Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Чистяков, Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 573–579

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:16:42

© 2001 г.

ЧИСТЯКОВ Г. П.*

НОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ ПОСТОЯННЫЕ В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА. II ¹⁾

В центральной предельной теореме Ляпунова получено новое асимптотическое разложение для функций распределения центрированных и нормированных сумм независимых случайных величин, необязательно одинаково распределенных. Полученное разложение используется для нахождения асимптотически наилучших постоянных в неравенстве Берри-Эссеена. Тем самым решена задача, поставленная Колмогоровым и Золотаревым.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, теорема Ляпунова, оценки Берри-Эссеена, асимптотическое разложение, характеристические функции.

4. Доказательство результатов об асимптотически наилучших постоянных

Доказательство теоремы 2.2. Мы выведем теорему 2.2 из теоремы 2.1. В §§ 4 и 5 будем использовать обозначения, введенные в §§ 1 и 2. Без потери общности предположим, что отношение Ляпунова $L \leq c$, где c так мало, как потребуется в рассуждениях ниже.

Вначале докажем теорему в случае, когда $M_f > L^2$, $S_* = \emptyset$, и в случае, когда $M_f \leq L^2$. Для того, чтобы использовать вторую часть теоремы 2.1, необходимо оценить величину $\alpha(x)$. По формуле Тейлора, $\alpha(x)$ можно записать в виде

$$\alpha(x) = -\frac{1}{6s^3} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(3)}\left(x - \frac{u_0}{s}\right) u^3 dF_j(u), \quad (4.1)$$

где $u_0 = u_0(u)$ принимает вещественные значения и $|u_0| < |u|$. Легко видеть, что

$$\left| \Phi^{(3)}\left(x - \frac{u_0}{s}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.2)$$

и

$$\left| \Phi^{(3)}\left(x - \frac{u_0}{s}\right) - \Phi^{(3)}(x) \right| \leq \sup_{v \in \mathbb{R}^1} \left| \Phi^{(4)}\left(x - \frac{v}{s}\right) \right| \frac{|u|}{s} \leq \frac{|u|}{s}. \quad (4.3)$$

В силу (4.1) и (4.2), справедлива оценка

$$|\alpha(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |u|^3 dF_j(u) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} L,$$

из которой, учитывая вторую часть теоремы 2.1, следует, что

$$\rho(F * \Phi_\epsilon, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Chistyakov G. P. A new asymptotic expansion and asymptotically best constants in Lyapunov's theorem. II.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

* Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, пр. Ленина, 47, Харьков, 61164 Украина; e-mail: chistyakov@ilt.kharkov.ua

¹⁾ Часть I статьи опубликована в журнале «Теория вероятностей и ее применения», 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344. Работа выполнена при поддержке SFB 343, Билефельд, Германия.

Очевидно, что $\rho(\Phi * \Phi_\varepsilon, \Phi) \leq cL^2$. Теперь, применяя лемму 3.1 к плотностям P_1 , P_2 и H с функциями распределения $F(x)$, $\Phi(x)$ и $\Phi_\varepsilon(x)$ соответственно, и полагая $\tau = 10\varepsilon\sqrt{|\ln \varepsilon|}$, приходим к оценке

$$\rho(F, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}, \quad (4.4)$$

что доказывает теорему в рассматриваемом случае.

Теперь положим $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$. Положим $\delta = L^{-5/12} h/s$ и перепишем формулу (4.1) в виде

$$\begin{aligned} \alpha(x) = & -\frac{1}{6s^3} \sum_{j=1}^n \int_{|u| \leq \delta s} \Phi^{(3)}\left(x - \frac{u_0}{s}\right) u^3 dF_j(u) \\ & - \frac{1}{6s^3} \sum_{j=1}^n \int_{|u| > \delta s} \Phi^{(3)}\left(x - \frac{u_0}{s}\right) u^3 dF_j(u) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x). \end{aligned}$$

В силу (4.2), член $\alpha_2(x)$ оценивается следующим образом:

$$|\alpha_2(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi} s^3} \sum_{j=1}^n \int_{|u| > \delta s} |u|^3 dF_j(u). \quad (4.5)$$

Используя оценку (4.3), перепишем член $\alpha_1(x)$ в виде

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} (1-x^2) e^{-x^2/2} \frac{1}{s^3} \sum_{j=1}^n \int_{|u| \leq \delta s} u^3 dF_j(u) + \Delta(x) = \alpha_{1,1}(x) + \Delta(x),$$

где

$$|\Delta(x)| \leq c \frac{\delta}{s^3} \sum_{j=1}^n \int_{|u| \leq \delta s} |u|^3 dF_j(u) \leq c \delta L.$$

В силу (2.9), $\delta \leq cL^{7/12}$ и, наконец,

$$|\Delta(x)| \leq cL^{19/12}. \quad (4.6)$$

Величина $\alpha_{1,1}(x)$, очевидно, оценивается следующим образом:

$$|\alpha_{1,1}(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j=1}^n \left| \int_{|u| \leq \delta s} u^3 dF_j(u) \right|. \quad (4.7)$$

Теперь заметим, что модуль третьего члена в правой части (2.8) не превосходит

$$\frac{h}{2\sqrt{2\pi} s} e^{-x^2/2}. \quad (4.8)$$

Введем

$$\gamma_{J_*} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*} \left| \int_{|u| \leq \delta s} u^3 dF_j(u) \right| + \frac{h}{2\sqrt{2\pi} s},$$

где J_* — множество индексов из теоремы 2.1. Используя (4.5)–(4.8), из представления (2.8) получим неравенство

$$\begin{aligned} \rho(F * \Phi_\varepsilon, \Phi) \leq & \gamma_{J_*} + \frac{1}{6\sqrt{2\pi} s^3} \sum_{j \in J_*} \int_{|u| > \delta s} |u|^3 dF_j(u) \\ & + \frac{1}{6\sqrt{2\pi} s^3} \sum_{j \notin J_*} \beta_j + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Введем случайные величины $Y_j = X_j/h$ с функциями распределения $G_j(x) = F_j(hx)$ и характеристическими функциями $g_j(t) = f_j(t/h)$ соответственно. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}Y_j = 0, \quad \mathbf{D}Y_j = \frac{\sigma_j^2}{h^2}, \quad \mathbf{E}|Y_j|^3 = \frac{\beta_j}{h^3}.$$

Покажем теперь, что случайные величины Y_j , $j \in J_*$, удовлетворяют условиям леммы 3.5 с $\eta = L^{2-13c_1}$ и $K = 6c_1$. Для этого воспользуемся (2.11) и оценкой $h \leq 10^3 Ls$, которая слабее, чем (2.9). Используя эти оценки, мы видим, что

$$|g_j(2\pi)| = \left| f_j\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right| \geq 1 + c \frac{\ln L}{L^{12c_1}} \frac{\sigma_j^2}{s^2} = 1 + c \frac{\ln L}{L^{12c_1}} \left(\frac{h}{s}\right)^2 \mathbf{D}Y_j \geq 1 - L^{2-13c_1} \mathbf{D}Y_j,$$

значит условие (3.5) выполняется. Положим $T = s^2/B$. В силу (2.4),

$$\sigma_j^2 T^2 = \sigma_j^2 \frac{s^4}{B^2} \leq \sigma_j^2 L^{-16c_1} \frac{\sigma_j^4}{\beta_j^2} \leq L^{-16c_1},$$

и поэтому, учитывая неравенство $hT \geq L^{c_1}$, которое следует из определения параметра h (см. (2.7)), получаем $\mathbf{D}Y_j \leq L^{-16c_1} (hT)^{-2} \leq L^{-18c_1}$, так что условие (3.3) также выполняется. Вновь используя (2.4), получаем

$$\mathbf{E}|Y_j|^3 = \frac{\beta_j}{B} \frac{B}{h^3} \leq L^{-8c_1} \frac{\sigma_j^2}{s^2} \frac{B}{h^3} = L^{-8c_1} (hT)^{-1} \mathbf{D}Y_j \leq L^{-9c_1} \mathbf{D}Y_j,$$

т.е. условие (3.4) выполняется. Таким образом, все условия леммы 3.5 выполняются, и в силу указанной леммы найдутся случайные величины Y_j^* , $j \in J_*$, с функциями распределения из класса $\mathfrak{F}_{3, L^{2c_1}}$, такие, что для них справедливы соотношения (3.6)–(3.8) с указанными выше значениями параметров η и K . Из (3.6) получаем соотношение

$$(1 - L^{6c_1}) \frac{1}{h^2} \sum_{j \in J_*} \sigma_j^2 \leq \sum_{j \in J_*} \mathbf{D}Y_j^* \leq (1 + L^{6c_1}) \frac{1}{h^2} \sum_{j \in J_*} \sigma_j^2,$$

из которого, в силу (2.10), следует, что

$$(1 - 2L^{6c_1}) \frac{s^2}{h^2} \leq \sum_{j \in J_*} \mathbf{D}Y_j^* \leq (1 + L^{6c_1}) \frac{s^2}{h^2}. \quad (4.10)$$

Кроме того, из (3.7) и (3.8) следует, что

$$\sum_{j \in J_*} \left| \int_{|x| \leq L^{-5/12}} x^3 dG_j(x) \right| \leq \sum_{j \in J_*} \left(|\mathbf{E}(Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*)^3| + L^{2c_1} \mathbf{D}Y_j \right) \quad (4.11)$$

и

$$\sum_{j \in J_*} \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3 \leq \sum_{j \in J_*} \left(\int_{|x| \leq L^{-5/12}} |x|^3 dG_j(x) + L^{2c_1} \mathbf{D}Y_j \right) \quad (4.12)$$

соответственно.

Перепишем выражение для величины γ_{J_*} в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{J_*} &= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*} \left| \int_{|u| \leq \delta s/h} u^3 dG_j(u) \right| + \frac{h}{2\sqrt{2\pi} s} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*} \left| \int_{|u| \leq L^{-5/12}} u^3 dG_j(u) \right| + \frac{h}{2\sqrt{2\pi} s}, \end{aligned}$$

и оценим ее с помощью (4.11) и (4.10). Получим

$$\begin{aligned} \gamma_{J_*} &\leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \left(\sum_{j \in J_*} |\mathbf{E}(Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*)^3| + L^{2c_1} \frac{s^2}{h^2} \right) + \frac{h}{2\sqrt{2\pi} s} \\ &\leq \frac{1 + L^{2c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*} \left(\frac{1}{6} |\mathbf{E}(Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*)^3| + \frac{1}{2} \mathbf{D}Y_j^* \right). \end{aligned}$$

Используя лемму 3.3 и неравенство (4.12), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_*} \left(\frac{1}{6} \left| \mathbf{E}(Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*)^3 \right| + \frac{\mathbf{D}Y_j^*}{2} \right) &\leq \frac{\sqrt{10}+3}{6} (1+9L^{2c_1}) \sum_{j \in J_*} \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3 \\ &\leq \frac{\sqrt{10}+3}{6} (1+9L^{2c_1}) \sum_{j \in J_*} \left(\int_{|x| \leq L^{-5/12}} |x|^3 dG_j(x) + L^{2c_1} \mathbf{D}Y_j \right); \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_{J_*} &\leq (1+11L^{2c_1}) \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*} \left(\int_{|x| \leq L^{-5/12}} |x|^3 dG_j(x) + L^{2c_1} \mathbf{D}Y_j \right) \\ &\leq (1+11L^{2c_1}) \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*} \int_{|x| \leq \delta s} |x|^3 dF_j(x) + cL^{2c_1} \frac{h}{s}. \end{aligned}$$

Кроме того, $h/s \leq 10^3 L$. Применяя последние два неравенства к (4.9), приходим к оценке

$$\rho(F * \Phi_\varepsilon, \Phi) \leq \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

С помощью леммы 3.1, так же, как и в доказательстве соотношения (4.4), получаем (2.14).

Докажем оценку (2.15). В силу (4.4), достаточно установить справедливость (2.15) в случае, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$. Введем два подмножества $J_*^{(1)}$ и $J_*^{(2)} = J_* \setminus J_*^{(1)}$ множества J_* следующим образом. Скажем, что индекс j принадлежит $J_*^{(1)}$, если

$$h\sigma_j^2 > \frac{2}{3} \left| \int_{|u| \leq \delta s} u^3 dF_j(u) \right|. \quad (4.13)$$

Пусть

$$\zeta = -\frac{1}{6s^3} \sum_{j=1}^n \int_{|u| \leq \delta s} u^3 dF_j(u).$$

Легко видеть, что

$$\Phi(x) - \Phi(x - \zeta) = \zeta \Phi'(x - \zeta_1 \zeta),$$

где $\zeta_1 \in (0, 1)$, и найдется $\zeta_2 \in (0, 1)$ такое, что

$$\left| \Phi'(x - \zeta_1 \zeta) - \Phi'(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x - \zeta_2 \zeta)^2/2} |x - \zeta_2 \zeta| |\zeta|.$$

Поскольку $|\zeta| \leq L$, правая часть последнего неравенства не превосходит cL , так что

$$\Phi(x) - \Phi(x - \zeta) = \zeta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + c\Theta L^2.$$

Напомним, что $|\Theta| \leq 1$. Из последней формулы и (4.6) следует, что

$$\left| \Phi(x) - \Phi(x - \zeta) + \alpha_1(x) \right| \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2} \frac{1}{s^3} \sum_{j=1}^n \left| \int_{|u| \leq \delta s} u^3 dF_j(u) \right| + cL^{19/12}.$$

Отсюда и из представления (2.8), используя (4.5) и (4.8), получаем, что

$$\begin{aligned} \left| (F * \Phi_\varepsilon)(x) - \Phi(x - \zeta) \right| &\leq \gamma_{J_*^{(1)}}(x) + \gamma_{J_*^{(2)}} + \frac{h}{2\sqrt{2\pi}s} m(\bar{J}_*) \\ &+ \frac{1}{6\sqrt{2\pi}s^3} \sum_{j \in J_*} \int_{|u| > \delta s} |u|^3 dF_j(u) + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}s^3} \sum_{j \notin J_*} \beta_j + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}, \quad (4.14) \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{J_*^{(1)}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(1)}} \left(\frac{x^2}{6} \left| \int_{|u| \leq \delta_s} u^3 dF_j(u) \right| + \frac{h}{2} \sigma_j^2 \right),$$

$$\gamma_{J_*^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(2)}} \left(\frac{1}{6} \left| \int_{|u| \leq \delta_s} u^3 dF_j(u) \right| + \frac{h}{2} \sigma_j^2 \right).$$

При условии (4.13),

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^1} e^{-x^2/2} \left(\frac{x^2}{6} \left| \int_{|u| \leq \delta_s} u^3 dF_j(u) \right| + \frac{h}{2} \sigma_j^2 \right) \leq \frac{h}{2} \sigma_j^2.$$

Отсюда, в силу (3.6) при $X = Y_j$ и $X^* = Y_j^*$, $j \in J_*$, получаем

$$\gamma_{J_*^{(1)}}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(1)}} \frac{h}{2} \sigma_j^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(1)}} \frac{1}{2} \mathbf{D}Y_j \leq \frac{1+L^{6c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(1)}} \frac{1}{2} \mathbf{D}Y_j^*.$$

Согласно лемме 3.2, для случайных величин Y_j^* , $j \in J_*$, верно соотношение

$$\frac{1}{2} (1 - 8L^{2c_1}) \mathbf{D}Y_j^* \leq \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3. \quad (4.15)$$

Используя (4.15) и (4.12), получаем, наконец,

$$\begin{aligned} \gamma_{J_*^{(1)}}(x) &\leq \frac{1+L^{c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(1)}} \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3 \\ &\leq \frac{1+L^{c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \left(\sum_{j \in J_*^{(1)}} \int_{|u| \leq \delta_s} |u^3| dF_j(u) + L^{2c_1} h s^2 \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Согласно определению множества $J_*^{(2)}$, величина $\gamma_{J_*^{(2)}}$ не превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*^{(2)}} \int_{|u| \leq \delta_s} |u^3| dF_j(u). \quad (4.17)$$

Применяя (4.16) и (4.17) к (4.14) и учитывая (2.9) и (2.10), получаем неравенство

$$\left| (F * \Phi_\epsilon)(x) - \Phi(x - \zeta) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Легко видеть, что из этого неравенства следует соотношение

$$\left| (F * \Phi_\epsilon)(x) - (\Phi * \Phi_\epsilon)(x - \zeta) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Для доказательства (2.15) остается применить лемму 3.1 к последнему неравенству, как и в доказательстве (4.4).

Доказательство оценки (2.16). Будем рассуждать так же, как и при доказательстве (2.14) и используем те же обозначения. В силу (4.4), достаточно установить справедливость (2.16) в случае, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$. Используем вновь соотношение (4.9), в котором выражение для γ_{J_*} имеет вид $\gamma_{J_*} = h/(2\sqrt{2\pi}s)$ и тогда, в силу (2.10) и (3.6), при $X = Y_j$, $X^* = Y_j^*$, $j \in J_*$, справедлива оценка

$$\gamma_{J_*} \leq \frac{1+L^{7c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*} \frac{h}{2} \sigma_j^2 \leq \frac{1+L^{6c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*} \frac{1}{2} \mathbf{D}Y_j^*.$$

Из этого неравенства и оценок (4.15) и (4.12) следует, что

$$\begin{aligned}\gamma_{J_*} &\leq \frac{1+L^{c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^3}{s^3} \sum_{j \in J_*} \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3 \\ &\leq \frac{1+L^{c_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*} \left(\int_{|u| \leq \delta s} |u|^3 dF_j(u) + L^{2c_1} h \sigma_j^2 \right) \\ &= \frac{1+L^{c_1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{s^3} \sum_{j \in J_*} \int_{|u| \leq \delta s} |u|^3 dF_j(u) + L^{2c_1} \frac{h}{s} \right).\end{aligned}$$

Применяя эту оценку к (4.9) и учитывая, что $h/s \leq 10^3 L$, легко получаем, что

$$\rho(F * \Phi_\varepsilon, \Phi) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Теперь неравенство (2.16) следует из леммы 3.1. Равенство $c_s = 1/\sqrt{2\pi}$ вытекает из этого неравенства и второй части теоремы В.

Остается заметить, что следствие 2.3 непосредственно следует из теоремы 2.2, если учесть вторые части теорем А и В.

Часть настоящих исследований была осуществлена в Университете Билефельда. Я благодарен проф. Ф. Гётце за его гостеприимство во время моего пребывания в Билефельде. Я также благодарен В. Бенткусу, Ф. Гётце и А. Ю. Зайцеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арак Т. В., Зайцев А. Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1986, т. 174.
2. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theor. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
3. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
4. Чистяков Г. П. Об одной задаче Колмогорова. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1990, т. 184, с. 289–319.
5. Esseen C.-G. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
6. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
7. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
8. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
9. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Московского ун-та, 1953, № 10, с. 29–38.
10. Le Cam L. A note on the distribution of sums of independent random variables. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1963, v. 50, p. 601–603.
11. Линник Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, т. 11, № 2, с. 111–138.
12. Петров В. В., О точных оценках в предельных теоремах. — Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 2, с. 180–182.
13. Петров В. В., Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
14. Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
15. Rogozin B. A. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.

16. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
30.VI.1998

© 2001 г.

KALLSEN J.*, SHIRYAEV A. N.**

TIME CHANGE REPRESENTATION OF STOCHASTIC INTEGRALS¹⁾

По теореме Дамбиса и Дубинса–Шварца любой стохастический интеграл $M = (\int_0^t H_s dW_s)_{t \in \mathbf{R}_+}$ по броуновскому движению может быть записан как броуновское движение со случайной заменой времени, т.е. $M = (\widehat{W}_{\widehat{T}_t})_{t \in \mathbf{R}_+}$ для некоторого броуновского движения $(\widehat{W}_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}_+}$ и некоторой замены времени $(\widehat{T}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$. В [7] и [5] показано, что в этом утверждении броуновское движение можно заменить на (симметричное) α -устойчивое движение Леви. Используя процесс кумулянт семи-мартингала, мы даем короткие новые доказательства. Кроме того, мы показываем, что это утверждение не может быть распространено на другие процессы Леви.

Ключевые слова и фразы: устойчивые движения Леви, кумулянтный процесс, стохастический интеграл, замена времени.

1. Time change representations. We generally use the notation of [2]–[4]. The transposed of a vector or matrix x is denoted as x^T and its components are denoted by superscripts. Stochastic and Stieltjes integrals are written as $(H \cdot X_t) = \int_0^t H_s dX_s$. Increasing processes are identified with their corresponding Lebesgue–Stieltjes measure.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}, \mathbf{P})$ be a filtered probability space as in [4, Definition I.1.2]. By *Lévy process* we refer to a process with stationary independent increments in the sense of [4, II.4.1]. Similar to [8, Definition 7.5.1], we make the following

Definition 1. Let $\alpha \in (0, 2]$. An α -stable Lévy motion is a Lévy process X such that X_1 (or equivalently any X_t) has a strictly α -stable distribution (i.e., $X_1 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ for some $\alpha \in (0, 2] \setminus \{1\}$, $\sigma \in \mathbf{R}_+$, $\beta \in [-1, 1]$, $\mu = 0$ or $\alpha = 1$, $\sigma \in \mathbf{R}_+$, $\beta = 0$, $\mu \in \mathbf{R}$). We call X a *symmetric α -stable Lévy motion* if the distribution of X_1 (or equivalently any X_t) is even symmetric α -stable (i.e., $X_1 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ for some $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \in \mathbf{R}_+$).

Definition 2. 1. A *time change* is a right-continuous increasing $[0, \infty]$ -valued process $(T_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}_+}$ such that T_θ is a stopping time for any $\theta \in \mathbf{R}_+$. It is called *finite* if $T_\theta < \infty$ $\mathbf{P}$ -almost surely for any $\theta \in \mathbf{R}_+$.

2. By $\widehat{\mathcal{F}}_\theta := \mathcal{F}_{T_\theta}$ we define the *time-changed filtration* $(\widehat{\mathcal{F}}_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}_+}$.

3. The *inverse time change* $(\widehat{T}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ is defined as $\widehat{T}_t := \inf\{\theta \in \mathbf{R}_+ : T_\theta > t\}$.

4. A process X is called $(T_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}_+}$ -*adapted* if X is constant on $[T_{\theta-}, T_\theta]$ for any $\theta \in \mathbf{R}_+$.

Remark. If X is a semimartingale on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}, \mathbf{P})$ and $(T_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}_+}$ is a finite time change, then the process $(\widehat{X}_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}_+}$ defined by $\widehat{X}_\theta := X_{T_\theta}$ is a semimartingale

* Universität Freiburg, Institut für Mathematische Stochastik, Eckerstr., 1, D79104 Freiburg, Germany; e-mail: kallsen@neyman.mathematik.uni-freiburg.de

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: shiryaev@mi.ras.ru

¹⁾ Работа второго автора поддержана Alexander von Humboldt Foundation и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-00152).