Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Прохоров, О. В. Висков, В. И. Хохлов, Биноми-
альные аналоги неравенства Чернова, *Теория вероятн.
и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 3, 592–594

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:46:56

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
2. Прохоров Ю. В., Висков О. В., Хохлов В. И. Биномиальные аналоги неравенства Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 592–594.
3. Cege Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
4. Chernoff H. A note on an inequality involving the normal distribution. — Ann. Probab., 1981, v. 9, p. 533–535.
5. Kaucký J. Kombinatorické identity. Bratislava: J. Kaucký/Veda, 1975, 476 s.
6. Khokhlov V. I. Factorial-power polynomials that are orthogonal with respect to the multinomial distribution. — В сб: Пятая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Т. 1. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1989, с. 254–255.
7. Koornwinder T. H. Krawtchouk polynomials, a unification of two different group theoretic interpretations. — SIAM J. Math. Anal., 1982, v. 13, № 6, p. 1011–1023.
8. Krawtchouk M. Sur une généralisation des polynômes d'Hermite. — C. r. hebdomadaire des séances l'Acad. Sci., 1929, t. 189, № 17, p. 620–622.
9. Lerch M. Z počtu integrálního. — Rozprawy Čes. Akad. cis. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze. Třída II. Řada mat.-fys., 1893, sv. 2, s. 9, s. 1–40.
10. Rota G.-C., Kahaner D., Odlyzko A. On the foundations of combinatorial theory. VIII. Finite operator calculus. — J. Math. Anal. Appl., 1973, v. 42, № 3, p. 684–760.

Поступила в редакцию

18.I.1985

Переработанный вариант

1.VIII.2001

© 2001 г. ПРОХОРОВ Ю. В.*, ВИСКОВ О. В.*, ХОХЛОВ В. И.*

БИНОМИАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА ЧЕРНОВА

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, моментные неравенства, многочлены Кравчука, факториально-степенной формализм, комбинаторные тождества.

В [1] была установлена справедливость следующего неравенства, являющегося пуассоновским аналогом неравенства [3] Чернова. Если π_λ — случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром λ , то для произвольной функции $g(\cdot)$ выполняется неравенство $\lambda \mathbf{M}(g(\pi_\lambda + 1) - g(\pi_\lambda))^2 \geq \mathbf{D}g(\pi_\lambda)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $g(\cdot)$ — линейная функция своего аргумента.

Покажем, что имеют место следующие биномиальные аналоги этих неравенств.

Теорема 1. Пусть $\beta_{n,p}$ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p . Для произвольного многочлена $g(\cdot)$ степени не выше n выполняются неравенства

$$npq \mathbf{M} \left(g(\beta_{n,p} + 1) - g(\beta_{n,p}) \right)^2 \geq \mathbf{D}g(\beta_{n,p}), \quad (1)$$

$$npq \mathbf{M} \left(V(g(\beta_{n,p})) \right)^2 \geq \mathbf{D}g(\beta_{n,p}), \quad (2)$$

где $V(g(x)) = q^{-1} \sum_{\theta=0}^{\infty} (-p/q)^\theta (g(x + \theta + 1) - g(x + \theta))$, $p < q$, $p + q = 1$, причем равенства в (1) и (2) достигаются тогда и только тогда, когда $g(\cdot)$ — линейная функция своего аргумента.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

Доказательство опирается на свойства многочленов Кравчука $K_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, образующих относительно биномиального распределения с параметрами n и p ортонормированную, т.е. обладающую свойством $\mathbf{M}K_\alpha(\beta_{n,p}) K_\beta(\beta_{n,p}) = \delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера) систему, и на свойство факториально-степенных многочленов (определения и обозначения см. в [2, п. 1])

$$H_\alpha(x) = (q[x] - p[-x])^\alpha \equiv (p[\alpha - 1] + [x])^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

состоящее в том, что $\mathbf{M}(H_\alpha(\nu_p + 1) - H_\alpha(\nu_p)) = \delta_{1\alpha}$, где ν_p — случайная величина, имеющая «обобщенное распределение» $\mathbf{P}\{\nu_p = \theta\} = q^{-1}(-p/q)^\theta$, $\theta = 0, 1, \dots$, $p < q$, $p + q = 1$.

Сначала докажем тождество в (3):

$$\begin{aligned} (q[x] - p[-x])^\alpha &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} q^\nu [x]^\nu p^{\alpha-\nu} (-1)^{\alpha-\nu} [-x]^{\alpha-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} q^\nu [x]^\nu p^{\alpha-\nu} [x - \nu + \alpha - 1]^{\alpha-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} q^\nu [x]^\nu p^{\alpha-\nu} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-\nu} \frac{[\alpha-\nu]^\gamma}{\gamma!} [x-\nu]^{\alpha-\nu-\gamma} [\alpha-1]^\gamma \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!} [\alpha-1]^\gamma [x]^{\alpha-\gamma} p^\gamma \sum_{\nu=0}^{\alpha-\gamma} \frac{[\alpha-\gamma]^\nu}{\nu!} q^\nu p^{\alpha-\gamma-\nu} = (p[\alpha-1] + [x])^\alpha. \end{aligned}$$

Далее, поскольку, как несложно убедиться, $H_\alpha(\nu_p + 1) - H_\alpha(\nu_p) = \alpha(p[\alpha-1] + [x])^{\alpha-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(H_\alpha(\nu_p) - H_\alpha(\nu_p)) &= \alpha! \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} \frac{[\alpha-1]^\mu}{(\mu!)^2} p^{\alpha-1-\mu} \mathbf{M}[\nu_p]^\mu \\ &= \alpha! \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} \frac{[\alpha-1]^\mu}{(\mu!)^2} p^{\alpha-1-\mu} \frac{1}{q} \sum_{\theta=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{q}\right)^\theta [\theta]^\mu = \alpha! (p-p)^{\alpha-1} = \delta_{1\alpha}, \end{aligned}$$

так как при $|x| < 1$

$$\sum_{\theta=0}^{\infty} [\theta]^n x^\theta = x^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^n}{1-x} = n! \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}.$$

Перейдем к доказательству неравенства (1). Употребив для многочленов Кравчука запись в виде факториально-степенных многочленов (ср. [2, п. 2, замечание 3]) $K_\alpha(x) = \tilde{k}_\alpha (q[x] - p[n-x])^\alpha$ (коэффициент $(-1)^\alpha$, фигурирующий в [2], в данном контексте несуществен, поскольку не влияет на свойство ортогональности) и воспользовавшись утверждением леммы 2 из [2], имеем:

$$\begin{aligned} K_\alpha(x+1) - K_\alpha(x) &= \tilde{k}_\alpha \left((q[x+1] - p[n-x-1])^\alpha - (q[x] - p[n-x])^\alpha \right) \\ &= \tilde{k}_\alpha \left((q[x] - p[n-x] + q[1] - p[-1])^\alpha - (q[x] - p[n-x])^\alpha \right) \\ &= \tilde{k}_\alpha \left(\sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!} \frac{K_\gamma(x)}{\tilde{k}_\gamma} (q[1] - p[-1])^{\alpha-\gamma} - \frac{K_\alpha(x)}{\tilde{k}_\alpha} \right) \\ &= \tilde{k}_\alpha \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!} \frac{K_\gamma(x)}{\tilde{k}_\gamma} H_{\alpha-\gamma}(1) = \frac{1}{p} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{\alpha! p^\alpha \tilde{k}_\alpha}{\gamma! p^\gamma \tilde{k}_\gamma} K_\gamma(x), \end{aligned} \quad (4)$$

так как $H_\alpha(1) = p^{\alpha-1} \alpha!$ при $\alpha \geq 1$ и $H_0(1) = 1$; $K_0(x) = 1$.

Разложив многочлен $g(\cdot)$ по многочленам Кравчука, $g(x) = \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha K_\alpha(x)$, где $a_\alpha = \mathbf{M}g(\beta_{n,p}) K_\alpha(\beta_{n,p})$, без труда убеждаемся, что из свойства ортогональности

многочленов Кравчука вытекает соотношение $Dg(\beta_{n,p}) = \sum_{\alpha \geq 1} a_\alpha^2$, в то время как из (4) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left(g(\beta_{n,p} + 1) - g(\beta_{n,p}) \right)^2 \\ &= \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha a_\beta \mathbf{M} \left(K_\alpha(\beta_{n,p} + 1) - K_\alpha(\beta_{n,p}) \right) \left(K_\beta(\beta_{n,p} + 1) - K_\beta(\beta_{n,p}) \right) \\ &\geq \frac{1}{p^2} \sum_{\alpha \geq 1} a_\alpha^2 \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha! p^\alpha \tilde{k}_\alpha}{\gamma! p^\gamma \tilde{k}_\gamma} \right)^2 = \frac{1}{p^2} \sum_{\alpha \geq 1} a_\alpha^2 \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha! p^\alpha \sqrt{[n]^\gamma \gamma! p^\gamma q^\gamma}}{\gamma! p^\gamma \sqrt{[n]^\alpha \alpha! p^\alpha q^\alpha}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{\alpha \geq 1} a_\alpha^2 \frac{\alpha!}{[n]^\alpha} \frac{p^\alpha}{q^\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{[n]^\gamma}{\gamma!} \left(\frac{q}{p} \right)^\gamma \geq \frac{1}{pq} \sum_{\alpha \geq 1} a_\alpha^2 \frac{\alpha!}{[n]^\alpha} \frac{[n]^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \\ &\geq \frac{1}{pq} \sum_{\alpha \geq 1} \alpha a_\alpha^2 \frac{[n-1]^{\alpha-1}}{[n]^\alpha} = \frac{1}{npq} \sum_{\alpha \geq 1} \alpha a_\alpha^2, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство неравенства (1).

Для доказательства неравенства (2), возвращаясь к тому же разложению $g(\cdot)$ по многочленам Кравчука, что и выше, снова запишем их в виде факториально-степенных многочленов и воспользуемся отмеченным выше свойством многочленов $H_\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} V(g(x)) &= \frac{1}{q} \sum_{\theta=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{q} \right)^\theta \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha \tilde{k}_\alpha \left(\left(q[x + \theta + 1] - p[n - x - \theta - 1] \right)^\alpha - \left(q[x + \theta] - p[n - x - \theta] \right)^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{\theta=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{q} \right)^\theta \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha \tilde{k}_\alpha \left(\left(q[x] + p[n - x] + q[\theta + 1] - p[-(\theta + 1)] \right)^\alpha - \left(q[x] + p[n - x] - q[\theta] - p[-\theta] \right)^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{\theta=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{q} \right)^\theta \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha \tilde{k}_\alpha \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!} \frac{K_{\alpha-\gamma}}{\tilde{k}_{\alpha-\gamma}} \left(H_\gamma(\theta + 1) - H_\gamma(\theta) \right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha \tilde{k}_\alpha \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!} \frac{K_{\alpha-\gamma}(x)}{\tilde{k}_{\alpha-\gamma}} \mathbf{M} \left(H_\gamma(\nu_p + 1) - H_\gamma(\nu_p) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \alpha a_\alpha \frac{\tilde{k}_\alpha}{\tilde{k}_{\alpha-1}} K_{\alpha-1}(x) = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{(n - \alpha + 1)pq}} K_{\alpha-1}(x), \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\mathbf{M} \left(V(g(\beta_{n,p})) \right)^2 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\alpha}{(n - \alpha + 1)pq} a_\alpha^2 \geq \frac{1}{npq} \sum_{\alpha=1}^n \alpha a_\alpha^2,$$

что и завершает доказательство неравенства (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хозлов В. И. Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
2. Хозлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.
3. Chernoff H. A note on an inequality involving the normal distribution. — Ann. Probab., 1981, v. 9, p. 533–535.

Поступила в редакцию
1.VIII.2001