Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Петров, О законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 569–571

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:14:27

© 2001 г.

ПЕТРОВ В. В.*

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Исследованы условия применимости закона повторного логарифма к последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями.

Ключевые слова и фразы: закон повторного логарифма, последовательности независимых случайных величин.

1. Введение. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots$ с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями, равными нулю. Положим

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad B_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} X_j^2,$$

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{B_n^{-1/2} S_n < x\}, \quad \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

В работе автора [1] (см. также [2, с. 261]) показано, что если выполнены условия²⁾

$$B_n \rightarrow \infty, \tag{1}$$

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \rightarrow 1, \tag{2}$$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| = O((\ln B_n)^{-1-\delta}) \tag{3}$$

при некотором $\delta > 0$, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln \ln B_n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{4}$$

В этом предложении нельзя ослабить условие (3), заменив в нем $\delta > 0$ значением $\delta = 0$. В. А. Егоров [3] построил пример последовательности независимых случайных величин, удовлетворяющей условиям (1), (2) и условию (3) при $\delta = 0$, для которой соотношение (4) не выполнено. Представляет интерес исследование эффекта нарушения условия (2).

2. Основной результат. Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями. Если выполнены условия (1) и (3) при некотором $\delta > 0$, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln \ln B_n)^{1/2}} \leq 1 \quad \text{п.н.} \tag{5}$$

* С.-Петербургский государственный университет; математико-механический факультет, Старый Петергоф, 198904 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00732).

²⁾ Пределы указаны всюду при $n \rightarrow \infty$, если не оговорено противное.

3. Доказательство. Пусть τ — произвольное положительное число. Используя условие (1) и неубывание последовательности $\{B_n\}$, определим последовательность целых положительных чисел $\{n_k; k = 1, 2, \dots\}$ следующим образом: пусть n_1 таково, что $B_{n_1} > e$; при данном n_{k-1} ($k = 2, 3, \dots$) определим n_k как наименьшее целое число, для которого $B_{n_k} > (1 + \tau) B_{n_{k-1}}$. Таким образом, справедливы неравенства

$$B_{n_{k-1}} \leq (1 + \tau) B_{n_{k-1}} < B_{n_k}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что $n_{k-1} < n_k$ при всех $k \geq 2$, так что последовательность $\{n_k\}$ строго возрастает и $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Положим $L(n) = (2B_n \ln \ln B_n)^{1/2}$, $\bar{S}_n = \max_{1 \leq j \leq n} S_j$. Соотношение (5) будет доказано, если мы покажем, что

$$\mathbf{P}\{S_n > (1 + \varepsilon) L(n) \text{ б.ч.}\} = 0 \quad (7)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Докажем сначала, что

$$\sum_k \mathbf{P}\{\bar{S}_{n_k-1} > (1 + \varepsilon) L(n_{k-1})\} < \infty \quad (8)$$

для любого $\varepsilon > 0$. С этой целью применим неравенство Колмогорова $\mathbf{P}\{\bar{S}_n \geq x\} \leq 2\mathbf{P}\{S_n \geq x - (2B_n)^{1/2}\}$, справедливое для сумм независимых случайных величин с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями, равными нулю, и для любого x (см., например, [2, с. 79]). Для всех достаточно больших k имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_{n_k-1} > (1 + \varepsilon) L(n_{k-1})\} &\leq 2\mathbf{P}\{\bar{S}_{n_k-1} > (1 + \varepsilon) L(n_{k-1}) - (2B_{n_k-1})^{1/2}\} \\ &\leq 2\mathbf{P}\{S_{n_k-1} > (1 + \gamma) L(n_k - 1)\} \end{aligned} \quad (9)$$

для любого $\gamma < \varepsilon$, так как

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon) L(n_{k-1}) - (2B_{n_k-1})^{1/2} &\geq \frac{1 + \varepsilon}{(1 + 2\tau)^{1/2}} L(n_k - 1) - (2B_{n_k-1})^{1/2} \\ &\geq (1 + \gamma) L(n_k - 1) \end{aligned}$$

в силу (6) для любого $\gamma < \varepsilon$, если взять τ достаточно малым.

Используя соотношение $1 - \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{-1} e^{-x^2/2} (1 + o(1))$ при $x \rightarrow +\infty$, получаем

$$1 - \Phi(b(2 \ln \ln B_n)^{1/2}) = (2b)^{-1} (\pi \ln \ln B_n)^{-1/2} (\ln B_n)^{-b^2} (1 + o(1))$$

для любого $b > 0$. Отсюда и из равенства $\mathbf{P}\{S_n \geq bL(n)\} = 1 - \Phi(b(2 \ln \ln B_n)^{1/2}) + O((\ln B_n)^{-1-\delta})$, вытекающего из условия (3), находим, что

$$\mathbf{P}\{S_n \geq bL(n)\} \leq (\ln B_n)^{-b^2} \quad (10)$$

для любого положительного $b < (1 + \delta)^{1/2}$ и всех достаточно больших n .

В силу (6) имеем

$$B_{n_k-1} \geq B_{n_{k-1}} \geq (1 + \tau)^{k-2} B_{n_1} \geq (1 + \tau)^{k-2} e, \quad (\ln B_{n_k-1})^{-b^2} \leq ((k-2) \ln(1 + \tau))^{-b^2}$$

для любого целого $k \geq 3$. Из (9) и (10) следует, что

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_{n_k-1} > (1 + \varepsilon) L(n_{k-1})\} \leq M(k-2)^{-c^2} \quad (11)$$

для всех достаточно больших k , если $c^2 < \min\{(1 + \varepsilon)^2, 1 + \delta\}$. Здесь M — положительная постоянная, не зависящая от k . При этом для данных положительных ε и δ постоянную c можно выбрать удовлетворяющей условию $c > 1$. Поэтому из (11) следует (8).

Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > (1 + \varepsilon)L(n) \text{ б.ч.}\} &\leq \mathbf{P}\left\{\max_{n_{k-1} \leq n < n_k} S_n > (1 + \varepsilon)L(n_{k-1}) \text{ б.ч.}\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\bar{S}_{n_{k-1}} > (1 + \varepsilon)L(n_{k-1}) \text{ б.ч.}\} = 0 \end{aligned}$$

в силу (8) и леммы Бореля–Кантелли. Равенство (7) доказано. Теорема доказана.

4. Замечание. Если последовательность независимых случайных величин удовлетворяет условиям (1) и (3) при некотором $\delta > 0$, но не удовлетворяет условию (2), то соотношение (4) может не выполняться.

Рассмотрим последовательность независимых нормально распределенных случайных величин $\{X_n\}$ такую, что $\mathbf{E}X_n = 0$ и $B_n = \exp\{n^\beta\}$, где $\beta > 1$. Для этой последовательности выполнены условия (1) и (3) при любом $\delta > 0$, так как $F_n(x) \equiv \Phi(x)$ при любом n . Условие (2) не выполнено. Используя рассуждения, аналогичные приведенным в п. 3, при $n_k = k$, нетрудно показать, что $\limsup S_n (2B_n \ln \ln B_n)^{-1/2} \leq \beta^{-1/2}$ п.н. (Можно также доказать непосредственно или с помощью одного результата Коно [4], что здесь имеет место знак равенства.) Соотношение (4) не выполнено, поскольку $\beta > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 3, с. 514–518.
2. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — М.: Наука, 1987, 317 с.
3. Егоров В. А. О законе повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 4, с. 722–729.
4. Кôно N. Une extension de la loi du logarithme itéré pour la somme de variables aléatoires indépendantes et gaussiennes centrées. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1974, v. 279, № 9, p. 345–346.

Поступила в редакцию
18.XI.1999

© 2001 г.

СОФРОНОВ Г. Ю.*

АСИМПТОТИЧЕСКИ d -ОПТИМАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ

Рассматривается задача обнаружения разладки для последовательности случайных величин. Строится d -оптимальный критерий, гарантирующий d -риск. Найдена асимптотика этого критерия.

Ключевые слова и фразы: обнаружение разладки, d -апостериорный подход, d -гарантийность, d -оптимальность, слабая сходимость, функционалы от винеровского процесса.

Пусть $X^{(n)} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами. Рассматривается задача проверки гипотезы H_0 (отсутствие разладки): независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$ (n фиксировано) одинаково распределены с плотностью $f(x)$, при альтернативе H_1 (есть разладка): $X_1, \dots, X_r$ распределены

* Марийский государственный университет, Кафедра матем. анализа и теории функций, Йошкар-Ола.