Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Хохлов, Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 585–592

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:59:54

REFERENCES

1. Goll T., Kallsen J. Optimal portfolios for logarithmic utility. — Stochastic Process. Appl., 2000, v. 89, p. 31–48.
2. Jacod J. Calcul stochastique et problèmes de martingales. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1979, 539 p.
3. Jacod J. Intégrales stochastiques par rapport à une semi-martingale vectorielle et changements de filtration. — Lecture Notes in Math., 1980, v. 784, p. 161–172.
4. Jacod J., Shiryaev A. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. Рус. перев.: Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994, 544 с; 368 с.
5. Kallenberg O. Some time change representations of stable integrals, via predictable transformations of local martingales. — Stochastic Process. Appl., 1992, v. 40, № 2, p. 199–223.
6. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 602 p.
7. Rosiński J., Woyczyński W. On Itô stochastic integration with respect to p -stable motion: Inner clock, integrability of sample paths, double and multiple integrals. — Ann. Probab., 1986, v. 14, p. 271–286.
8. Samorodnitsky G., Taqqu M. Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. New York: Chapman&Hall, 1994, 632 p.
9. Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
10. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998, 512 с.; 544 с. Англ. перев.: Shiryaev A. Essentials of Stochastic Finance. Singapore: World Sci. Publ., 1999.

Поступила в редакцию
4.V.2000

© 2001 г.

ХОХЛОВ В. И.*

**МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО
ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, И
ФАКТОРИАЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФОРМАЛИЗМ**

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, пуассоновское распределение, полиномиальное распределение, многочлены Кравчука, многочлены Пуассона–Шарлье, факториально-степенные многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения многочлены, комбинаторные тождества, тождество Лерха.

Введение. Первоначальный вариант этого сообщения был направлен в редакцию журнала «Теория вероятностей и ее применения» еще в начале 1985 года. Однако в том варианте отсутствовали указания на иллюстрации таких применений полученных результатов и предложенной комбинаторной техники, которые могли бы представлять чисто вероятностный интерес. Поэтому автор решил в конечном счете ограничиться публикацией формулировок главных результатов в тезисах [6]. Впоследствии к ним были даны комментарии в докладе на IV Всемирном конгрессе Общества им. Бернулли в Вене (август 1996 г.), а в докладе на Международном

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

конгрессе математиков в Берлине (август 1998 г.) был приведен пример практического использования данной техники в области дискретной математики. Недавно обнаружилось, что разработанная техника оказалась достаточно удобной для получения пуассоновского [1] и биномиальных [2] аналогов неравенства Чернова [4]. Это позволяет теперь предложить вниманию читателя немного расширенный и переработанный вариант той старой заметки.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. В. Прохорова, Б. А. Севастьянова, Ю. В. Болотникова, О. В. Вискова за разносторонние обсуждения результатов и — за ряд существенных поправок — рецензента.

Систему $\{P_\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^l\}_{\alpha=0,1,\dots}$ многочленов в $\mathcal{L}_2(\mu)$, где μ — заданная мера на $\mathbf{R}^l$ ($l = 1, 2, \dots$), обладающую свойством

$$\int P_\alpha(\mathbf{x}) P_\beta(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots$$

($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера), называют *системой многочленов, ортогональных относительно распределения $d\mu(\mathbf{x})$* .

Хорошо известно [8], что для частного случая полиномиального распределения — биномиального распределения $d\mu_B$, определенного на множестве $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, n\}$ равенством

$$\mu_B(\{x\}) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x \in \mathcal{N}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p,$$

— такую систему в $\mathcal{L}_2(\mu_B)$ образуют *многочлены Кравчука*

$$K_\alpha(x) = \binom{n}{\alpha}^{-1/2} (pq)^{-\alpha/2} \sum_{\nu=0}^{\alpha} (-1)^\nu \binom{n-x}{\alpha-\nu} \binom{x}{\nu} p^{\alpha-\nu} q^\nu, \quad (1)$$

где $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $x \in \mathcal{N}$.

Несложные комбинаторные преобразования позволяют получить для многочленов (1) (а также для многочленов Пуассона–Шарлье, ортогональных относительно пуассоновского распределения) новые формы записи через так называемые факториально-степенные многочлены, определение и описание свойств которых сведены в п. 1. Такие формы записи (см. п. 2) позволяют, например, технически довольно простым способом получить представления попарных произведений многочленов Кравчука или многочленов Пуассона–Шарлье в виде линейных комбинаций одноименных многочленов. С другой стороны, одна из новых форм записи многочленов Кравчука подсказывает, как может выглядеть аналог системы многочленов Кравчука для случая полиномиального распределения $d\mu_\Pi$, определенного на множестве

$$\mathcal{N}^r = \left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_r), \quad x_i \in \mathcal{N}, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad x_0 + x_1 + \dots + x_r = n \right\}$$

равенством

$$\mu_\Pi(\{\mathbf{x}\}) = \frac{n!}{x_0! x_1! \dots x_r!} p_0^{x_0} p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r}, \quad p_0 + p_1 + \dots + p_r = 1. \quad (2)$$

В п. 3 приводится такое семейство многочленов, ортогональных относительно полиномиального распределения.

1. Факториально-степенные многочлены и факториально-степенной формализм. Сделаем несколько замечаний об обозначениях. Светлыми строчными греческими буквами будут обозначаться только целые числа. Полу жирными строчными буквами будут обозначаться r -мерные векторы, например, ν обозначает вектор $(\nu_1, \dots, \nu_r)$ с целочисленными координатами. Соответствующими прописными светлыми буквами обозначаются суммы координат таких векторов, например, $N = \nu_1 + \dots + \nu_r$. Запись вида $\mathbf{a}^\nu$ обозначает произведение $a_1^{\nu_1} \dots a_r^{\nu_r}$, а $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение $a_1 b_1 + \dots + a_r b_r$. Всюду ниже полагаем: $[x]^\nu = x(x-1) \dots (x-\nu+1)$, $[x]_\nu = x(x+1) \dots (x+\nu-1)$, если $\nu = 1, 2, \dots$, $[x]^0 = [x]_0 = 1$, $[x]^\nu = 0$, $[x]_\nu = 0$ при остальных значениях ν ; $\nu! = [\nu]^\nu = \Gamma(\nu+1)$. Запись вида $[\mathbf{x}]^\nu$ обозначает произведение $[x_1]^{\nu_1} \dots [x_r]^{\nu_r}$ и $\nu! = [\nu]^\nu$. Считаем, что если у знака суммы опущены нижний и верхний пределы суммирования, суммирование проводится по всем целочисленным значениям индекса (индексам).

О п р е д е л е н и е. Будем называть *факториально-степенным многочленом* (ФСМ) $P_\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{x} // d; c)$ степени $\alpha \geq 0$ сумму

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_r} \frac{[\alpha]^{\nu_1 + \dots + \nu_r}}{\nu_1! \dots \nu_r!} a_1^{\nu_1} \dots a_r^{\nu_r} \frac{[x_1]^{\nu_1} \dots [x_r]^{\nu_r}}{[d]^{\nu_1 + \dots + \nu_r}} c^{\alpha - \nu_1 - \dots - \nu_r}$$

(полагаем $d > \alpha$ и $0/[d]^\kappa = 0$ при $\kappa < 0$, $\kappa > d$) или, в краткой записи,

$$\sum_{\nu} \frac{[\alpha]^N}{\nu!} \mathbf{a}^\nu \frac{[\mathbf{x}]^\nu}{[d]^N} c^{\alpha - N}.$$

Для ФСМ удобна аддитивная запись в виде многочлена

$$\left(a_1 \frac{[x_1]}{[d]} + \dots + a_r \frac{[x_r]}{[d]} + c \right)^\alpha,$$

поскольку общий член его разложения как обычного многочлена $(z_1 + \dots + z_r + c)^\alpha$ при сохранении квадратных скобок у $x_1, \dots, x_r$ и d (так, например, $(a[x]/[d] + c)^2 = a^2[x]^2/[d]^2 + 2acx/d + c^2$, но $[d]^{\nu_i}[d]^{\nu_j} = [d]^{\nu_i + \nu_j}$), совпадает с общим членом суммы, фигурирующей в определении. (Отношения вида $\frac{[x]}{[d]}$ или $[x]/[d]$ иногда будем записывать для удобства в виде $\frac{x}{d}$ или $x//d$.)

Из определения следует, что всякий ФСМ нулевой степени есть единица, а при $r = 1$ ФСМ можно рассматривать как частный случай гипергеометрического ряда.

Аналогично определяется «недробная» модификация ФСМ:

$$\left(a_1[x_1] + \dots + a_r[x_r] + c \right)^\alpha = \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^N}{\nu!} \mathbf{a}^\nu [\mathbf{x}]^\nu c^{\alpha - N}.$$

Особенности предлагаемого факториально-степенного формализма иллюстрируют очевидные соотношения типа $e^{[\alpha]} = 2^\alpha$ (и, вообще, $b^\alpha \exp\{\frac{a}{b}[\alpha]\} = (a + b)^\alpha$),

$$b^\alpha \left(a[\alpha] + b \right)^\beta = b^\beta \left(a[\beta] + b \right)^\alpha \quad \text{и} \quad b^\alpha \left(a \frac{\alpha}{\beta} + b \right)^\gamma = b^\gamma \left(a \frac{\gamma}{\beta} + b \right)^\alpha,$$

$$(a[x] + b[y] + c)^\alpha = a^\alpha \left([x] + \frac{b}{a}[y] + \frac{c}{a} \right)^\alpha$$

и

$$\left(a \frac{x}{d} + b \frac{y}{d} + c \right)^\alpha = a^\alpha \left(\frac{x}{d} + \frac{b}{a} \frac{y}{d} + \frac{c}{a} \right)^\alpha.$$

Отметим два важных свойства ФСМ.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$P_\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{x} // d; c_1 + c_2) = \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} P_\nu(\mathbf{a}, \mathbf{x} // d; c_1) c_2^{\alpha - \nu}.$$

Это тождество есть следствие, например, того факта, что производящая функция $\sum_{\alpha} P_\alpha t^\alpha / \alpha!$ имеет вид $e^{ct} A(t)$, где $A(t) = \sum_{\nu} [\mathbf{x}]^\nu (t\mathbf{a})^\nu / (\nu! [d]^N)$, и значит, ФСМ как многочлены по c суть многочлены Аппеля. Для них это свойство хорошо известно. Отметим, впрочем, что это свойство можно рассматривать и как тривиальный частный случай наиболее общего на сегодня результата такого рода — биномиальной теоремы для многочленов Шеффера (включающих в себя многочлены Аппеля), см. [10, с. 700 и с. 736].

Лемма 2. *Справедливо тождество*

$$(a[x + y] + b[z])^\alpha = (a[x] + a[y] + b[z])^\alpha.$$

Действительно, пользуясь формулой свертки Вандермонда, имеем:

$$\begin{aligned} (a[x + y] + b[z])^\alpha &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} a^\nu [x + y]^\nu b^{\alpha - \nu} [z]^{\alpha - \nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} a^\nu b^{\alpha - \nu} [z]^{\alpha - \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{[\nu]^\mu}{\mu!} [x]^\mu [y]^{\nu - \mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha-\mu} \frac{[\alpha]^{\nu+\mu}}{\nu! \mu!} a^{\nu} a^{\mu} b^{\alpha-\nu-\mu} [x]^{\mu} [y]^{\nu} [z]^{\alpha-\nu-\mu} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^{\mu}}{\mu!} a^{\mu} [x]^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\alpha-\mu} \frac{[\alpha-\mu]^{\nu}}{\nu!} a^{\nu} [y]^{\nu} b^{\alpha-\nu-\mu} [z]^{\alpha-\nu-\mu} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^{\mu}}{\mu!} a^{\mu} [x]^{\mu} (a[y] + b[z])^{\alpha-\mu} = (a[x] + a[y] + b[z])^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Утверждение этой леммы очевидным образом распространяется на ФСМ общего вида.

Приведем еще одно комбинаторное тождество, касающееся ФСМ.

Лемма 3 (тождество М. Лерха). *Справедливо тождество*

$$\frac{[x]^{\alpha}}{[d]^{\alpha}} = \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^{\nu} [d-x]^{\nu}}{\nu! [d]^{\nu}} (-1)^{\nu}.$$

Это тождество было приведено и доказано впервые, по-видимому, в [9] (см. также [5, с. 61, тождество 11]). Несколько обобщенный вариант этого тождества легко доказывается при помощи формулы свертки Вандермонда для возрастающих факториальных степеней ($\beta \geq \alpha$):

$$\begin{aligned}
\frac{[a]^{\alpha}}{[b]^{\beta}} &= \frac{[a-\alpha+1]_{\alpha}}{[b-\beta+1]_{\beta}} = \frac{[b-\beta+1-(b-a-\beta+\alpha)]_{\alpha}}{[b-\beta+1]_{\beta}} \\
&= \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^{\nu}}{\nu!} (-1)^{\nu} [b-a-\beta+\alpha]^{\nu} \frac{[b-\beta+1]_{\alpha-\nu}}{[b-\beta+1]_{\beta}} \\
&= \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^{\nu}}{\nu!} \frac{[b-a-(\beta-\alpha)]^{\nu}}{[b]^{\nu+(\beta-\alpha)}} (-1)^{\nu}.
\end{aligned}$$

Не лишен интереса тот факт, что тождество Лерха дает обоснование группе из трех формальных преобразований, выделенных фигурными скобками в цепочке преобразований

$$\frac{[x]^{\alpha}}{[d]^{\alpha}} = \left\{ \left(\frac{x}{d} \right)^{\alpha} = \left(\frac{-(d-x)+d}{d} \right)^{\alpha} = \left(-\frac{d-x}{d} + 1 \right)^{\alpha} \right\} = \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^{\nu} [d-x]^{\nu}}{\nu! [d]^{\nu}} (-1)^{\nu}. \quad (3)$$

2. Многочлены Кравчука как ФСМ. Разлагая в правой части (1) сомножители $q^{\nu} = (1-p)^{\nu}$ по формуле бинома Ньютона, меняя порядок суммирования и пользуясь формулой свертки Вандермонда (см. замечание 3 ниже), перепишем многочлены (1) в виде

$$K_{\alpha}(x) = k_{\alpha} \left(\frac{x}{n} - p \right)^{\alpha}, \quad \text{где} \quad k_{\alpha} = (-1)^{\alpha} \left(\frac{[n]^{\alpha}}{\alpha! p^{\alpha} q^{\alpha}} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Таким образом, $K_{\alpha}(x) = k_{\alpha} P_{\alpha}(1, x//n; -p)$. По существу, та же форма записи многочленов $K_{\alpha}(x)$ (правда, без нормировки) приведена в [7, формула (2.20)], где многочлены Кравчука трактуются как гипергеометрические функции ${}_2P_1(-\alpha, -x; -n; p^{-1})$.

Форма записи (4) удобна, в частности, тем, что при помощи лемм 1 и 3 она позволяет технически довольно просто получать линейные разложения произведений $K_{\alpha}(x) K_{\beta}(x)$ многочленов Кравчука по одноименной системе.

Теорема 1. *Имеет место разложение*

$$K_{\alpha}(x) K_{\beta}(x) = \left(\frac{p^{\alpha+\beta} [n]^{\alpha} [n]^{\beta}}{q^{\alpha+\beta} \alpha! \beta!} \right)^{1/2} \sum_{\gamma} l_{\gamma} K_{\gamma}(x), \quad (5)$$

где коэффициенты l_{γ} имеют вид

$$\frac{(-1)^{\gamma} q^{\gamma/2}}{\sqrt{\gamma! p^{\gamma} [n]^{\gamma}}} \sum_{\theta, \delta} \frac{(-1)^{\delta}}{\theta! \delta! p^{\theta} [n]^{\theta+\delta}} \sum_{\nu, \mu} \frac{[\alpha]^{\nu} [\beta]^{\mu} [\nu+\mu-\theta]^{\gamma}}{(\nu-\theta-\delta)! (\mu-\theta-\delta)!} (-1)^{\nu+\mu}.$$

Доказательство. По формуле (6) и определению ФСМ

$$\begin{aligned} K_{\alpha}(x) K_{\beta}(x) &= k_{\alpha} k_{\beta} \left(\frac{x}{n} - p \right)^{\alpha} \left(\frac{x}{n} - p \right)^{\beta} \\ &= k_{\alpha} k_{\beta} \sum_{\nu, \mu} \frac{[\alpha]^{\nu} [\beta]^{\mu}}{\nu! \mu!} \frac{[x]^{\nu} [x]^{\mu}}{[n]^{\nu} [n]^{\mu}} (-p)^{\alpha + \beta - \nu - \mu}. \end{aligned}$$

При помощи формулы свертки Вандермонда получаем:

$$\begin{aligned} [x]^{\nu} [x]^{\mu} &= [x]^{\nu} [\nu + x - \nu]^{\mu} = [x]^{\nu} \sum_{\theta} [\mu]^{\theta} [\nu]^{\theta} [x - \nu]^{\mu - \theta} / \theta! \\ &= \sum_{\theta} [\mu]^{\theta} [\nu]^{\theta} [x]^{\nu + \mu - \theta} / \theta!. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому

$$\frac{[x]^{\nu} [x]^{\mu}}{[n]^{\nu} [n]^{\mu}} = \sum_{\theta} \frac{[\mu]^{\theta} [\nu]^{\theta}}{\theta!} \frac{[n]^{\nu + \mu - \theta}}{[n]^{\nu} [n]^{\mu}} \frac{[x]^{\nu + \mu - \theta}}{[n]^{\nu + \mu - \theta}}. \quad (7)$$

Пользуясь леммой 1, преобразуем последнюю дробь в правой части (7):

$$\begin{aligned} \frac{[x]^{\nu + \mu - \theta}}{[n]^{\nu + \mu - \theta}} &= \left(\frac{x}{n} \right)^{\nu + \mu - \theta} = \left(\frac{x}{n} - p + p \right)^{\nu + \mu - \theta} \\ &= \sum_{\gamma} \frac{[\nu + \mu - \theta]^{\gamma}}{\gamma!} \left(\frac{x}{n} - p \right)^{\gamma} p^{\nu + \mu - \theta - \gamma} \\ &= \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} [\nu + \mu - \theta]^{\gamma} p^{\nu + \mu - \theta} \left(\frac{q^{\gamma}}{\gamma! p^{\gamma} [n]^{\gamma}} \right)^{1/2} K_{\gamma}(x). \end{aligned}$$

Теперь для того чтобы прийти к разложению (5), остается, пользуясь правилом (3), преобразовать предпоследнюю дробь в правой части (7):

$$\begin{aligned} \frac{[n]^{\nu + \mu - \theta}}{[n]^{\nu} [n]^{\mu}} &= \frac{[n]^{\nu} [n - \nu]^{\mu - \theta}}{[n]^{\nu} [n]^{\theta} [n - \theta]^{\mu - \theta}} = \frac{1}{[n]^{\theta}} \left(\frac{n - \nu}{n - \theta} \right)^{\mu - \theta} \\ &= \frac{1}{[n]^{\theta}} \left(\frac{-(\nu - \theta) + n - \theta}{n - \theta} \right)^{\mu - \theta} = \frac{1}{[n]^{\theta}} \left(-\frac{\nu - \theta}{n - \theta} + 1 \right)^{\mu - \theta} \\ &= \frac{1}{[n]^{\theta}} \sum_{\delta} \frac{[\mu - \theta]^{\delta} [\nu - \theta]^{\delta}}{\delta! [n - \theta]^{\delta}} (-1)^{\delta} = \sum_{\delta} \frac{[\nu - \theta]^{\delta} [\mu - \theta]^{\delta}}{\delta! [n]^{\theta + \delta}} (-1)^{\delta} \end{aligned} \quad (8)$$

и изменить порядок суммирования.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пользуясь записью (4) многочленов $K_{\alpha}(x)$ в виде ФСМ, при помощи теоремы 1 можно доказывать ортогональность по $d\mu_{\mathbf{B}}$ системы многочленов Кравчука, не прибегая к производящей функции, как это обычно делается. Действительно (ниже $\beta_{n,p}$ — случайная величина с распределением $d\mu_{\mathbf{B}}$),

$$\mathbf{M} \left(\frac{\beta_{n,p}}{n} - p \right)^{\alpha} = \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^{\nu}}{\nu!} \frac{\mathbf{M} [\beta_{n,p}]^{\nu}}{[n]^{\nu}} (-p)^{\alpha - \nu} = 0^{\alpha} = \delta_{0\alpha},$$

поскольку $\mathbf{M} [\beta_{n,p}]^{\nu} = p^{\nu} [n]^{\nu}$. Поэтому в силу (5) имеем:

$$\mathbf{M} K_{\alpha}(\beta_{n,p}) K_{\beta}(\beta_{n,p}) = (-1)^{\alpha + \beta} \left(\frac{p^{\alpha + \beta} [n]^{\alpha} [n]^{\beta}}{q^{\alpha + \beta} \alpha! \beta!} \right)^{1/2} l_0,$$

где

$$l_0 = \sum_{\theta, \delta} \frac{(-1)^{\delta}}{\theta! \delta! p^{\theta} [n]^{\theta + \delta}} \sum_{\nu, \mu} \frac{[\alpha]^{\nu} [\beta]^{\mu}}{(\nu - \theta - \delta)! (\mu - \theta - \delta)!} (-1)^{\nu + \mu},$$

и, так как

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^{\nu}}{(\nu - \theta - \delta)!} (-1)^{\nu} &= [\alpha]^{\theta + \delta} (-1)^{\theta + \delta} \sum_{\nu} \frac{[\alpha - \theta - \delta]^{\nu - \theta - \delta}}{(\nu - \theta - \delta)!} (-1)^{\nu - \theta - \delta} \\ &= [\alpha]^{\theta + \delta} (-1)^{\theta + \delta} 0^{\alpha - (\theta + \delta)}, \end{aligned}$$

а сумма по μ сворачивается так же, то $l_0 = \delta_{\alpha\beta} q^\alpha \alpha! / (p^\alpha [n]^\alpha)$ и, значит, $MK_\alpha(\beta_{n,p}) K_\beta(\beta_{n,p}) = \delta_{\alpha\beta}$.

З а м е ч а н и е 2. Многочлены $PC_\alpha(x)$ Пуассона–Шарлье (см., например, [3, § 2.81]), ортогональные относительно пуассоновского распределения $d\mu_P (\mu_P(\{x\}) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!, x = 0, 1, \dots)$, как легко проверить, можно записать при помощи «недробных» ФСМ следующим образом:

$$PC_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}} \left(\frac{1}{\lambda} [x] - 1 \right)^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha! \lambda^\alpha}} ([x] - \lambda)^\alpha.$$

Поскольку утверждение леммы 1, очевидно, остается справедливым и для «недробных» ФСМ, можно, повторяя выкладки доказательства теоремы 1, получить аналогичное (5) линейное разложение произведения двух многочленов Пуассона–Шарлье:

$$PC_\alpha(x) PC_\beta(x) = \left(\frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} \right)^{1/2} \sum_{\gamma} \tilde{l}_\gamma PC_\gamma(x),$$

где

$$\tilde{l}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma! \lambda^\gamma}} \sum_{\theta} \frac{1}{\theta! \lambda^\theta} \sum_{\nu, \mu} \frac{[\alpha]^\nu [\beta]^\mu [\nu + \mu - \theta]^\gamma}{(\nu - \theta)! (\mu - \theta)!} (-1)^{\nu+\mu}.$$

Это разложение, как и разложение (5), дает возможность доказывать ортогональность системы $\{PC_\alpha(x)\}_{\alpha=0,1,\dots}$, не прибегая к использованию производящей функции.

З а м е ч а н и е 3. Многочлены Кравчука допускают и «недробные» ФСМ-представления, например, следующего вида:

$$K_\alpha(x) = (-1)^\alpha \tilde{k}_\alpha (q[x] - p[n-x])^\alpha = \tilde{k}_\alpha (p[n-x] - q[x])^\alpha,$$

где $\tilde{k}_\alpha = ([n]^\alpha \alpha! p^\alpha q^\alpha)^{-1/2}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{n} - p \right)^\alpha &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} \frac{[x]^\nu}{[n]^\nu} (-p)^{\alpha-\nu} = \frac{1}{[n]^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} [x]^\nu [n-\nu]^{\alpha-\nu} (-p)^{\alpha-\nu} \\ &= \frac{1}{[n]^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} [x]^\nu [n-x+x-\nu]^{\alpha-\nu} (-p)^{\alpha-\nu} \\ &= \frac{1}{[n]^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha} \sum_{\mu=0}^{\alpha-\nu} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} [x]^\nu \frac{[\alpha-\nu]^\mu}{\mu!} [n-x]^\mu [x-\nu]^{\alpha-\nu-\mu} (-p)^{\alpha-\nu} \\ &= \frac{1}{[n]^\alpha} \sum_{\mu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\mu}{\mu!} [n-x]^\mu [x]^{\alpha-\mu} (-p)^\alpha \sum_{\nu=0}^{\alpha-\mu} \frac{[\alpha-\mu]^\nu}{\nu!} (-p)^{-\nu} \\ &= \frac{(-p)^\alpha}{[n]^\alpha} \sum_{\mu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\mu}{\mu!} [n-x]^\mu (-q)^{\alpha-\mu} [x]^{\alpha-\mu} p^{\mu-\alpha} \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{[n]^\alpha} (p[n-x] - q[x])^\alpha = \frac{1}{[n]^\alpha} (q[x] - p[n-x])^\alpha. \end{aligned}$$

3. Факториально-степенные многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения.

Теорема 2. ФСМ вида

$$h_\alpha \left\langle \mathbf{a}, \frac{\mathbf{x}}{n} - \mathbf{p} \right\rangle^\alpha = h_\alpha \left(a_1 \frac{x_1}{n} + \dots + a_r \frac{x_r}{n} - c \right)^\alpha, \quad (9)$$

где $h_\alpha = ([n]^\alpha / (\alpha! (a_1^2 p_1 + \dots + a_r^2 p_r - c^2)^\alpha)^{1/2}$ и $c = a_1 p_1 + \dots + a_r p_r$, а параметры $a_1, \dots, a_r$ — произвольные вещественные числа, образуют семейство $\{P_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=0,1,\dots,n}$ многочленов, ортогональных относительно полиномиального распределения (2).

Доказательство. Из определения ФСМ имеем (ниже $\pi_{n,p}$ — случайная векторнозначная величина, имеющая полиномиальное распределение (2)):

$$\frac{M P_{\alpha}(\pi_{n,p}) P_{\beta}(\pi_{n,p})}{h_{\alpha} h_{\beta}} = \sum_{\nu, \mu} \frac{[\alpha]^N [\beta]^M}{\nu! \mu!} a^{\nu+\mu} (-c)^{\alpha+\beta-N-M} \frac{M[\pi_{n,p}]^{\nu} [\pi_{n,p}]^{\mu}}{[n]^N [n]^M}.$$

Пользуясь преобразованиями (6), (8) и тем фактом, что $M[\pi_1]^{\nu_1} \dots [\pi_r]^{\nu_r} = p_1^{\nu_1} \dots p_r^{\nu_r} [n]^{\nu_1 + \dots + \nu_r}$, перепишем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu, \mu, \theta} \frac{[\alpha]^N [\beta]^M}{\theta! (\nu - \theta)! (\mu - \theta)!} a^{\nu+\mu} (-c)^{\alpha+\beta-N-M} \frac{M[\pi_{n,p}]^{\nu+\mu-\theta}}{[n]^N [n]^M} \\ &= \sum_{\nu, \mu, \theta} \frac{[\alpha]^N [\beta]^M}{\theta! (\nu - \theta)! (\mu - \theta)!} a^{\nu+\mu} p^{\nu+\mu-\theta} (-c)^{\alpha+\beta-N-M} \frac{[n]^{N+M-\theta}}{[n]^N [n]^M} \\ &= \sum_{\nu, \mu, \theta, \gamma} \frac{[\alpha]^N [\beta]^M [N - \Theta]^{\gamma} [M - \Theta]^{\gamma} (-1)^{\gamma}}{\theta! (\nu - \theta)! (\mu - \theta)! \gamma! [n]^{\Theta+\gamma}} a^{\nu+\mu} p^{\nu+\mu-\theta} (-c)^{\alpha+\beta-N-M}. \end{aligned}$$

Последнее выражение перепишем в виде

$$\sum_{\theta, \gamma} \frac{(-1)^{\gamma} p^{-\theta}}{\theta! \gamma! [n]^{\Theta+\gamma}} A(\alpha, \theta, \gamma) A(\beta, \theta, \gamma),$$

где

$$\begin{aligned} A(\alpha, \theta, \gamma) &= \sum_{\nu} \frac{[\alpha]^N [N - \Theta]^{\gamma}}{(\nu - \theta)!} a^{\nu} p^{\nu} (-c)^{\alpha-N} \\ &= \sum_{\nu, \delta: \Delta=\gamma} \frac{[\alpha]^N [\nu - \theta]^{\delta} \gamma!}{\delta! (\nu - \theta)!} a^{\nu} p^{\nu} (-c)^{\alpha-N} = \sum_{\nu, \delta: \Delta=\gamma} \frac{[\alpha]^N \gamma!}{\delta! (\nu - \theta - \delta)!} a^{\nu} p^{\nu} (-c)^{\alpha-N} \\ &= \sum_{\delta: \Delta=\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} [\alpha]^{\Theta+\Delta} a^{\theta+\delta} p^{\theta+\delta} \sum_{\nu} \frac{[\alpha - \Theta - \Delta]^{N-\Theta-\Delta}}{(\nu - \theta - \delta)!} a^{\nu-\theta-\delta} p^{\nu-\theta-\delta} (-c)^{\alpha-N} \\ &= \sum_{\delta: \Delta=\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} [\alpha]^{\Theta+\Delta} a^{\theta+\delta} p^{\theta+\delta} 0^{\alpha-\Theta-\Delta} \\ &= [\alpha]^{\Theta+\gamma} 0^{\alpha-\gamma-\Theta} a^{\theta} p^{\theta} \sum_{\delta_1 + \dots + \delta_r = \gamma} \frac{\gamma!}{\delta_1! \dots \delta_r!} (a_1 p_1)^{\delta_1} \dots (a_r p_r)^{\delta_r} \\ &= [\alpha]^{\Theta+\gamma} 0^{\alpha-\gamma-\Theta} a^{\theta} p^{\theta} c^{\gamma}. \end{aligned}$$

Из полученного видно, что $A(\alpha, \theta, \gamma) = 0$ при $\Theta = \theta_1 + \dots + \theta_r \neq \alpha - \gamma$, $A(\beta, \theta, \gamma) = 0$ при $\Theta \neq \beta - \gamma$, $A(\alpha, \theta, \gamma) A(\beta, \theta, \gamma) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{M P_{\alpha}(\pi_{n,p}) P_{\beta}(\pi_{n,p})}{h_{\alpha} h_{\beta}} &= \sum_{\theta, \gamma} \frac{(-1)^{\gamma} p^{-\theta}}{\theta! \gamma! [n]^{\Theta+\gamma}} (a^{\theta} p^{\theta} c^{\gamma})^2 [\alpha]^{\Theta+\gamma} [\beta]^{\Theta+\gamma} 0^{\alpha-\gamma-\Theta} 0^{\beta-\gamma-\Theta} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma, \theta} \frac{(-1)^{\gamma}}{\theta! \gamma! [n]^{\alpha}} a^{2\theta} p^{\theta} c^{2\gamma} (\alpha!)^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{[n]^{\alpha}} \sum_{\gamma} \frac{\alpha!}{\gamma! (\alpha - \gamma)!} (-c^2)^{\gamma} \sum_{\theta: \Theta=\alpha-\gamma} \frac{(\alpha - \gamma)!}{\theta!} (a^2 p)^{\theta} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{[n]^{\alpha}} \sum_{\gamma} \frac{[\alpha]^{\gamma}}{\gamma!} (-c^2)^{\gamma} (a_1^2 p_1 + \dots + a_r^2 p_r)^{\alpha-\gamma} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{[n]^{\alpha}} (a_1^2 p_1 + \dots + a_r^2 p_r - c^2)^{\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{h_{\alpha}^2}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
2. Прохоров Ю. В., Висков О. В., Хохлов В. И. Биномиальные аналоги неравенства Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 592–594.
3. Cege Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
4. Chernoff H. A note on an inequality involving the normal distribution. — Ann. Probab., 1981, v. 9, p. 533–535.
5. Kaucký J. Kombinatorické identity. Bratislava: J. Kaucký/Veda, 1975, 476 s.
6. Khokhlov V. I. Factorial-power polynomials that are orthogonal with respect to the multinomial distribution. — В сб: Пятая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Т. 1. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1989, с. 254–255.
7. Koornwinder T. H. Krawtchouk polynomials, a unification of two different group theoretic interpretations. — SIAM J. Math. Anal., 1982, v. 13, № 6, p. 1011–1023.
8. Krawtchouk M. Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. — C. r. hebdomadaire des séances l'Acad. Sci., 1929, t. 189, № 17, p. 620–622.
9. Lerch M. Z počtu integrálního. — Rozprawy Čes. Akad. cis. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze. Třída II. Řada mat.-fys., 1893, sv. 2, s. 9, s. 1–40.
10. Rota G.-C., Kahaner D., Odlyzko A. On the foundations of combinatorial theory. VIII. Finite operator calculus. — J. Math. Anal. Appl., 1973, v. 42, № 3, p. 684–760.

Поступила в редакцию

18.I.1985

Переработанный вариант

1.VIII.2001

© 2001 г. ПРОХОРОВ Ю. В.*, ВИСКОВ О. В.*, ХОХЛОВ В. И.*

БИНОМИАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА ЧЕРНОВА

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, моментные неравенства, многочлены Кравчука, факториально-степенной формализм, комбинаторные тождества.

В [1] была установлена справедливость следующего неравенства, являющегося пуассоновским аналогом неравенства [3] Чернова. Если π_λ — случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром λ , то для произвольной функции $g(\cdot)$ выполняется неравенство $\lambda \mathbf{M}(g(\pi_\lambda + 1) - g(\pi_\lambda))^2 \geq \mathbf{D}g(\pi_\lambda)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $g(\cdot)$ — линейная функция своего аргумента.

Покажем, что имеют место следующие биномиальные аналоги этих неравенств.

Теорема 1. Пусть $\beta_{n,p}$ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p . Для произвольного многочлена $g(\cdot)$ степени не выше n выполняются неравенства

$$npq \mathbf{M} \left(g(\beta_{n,p} + 1) - g(\beta_{n,p}) \right)^2 \geq \mathbf{D}g(\beta_{n,p}), \quad (1)$$

$$npq \mathbf{M} \left(V(g(\beta_{n,p})) \right)^2 \geq \mathbf{D}g(\beta_{n,p}), \quad (2)$$

где $V(g(x)) = q^{-1} \sum_{\theta=0}^{\infty} (-p/q)^\theta (g(x + \theta + 1) - g(x + \theta))$, $p < q$, $p + q = 1$, причем равенства в (1) и (2) достигаются тогда и только тогда, когда $g(\cdot)$ — линейная функция своего аргумента.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru