказуем.

Пусть теперь $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство, θ — σ -конечная L^0 -значная случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$. Так как настоящая статья написана в развитие работы [1], в ней без дополнительных разъяснений будут использоваться данные там понятия и обозначения, связанные с такими случайными мерами и классами согласованных процессов, и они фигурируют также в [2] и [5]. Введем ряд понятий, связанных с расширением вероятностных пространств.

О п р е д е л е н и я. а) *Расширение вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ есть вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ следующего вида:

1) $\tilde{\Omega} = \Omega \times \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ — некоторое вспомогательное пространство;

2) $\mathcal{F} \otimes \{\emptyset, \tilde{\Omega}\} \subset \tilde{\mathcal{F}}$;

3) Ω -маргинал $\tilde{\mathbf{P}}|_{\Omega}$ для $\tilde{\mathbf{P}}$ равен $\mathbf{P}$.

б) *Расширение* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *стохастического базиса* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ есть расширение $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, наделенное фильтрацией $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, удовлетворяющей при каждом $t \in \mathbf{R}_+$ условию 2) с σ -алгебрами $\mathcal{F}_t$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t$, соответственно, вместо $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$.

в) n -мерный семимартингал X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется *хорошим относительно расширения* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, если он является семимартингалом на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ с тем же триплетом предсказуемых характеристик, что и на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

г) *Расширение* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *стохастического базиса* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется *хорошим* относительно σ -конечной L^0 -значной случайной меры θ , если для всякой $\varphi \in \tilde{L}^0(\theta)$ семимартингал $\varphi \times \theta$ является хорошим относительно $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$.

д) *Расширение* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *стохастического базиса* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется *очень хорошим* или *регулярным*, если всякий мартингал на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ является мартингалом на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$.

Без ограничения общности, как это делалось в [1], можно считать $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ фильтрациями на едином вероятностном пространстве. Действительно, можно взять за основу пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, а вместо σ -алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_t$ для $t \in \mathbf{R}_+$ рассматривать, соответственно, σ -алгебры $\mathcal{F} \otimes \{\emptyset, \tilde{\Omega}\}$ и $\mathcal{F}_t \otimes \{\emptyset, \tilde{\Omega}\}$, и для любого $\mathcal{F}$ -измеримого множества $A \subset \Omega$ имеем $\tilde{\mathbf{P}}(A \times \tilde{\Omega}) = \mathbf{P}(A)$.

Определения следуют в основном работе [6], где вместо п. г) рассматривались расширения стохастического базиса, хорошие относительно n -мерных семимартингалов. Каждому такому семимартингалу X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ отвечает конечная L^0 -значная случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$ с $E = \{1, \dots, n\}$ и $\mathcal{E}$, состоящей из всех подмножеств E , и из предложения 11 в [7] легко следует, что расширение является хорошим относительно этой меры тогда и только тогда, когда семимартингал X имеет на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ тот же триплет предсказуемых характеристик, что и на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$. Если же $(E, \mathcal{E})$ — сепарабельное метрическое пространство, универсально измеримое в своем пополнении, с борелевской σ -алгеброй, μ — $\mathbb{F}$ -опциональная $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ - σ -конечная целочисленная случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ с дуальной $\mathbb{F}$ -предсказуемой проекцией ν , то в силу теоремы 9 из [7] и характеристики пространств $\tilde{L}^0(\mu)$ и $\tilde{L}^0(\mu - \nu)$ из [8] также довольно очевидно, что расширение $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ является хорошим относительно μ или $\mu - \nu$ тогда и только тогда, когда ν является дуальной $\mathbb{F}$ -предсказуемой проекцией меры μ .

Справедлива следующая характеристика множеств семимартингалов на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, хороших относительно расширения $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, анонсированная автором в [9].

Теорема 1. Пусть $\mathcal{H}$ — некоторое линейное множество одномерных семимартингалов на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, хороших относительно расширения $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$. Для того, чтобы d -мерный семимартингал X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ был хорошим относительно $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, достаточно выполнения следующих условий:

- X измерим относительно σ -алгебры $\mathcal{A}$, порождаемой $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ и $\mathcal{H}$;
- непрерывные $\mathbb{F}$ -мартингаловые части $(X^k)^c$ для $k = 1, \dots, d$ принадлежат замыканию в топологии Эмери [10] линейного пространства, порождаемого процессами стохастических интегралов вида $H \cdot Y^c$ для $Y \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Прежде всего, нетрудно доказать, что для того, чтобы d -мерный семимартингал X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ был семимартингалом на $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{P})$ с тем же триплетом предсказуемых характеристик, что и на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, необходимо и достаточно, чтобы мера его скачков μ^X имела на $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{P})$ ту же дуальную предсказуемую проекцию, что и на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, а его непрерывная $\mathbb{F}$ -мартингаловая часть X^c была локальным $\tilde{\mathbb{F}}$ -мартингалом. Тем самым, доказательство сводится к двум случаям: когда X является непрерывным локальным $\mathbb{F}$ -мартингалом с $X_0 = 0$ и когда X имеет нулевую непрерывную мартингаловую часть. В первом случае предел в топологии Эмери на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ последовательности непрерывных локальных мартингалов одновременно относительно $\mathbb{F}$ и $\tilde{\mathbb{F}}$ также является таковым, и его квадратичная характеристика одна и та же для $\mathbb{F}$ и $\tilde{\mathbb{F}}$. Во втором случае процесс X является пределом в топологии Эмери на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ последовательности процессов с конечной вариацией, и потому можно считать его таковым. Далее, из теоремы о монотонных классах видно, что всякий $\mathcal{A}$ -измеримый процесс измерим относительно σ -алгебры на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, порождаемой $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ и некоторым счетным набором элементов $\mathcal{H}$. Из линейности множества $\mathcal{H}$ легко выводится, что если $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — последовательность элементов $\mathcal{H}$, порождающая вместе с $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ σ -алгебру на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, относительно которой измерим процесс X , то для $(Y_1, Y_2, \dots)$ как $\mathbf{R}^N$ -значного процесса дуальная предсказуемая проекция меры его скачков μ одна и та же относительно $\mathbb{F}$ и $\tilde{\mathbb{F}}$. Тем самым, $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{P})$ является μ -хорошим расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, и $\mathcal{A}(\mu) \subset \mathcal{A}$. Имеем теперь $X = X^c + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i 1_{[T_i, \infty]}$, где X^c — непрерывный $\mathbb{F}$ -согласованный процесс, T_i — μ -хорошие $\mathbb{F}$ -моменты остановки, а Z_i — $\mathcal{F}_{T_i, -}$ -измеримые случайные векторы, причем в любой конечный момент времени ряд сходится $\mathbf{P}$ -п.н. абсолютно, и из характеристики μ -хороших моментов остановки нетрудно вывести, что мера скачков процесса X имеет одну и ту же дуальную предсказуемую проекцию относительно $\mathbb{F}$ и $\tilde{\mathbb{F}}$.

Множество семимартингалов, удовлетворяющих для данного $\mathcal{H}$ условиям а) и б) теоремы 1, достаточно богато. Оно включает само $\mathcal{H}$, все $\mathbb{F}$ -предсказуемые càdlàg процессы с конечной вариацией до каждого конечного момента времени, вместе с несколькими процессами — их упорядоченную систему как процесс соответствующей размерности, устойчиво относительно стохастического интегрирования по данному

процессу произвольного $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ -измеримого процесса и относительно гладких отображений пространства значений, к которым применима формула замены переменных для семимартингалов (в частности, линейных). Обозначим множество одномерных семимартингалов из этой совокупности через $\mathcal{H}$ и назовем его хорошим относительно $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ расширением множества $\mathcal{H}$. Оно, очевидно, линейно, содержит $\mathcal{H}$ и замкнуто в топологии Эмери семимартингалов на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$.

З а м е ч а н и е 1. Требование линейности множества $\mathcal{H}$ существенно. Заметим также, что в формулировке теоремы 1 условия а) и б) являются лишь достаточными, ибо множество $\mathcal{H}$ для достаточно бедного $\mathcal{H}$ не обязано исчерпывать все хорошие для $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ $\mathfrak{F}$ -семимартингалы. Можно привести примеры, показывающие, что множество всех $\mathfrak{F}$ -семимартингалов, хороших для $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$, вообще говоря, нелинейно, так что даже для достаточно богатого $\mathcal{H}$ условие а) нельзя сделать необходимым, и для нелинейного $\mathcal{H}$ заключение теоремы 1 несправедливо.

Из замечания 1 видно, что множество хороших относительно $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ одномерных семимартингалов на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, вообще говоря, не является линейным. Однако множество хороших относительно $\tilde{\mathfrak{F}}$ непрерывных локальных $\mathfrak{F}$ -мартингалов линейно, и если $\mathcal{H}$ таково, что замыкание в топологии Эмери линейного пространства, порождаемого процессами стохастических интегралов вида $H \cdot Y^c$ для $Y \in \mathcal{H}$, совпадает с множеством всех хороших относительно $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ одномерных непрерывных локальных $\mathfrak{F}$ -мартингалов, начинающихся в нуле, то условие б) становится необходимым.

Так как принадлежащие $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемые мартингалы образуют устойчивое пространство, то по теореме 2 § 5 главы 1 из [11] ортогональные всем им мартингалы также образуют устойчивое пространство, и всякий квадратично интегрируемый мартингал на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ представляется однозначно в виде суммы элементов этих пространств, которые мы будем называть *проекциями* данного мартингала, соответственно, на $\mathcal{H}$ и его ортогональное дополнение. Структура этих проекций характеризуется следующим образом. Именно, пусть X — локально квадратично интегрируемый мартингал на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, а Y — его проекция на $\mathcal{H}$. Тогда если X непрерывен, то и Y непрерывен, а если X чисто разрывен, то и Y чисто разрывен, моменты остановки, графики которых составляют множество скачков процесса Y , можно выбрать $\mathcal{H}$ -хорошими, и для каждого $\mathcal{H}$ -хорошего момента остановки T на множестве $\{T < \infty\}$ имеем $\Delta Y_T = \mathbf{E}(\Delta X_T | \mathcal{F}_{T,r})$. При этом совершенно аналогично устанавливается, что всякий локальный мартингал X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ представляется однозначно в виде суммы локального мартингала Y из $\mathcal{H}$ и локального мартингала, ортогонального всякому ограниченному мартингалу из $\mathcal{H}$, и для Y справедлива та же характеристика.

2. Продолжения случайных мер на хорошие расширения стохастического базиса. Как и в предыдущем пункте, предполагается, что задано полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и на нем две фильтрации $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ и $\tilde{\mathfrak{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, удовлетворяющие обычным условиям и такие, что $\mathcal{F}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}_t$ для любого $t \in \mathbf{R}_+$. Справедливо следующее усиление теоремы 3 из [1] в части существования продолжения, из которого в применении к семимартингалу X или случайной мере $\mu - \nu$ могут быть получены теорема 9 и предложение 11 из [7].

Теорема 2. Пусть θ — σ -конечная L^p -значная случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{E})$, а $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ является хорошим относительно θ расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Тогда θ допускает продолжение на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$ как σ -конечная L^p -значная случайная мера. При этом:

1) если $\varphi \in L^{1,p}(\theta, \mathfrak{F})$, то для $p = 0$ или $p \geq 2$ $\varphi \in L^{1,p}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$, а если $\varphi \in \tilde{L}^p(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$, то всегда $\varphi \in \tilde{L}^p(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$;

2) если $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{E}$ -измерима и принадлежит $L^{1,p}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$, то она принадлежит $L^{1,p}(\theta, \mathfrak{F})$, а если $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{E}$ -измерима и принадлежит $\tilde{L}^p(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$ для $p \geq 2$, то она принадлежит $\tilde{L}^p(\theta, \mathfrak{F})$.

Во всех перечисленных случаях процессы стохастического интеграла $\varphi \times \theta$ на $\mathfrak{F}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$ совпадают.

Схема доказательства в своей основе следует теореме 3 из [1] с уточнением ряда моментов. В частности, для построения продолжения случайной меры в случае $p < 2$ требуется, как и в [1], замена вероятностной меры. Если $\mathbf{Q}$ — новая вероятностная мера, $Z_\infty = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ и $Z_t = \mathbf{E}(Z_\infty | \mathcal{F}_t)$, то желательно выбрать мартингал $Z = (Z_t)$ принадлежащим $\mathcal{H}(\theta)$, чтобы хорошее свойство расширения стохастического базиса сохранялось при замене вероятностной меры. Эту проблему решает следующий результат.

Предложение. Пусть $\theta \in \tilde{\mathcal{F}}_0^p(\mathbf{P})$, $(E, \mathcal{E})$ — лузинское пространство с борелевской σ -алгеброй, а $\varphi \in L^{1,p}(\theta, \mathbf{P})$ для некоторого p , $0 \leq p < 2$. Тогда существует вероятностная мера $\mathbf{Q}$, которая эквивалентна $\mathbf{P}$ и такова, что производная Радона–Никодима $Z_\infty = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ ограничена, мартингал $Z = (\mathbf{E}(Z_\infty | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbf{R}_+}$ принадлежит $\mathcal{H}(\theta)$, $1/Z_\infty \in L^{p/(2-p)}(\mathbf{P})$, $\theta \in \tilde{\mathcal{F}}_0^2(\mathbf{Q})$ и $\varphi|_{[0, \tau_n] \times E} \in L^{1,2}(\theta, \mathbf{Q})$ для некоторой $\mathbf{P}$ -н.н. возрастающей к ∞ последовательности моментов остановки τ_n .

Для доказательства применим к θ следствие к теореме 2 из [1], и пусть $\tilde{Z}$ — соответствующий мартингал. Так как $\tilde{Z}$ $\mathbf{P}$ -н.н. строго положителен, то определен локальный мартингал $Y = \tilde{Z}^{-1} \cdot \tilde{Z}$, так что $\tilde{Z} = \tilde{Z}_0 \mathcal{E}(Y)$, где $\mathcal{E}(Y)$ — экспонента процесса Y в смысле [11]. Процесс Y представляется однозначно в виде суммы двух локальных мартингалов $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$, где $Y^{(1)} \in \mathcal{H}(\theta)$, а $Y^{(2)}$ ортогонален любому мартингалу из $\mathcal{H}(\theta)$. Если теперь определить $Z = \tilde{Z}_0 \mathcal{E}(Y^{(1)})$, то доказывается, что процесс Z удовлетворяет требуемым условиям.

З а м е ч а н и е 2. В условиях предложения нельзя обойтись без локализации, т.е. выбрать $\tau_n \equiv \infty$. Пусть, например, $\theta \in PV\text{-}\tilde{\mathcal{F}}_0^p$ для $0 \leq p < 2$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, а $\varphi \in L^{1,p}(\theta)$, но $\varphi \notin L^{1,2}(\theta)$. В этом случае $\mathcal{H}(\theta)$ состоит из $\mathfrak{F}$ -предсказуемых càdlàg процессов с конечной вариацией и $Z_t \equiv \tilde{Z}_0 = 1$, так что τ_n нельзя выбрать достаточно большими, но при этом неслучайными.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Как и в доказательстве теоремы 3 из [1], мы предполагаем сначала, что $(E, \mathcal{E})$ — лузинское пространство с борелевской σ -алгеброй. Пусть $p \geq 2$. Рассуждая аналогично теореме 3 из [1], мы получаем, что θ допускает продолжение на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$ как L^2 -значная случайная мера, причем ее разложение по теореме 1 из [1] можно выбрать единым относительно фильтров $\mathfrak{F}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$ (в том смысле, что на $\tilde{\mathfrak{F}}$ вместо мер $\theta^{(i)}$ также берутся их продолжения). Так как $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ является хорошим относительно θ расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, то для $\mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримой функции условия принадлежности к $L^{1,p}(\theta)$ и $\tilde{L}^p(\theta)$ на $\mathfrak{F}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$ совпадают. Отсюда получается, что построенное продолжение меры θ на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$ является σ -конечной L^p -значной случайной мерой на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$.

Пусть теперь $0 \leq p < 2$. Применим предложение к мере θ на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$ и строго положительной $\mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримой функции V на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, принадлежащей $L^{1,p}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$, вместо φ . Так как $Z \in \mathcal{H}(\theta)$, то из характеристики мартингалного свойства на $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{Q})$ в терминах вероятностной меры $\mathbf{P}$ и его сохранения для мартингалов из $\mathcal{H}(\theta)$ относительно $\mathbf{P}$ при переходе от $\mathfrak{F}$ к $\tilde{\mathfrak{F}}$ следует, что $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{Q})$ является хорошим относительно θ расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{Q})$. Согласно доказанному выше, θ допускает продолжение на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$ как σ -конечная L^2 -значная случайная мера относительно вероятностной меры $\mathbf{Q}$, причем относительно $\mathbf{Q}$ функция $\tilde{V}$, которая строится из V в соответствии с предложением аналогично $\tilde{\varphi}$ из φ , принадлежит $L^{1,2}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$ и, следовательно, $L^{1,2}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$, и из $1/Z_\infty \in L^{p/(2-p)}(\mathbf{P})$ в силу неравенства Гёльдера следует, что $\tilde{V} \in L^{1,p}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$ относительно $\mathbf{P}$, а сама V принадлежит $\tilde{L}^p(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$.

Если $\varphi \in \mathcal{P}(\tilde{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измерима и принадлежит $L^{1,p}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$, то совершенно аналогично доказательству теоремы 3 из [1] получается, что $\varphi \in L^{1,p}(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$. Если же $\varphi \in \tilde{L}^p(\theta, \tilde{\mathfrak{F}})$,

то существует такой строго положительный $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ -измеримый процесс K , что $K\varphi \in L^{1,p}(\theta, \mathfrak{F})$, так что $K\varphi \in \hat{L}^p(\theta, \mathfrak{F})$ и, следовательно, $\varphi \in \hat{L}^p(\theta, \mathfrak{F})$.

Если $\varphi \in L^{1,p}(\theta, \mathfrak{F})$ для $p \geq 2$, то совершенно аналогично доказательству теоремы 3 из [1] получается, что $\varphi \in L^{1,p}(\theta, \mathfrak{F})$. Пусть теперь $\varphi \in L^{1,0}(\theta, \mathfrak{F})$. Согласно предложению, $\varphi 1_{[0, \tau_n] \times E} \in L^{1,2}(\theta, \mathfrak{F})$ относительно вероятностной меры $\mathbf{Q}$ для надлежащим образом выбранной локализирующей последовательности моментов остановки $(\tau_n)_{n \in \mathbf{N}}$, так что $\varphi 1_{[0, \tau_n] \times E} \in L^{1,2}(\theta, \mathfrak{F})$ относительно вероятностной меры $\mathbf{Q}$, и, следовательно, $\varphi 1_{[0, \tau_n] \times E} \in L^{1,0}(\theta, \mathfrak{F})$ относительно вероятностной меры $\mathbf{P}$. Если теперь $(\varphi_m)_{m \in \mathbf{N}}$ — последовательность $\mathcal{P}(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримых функций на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, сходящаяся к 0 и такая, что $|\varphi_m| \leq |\varphi|$ для всех $m \in \mathbf{N}$, то $\theta_t(\varphi_m 1_{[0, \tau_n] \times E}) = \varphi_m \times \theta_{t \wedge \tau_n}$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ сходятся к 0 в L^0 , т.е. по вероятности, так что $\theta_t(\varphi_m) = \varphi_m \times \theta_t$ также сходятся к 0 по вероятности, и, следовательно, $\varphi \in L^{1,0}(\theta, \mathfrak{F})$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{E}$ -измерима и принадлежит $\hat{L}^p(\theta, \mathfrak{F})$ для $p \geq 2$. Тогда мы получаем, что $\varphi \in \hat{L}^p(\theta, \mathfrak{F})$, аналогично доказательству теоремы 3 из [1].

Наконец, случай общего измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$ сводится к случаю лунзинского пространства с использованием процедуры, аналогичной завершению доказательства теоремы 3 из [1]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев В. А. Поведение случайных мер при замене фильтрации. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 754–763.
2. Bichteler K., Jacod J. Random measures and stochastic integration. — Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 1983, v. 49, p. 1–18.
3. Lebedev V. A. Behaviour of L^p -valued random measures under good extension of the stochastic basis. — 22nd European Meeting of Statisticians and 7th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts of Communications. Vilnius: TEV, 1998, p. 298.
4. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975, 192 с.
5. Лебедев В. А. Теорема Фубини для зависящих от параметра стохастических интегралов по L^0 -значным случайным мерам. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 313–323.
6. Jacod J., Mémérin J. Weak and strong solutions of stochastic differential equations: existence and stability. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 851, p. 169–212.
7. Jacod J. Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle et changements de filtration. — Lecture Notes in Math., 1980, v. 784, p. 161–172.
8. Лебедев В. А. Стохастическое интегрирование по семимартингалным случайным мерам. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 792–794.
9. Лебедев В. А. Устойчивые пространства семимартингалов и хорошие расширения стохастического базиса. — Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. М.: ТВП, 1996, с. 102–103.
10. Emery M. Une topologie sur l'espace des semimartingales. — Lecture Notes in Math., 1979, v. 721, p. 260–280.
11. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.

Поступила в редакцию
16.VI.1997

Сокращенный вариант
17.XI.2000