Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, К. А. Боровков, О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно изменяющимися хвостами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 209–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:31:00

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 46

Выпуск 2, 2001 год

апрель, май, июнь

© 2001 г.

БОРОВКОВ А. А.*, БОРОВКОВ К. А.**

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ. I. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПРАВИЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ХВОСТАМИ¹⁾

В работе установлены аппроксимации первого порядка и асимптотические разложения для вероятностей пересечения криволинейных границ в области больших уклонений случайными блужданиями с правильно меняющимися хвостами распределений. В частности, изучены вероятности больших уклонений для сумм и для максимумов частных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин, включая асимптотическое поведение плотностей в случае, когда они существуют. Обобщения на «правильный экспоненциальный» случай (когда хвост распределения отличается от экспоненциальной функции лишь правильно изменяющимся множителем) рассмотрены во второй части работы.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, большие уклонения, правильное изменение, асимптотическое разложение.

1. Введение и основные результаты

Пусть $X_1, X_2, \dots$ суть независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_1 &= 0, & \mathbf{E}X_1^2 &= 1, & \mathbf{E}|X_1|^b &< \infty, & b \geq 2, \\ V(t) &= \mathbf{P}\{X_1 > t\} = t^{-\beta}L(t), & \beta &> 2, \end{aligned} \quad (1)$$

Borovkov A. A., Borovkov K. A. On large deviations probabilities for random walks. I. Regularly varying distribution tails.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

**Department of Mathematics & Statistics, Melbourne University, Parkville 3052, Australia.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 96-01-01939 и Мельбурнского университета, Research Award M9821.

где функция $L(t)$ медленно меняется при $t \rightarrow \infty$; отметим, что всегда $\beta \geq b$. Во второй части работы мы рассмотрим «правильный экспоненциальный» случай, когда $V(t) = e^{-\mu t} t^{-\beta-1} L(t)$, $\mu > 0$, $\beta > 2$.

Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Известно, что когда (1) справедливо, при $n \rightarrow \infty$

$$V_n(x) \equiv \mathbf{P}\{S_n > x\} = \left[1 - \Phi(xn^{-1/2}) + nV(x)\right] (1 + o(1))$$

равномерно по $x > n^{1/2}$; здесь Φ обозначает стандартную нормальную функцию распределения (см. [18], а также [13], где можно найти ссылки на более ранние результаты), причем последний член в квадратных скобках доминирует в области больших отклонений:

$$V_n(x) \sim nV(x) \quad \text{для } x \geq c(n \ln n)^{1/2}, \quad c > (\beta - 2)^{1/2} \quad (2)$$

(см. (1.25b) в [13]).

Таким образом, в этой области распределение суммы близко к такому максимуму X -в: $\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim \mathbf{P}\{\max_{k \leq n} X_k > x\}$, главный вклад в сумму (при условии, что она велика) принадлежит максимальному слагаемому (мы пишем $y \sim z$ в случае, когда $\lim(y/z) = 1$).

Действительно, по неравенству Бонферрони,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} X_k > x\right\} = nV(x) \left(1 + \frac{1}{2}(n-1)V(x) + \frac{\theta}{6}(nV(x))^2\right), \quad 0 < \theta < 1,$$

так что $nV(x)$ есть довольно хорошее приближение для хвоста максимального слагаемого. Тот факт, что то же самое приближение справедливо и для хвоста суммы S_n (а также для хвоста максимума частных сумм, см. (12) ниже), указывает на то, что оно должно быть весьма грубым в последнем случае (и это именно так, что и будет проиллюстрировано на численном примере в конце настоящего раздела). Так что для $V_n(x)$ необходимо более точное приближение. Кроме того, было бы весьма интересно распространить соответствующие результаты и на функциональную постановку задачи. В настоящей работе мы обращаемся к обоим этим задачам.

Мы выводим аналог (2) для вероятностей пересечения произвольных криволинейных границ случайным блужданием $\{S_k\}$ до момента времени n , а также асимптотические разложения (по степеням $(n^{1/2}/x)$), уточняющие как (2), так и аналогичные представления для вышеупомянутых вероятностей — в частности, для хвоста распределения $\bar{V}_n(x) = \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x\}$ максимума $\bar{S}_n = \max_{k \leq n} S_k$. Аппроксимации первого порядка в частном случае границы вида $g(k) = xf(k/n)$ для некоторой фиксированной функции f были получены в [17] (в качестве следствия из более общих результатов для множеств вида $x\mathcal{A}$ в пространстве траекторий). Некоторые аппроксимации высших порядков были установлены в [21] при добавочных ограничительных условиях (см. также замечание 4 ниже).

Для $x > 0$ и целого $n \geq 1$ обозначим через $\mathcal{G}_{x,n}$ класс всех границ $g(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, таких, что $\min_{1 \leq k \leq n} g(k) \geq x$ (мы не исключаем случай $g(k) = \infty$), и положим $g_*(j) = \min_{j \leq k \leq n} g(k)$. Для заданной границы g , $G_n = G_n(g) = \{\max_{k \leq n} (S_k - g(k)) > 0\}$ есть событие, состоящее в том, что блуждание пересекает границу g до момента времени n . Заметим, что

$$\mathbf{P}(G_n) = V_n(x) \equiv \mathbf{P}\{S_n > x\} \quad \text{для } g(k) = \infty, \quad k < n, \quad g(n) = x, \quad (3)$$

и

$$\mathbf{P}(G_n) = \bar{V}_n(x) \equiv \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x\} \quad \text{для } g(k) = x, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

Теорема 1. Если условия (1) выполнены, то для некоторого $c > 0$, равномерно по $g \in \mathcal{G}_{x,n}$ с $n \leq cx^2 / \ln x$,

$$\mathbf{P}(G_n) = (1 + o(1)) \sum_{j=1}^n V(g_*(j)) + o(n^2 x^{-b} V(x)) \quad (5)$$

при $x \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что этот результат (как и все остальные ниже сформулированные утверждения за исключением теоремы 7) справедлив, в частности, для любого фиксированного $n \geq 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Когда $\max_{k \leq n} g_*(k) = O(x)$, соотношение (5) есть просто $\mathbf{P}(G_n) \sim \sum_{j=1}^n V(g_*(j))$. В частном случае, когда для некоторой кусочно-непрерывной функции $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$,

$$g(k) = xf\left(\frac{k}{n}\right), \quad \inf_{0 \leq t \leq 1} f(t) = 1, \quad (6)$$

мы имеем, при $f_*(t) = \inf_{t \leq s \leq 1} f(s)$, что для «почти всех» j

$$V(g_*(j)) \sim \left(xf_*\left(\frac{j}{n}\right)\right)^{-\beta} L\left(xf_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) \sim x^{-\beta} L(x) f_*^{-\beta}(t) = V(x) f_*^{-\beta}(t)$$

для любого $t \in [j/n, (j+1)/n]$, так что (5) становится просто

$$\mathbf{P}(G_n) \sim nV(x) \int_0^1 f_*^{-\beta}(t) dt \quad (7)$$

при $x \rightarrow \infty$ (последнее соотношение следует также из теоремы 2 из [17]). В нашей теореме 7 мы дадим уточнение этого результата.

Асимптотические разложения потребуют дополнительных предположений о гладкости хвостов $V(x)$ на бесконечности. Введем следующие условия.

У с л о в и е $[D_\gamma]$, $\gamma \in (0, 1)$ (условие Липшицева типа): существует функция $L_\gamma(t)$ такая, что для функции L из (1) справедливо

$$L(t(1+y)) = L(t) [1 + O(|y|^\gamma L_\gamma(t))] \quad (8)$$

при $y \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$.

У с л о в и е $[D_k]$, $k \geq 1$ (условие типа дифференцируемости): существуют функции $L_1(t), \dots, L_k(t)$ такие, что

$$L(t(1+y)) = L(t) \left[\sum_{j=0}^{k-1} y^j L_j(t) + y^k L_k(t) (1 + \delta_k(y, t)) \right], \quad \delta_k(y, t) = o(1) \quad (9)$$

при $y \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Мы положим здесь $L_0(t) \equiv 1$. (Когда случайные величины X_i решетчатые, мы требуем, чтобы условие $[D_k]$ выполнялось лишь для t и ty из соответствующих решеток.)

З а м е ч а н и е 2. Поскольку $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, то очевидно, что если условие $[D_\gamma]$, $\gamma \in (0, 1)$, выполнено, то $L_\gamma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогично, если условие $[D_k]$, $k \geq 1$, выполнено, то все $L_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, k$. Действительно, полагая $y_m = ty$, $m = 1, \dots, k$, и обозначая через $Y = Y(y, t)$ матрицу размера $k \times k$, чей m -й столбец образован величинами $y_m, y_m^2, \dots, y_m^{k-1}, y_m^k (1 + \delta_k(y_m, t))$, $m = 1, \dots, k$, мы видим из условия $[D_k]$, что вектор

$$\left(\frac{L(t(1+y_j))}{L(t)} - 1 \right)_{j=1}^k = (L_j(t))_{j=1}^k Y.$$

Здесь левая часть сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, для всех достаточно малых y и больших t , матрица Y имеет обратную Y^{-1} , которая ограничена по норме для любого фиксированного малого y при $t \rightarrow \infty$ (отметим, что Y на самом деле — «почти Вандермондова» матрица). Желаемое утверждение следует из этого наблюдения.

З а м е ч а н и е 3. Заметим также, что когда (9) выполнено,

$$V(t(1+y)) = V(t) \left[\sum_{j=0}^k y^j U_j(t) + y^k (U_k(t) \delta_k(y, t) + O(|y|)) \right], \quad (10)$$

где $U_j(t) = \sum_{m=0}^j \binom{-\beta}{m} L_{j-m}(t)$, $j = 0, \dots, k$, тогда как если $[D_\gamma]$ выполнено, то

$$V(t(1+y)) = V(t) \left[1 + O(|y|^\gamma L_\gamma(t) + |y|) \right]. \quad (11)$$

Вначале мы рассмотрим специальный случай (3) и установим, сколько точным является соотношение (2), когда L удовлетворяет условию липшицева типа.

Теорема 2. Если условия (1) и $[D_\gamma]$ выполнены, то, для некоторого $c > 0$, равномерно по $n \leq cx^2 / \ln x$,

$$V_n(x) = nV(x) \left[1 + O(n^{\gamma/2} x^{-\gamma} L_\gamma(x)) \right]$$

при $x \rightarrow \infty$.

Когда функция $V(x)$ «асимптотически гладкая», можно получить более точные соотношения.

Теорема 3. Если условия (1) и $[D_k]$ справедливы для некоторых $k \leq b$, то, для некоторого $c > 0$, равномерно по $n \leq cx^2 / \ln x$,

$$V_n(x) = nV(x) \left[1 + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j}{x^j} U_j(x) \mathbf{E} S_{n-1}^j + o(n^{k/2} x^{-k}) \right]$$

при $x \rightarrow \infty$.

Вычисление нескольких моментов низших порядков приводит к следующим результатам.

Следствие 1. В предположениях теоремы 3,

(i) если $k = 2$, то при $x \rightarrow \infty$

$$V_n(x) = nV(x) \left[1 + \frac{\beta(\beta+1)(n-1)}{2x^2} (1 + o(1)) \right];$$

(ii) если $b \geq k = 4$, то при $x \rightarrow \infty$

$$V_n(x) = nV(x) \left[1 + \frac{n-1}{x^2} U_2(x) - \frac{n-1}{x^3} U_3(x) \mathbf{E} X_1^3 + \frac{n^2}{x^4} \binom{-\beta}{4} (1 + o(1)) \right].$$

Оба соотношения выполняются равномерно по $n \leq cx^2 / \ln x$.

З а м е ч а н и е 4. В специальном частном случае, когда главный член в $V(x)$ есть линейная комбинация отрицательных степеней x , в [21] был выведен ряд уточнений соотношения (2) при некоторых дополнительных ограничительных предположениях и условиях, иногда не имеющих прямого отношения к делу. Отметим, что из нашей леммы 2 и последующих доказательств легко видеть, что они могут быть стандартным образом перенесены на случай, когда $V(x)$ есть линейная комбинация членов вида $x^{-\beta(i)} L_{(i)}$, удовлетворяющих соответствующим условиям гладкости.

Рассмотрим теперь распределение максимума $\bar{S}_n$ (случай постоянной границы (4)). Как можно было видеть из (5), первый член в приближении для $\bar{V}_n(x)$ будет такой же, что и для $V_n(x)$: для $x > c(n \ln n)^{1/2}$,

$$\bar{V}_n(x) = nV(x) (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Это соотношение следует также из следствия 1 в [17]. Пусть

$$\tau_x = \min\{k: S_k > x\}. \quad (13)$$

Тогда мы имеем также $\mathbf{P}\{\tau_x \leq n\} = nV(x)(1 + o(1))$.

Последующие члены в разложениях для $\bar{V}_n(x)$ и $V_n(x)$ будут различными, как мы увидим в теореме 5 ниже. Прежде чем сформулировать результат, сделаем еще одно наблюдение. Ввиду (2) (главная часть хвоста распределения суммы дается хвостом максимального слагаемого) и (12), естественно ожидать, что с точки зрения больших отклонений,

нормированная траектория блуждания $S_{[nt]}$, $0 \leq t \leq 1$ ($[x]$ обозначает целую часть x) близка к ступенчатой функции с одним единственным скачком в случайный момент, равномерно распределенный на $(0, 1)$. Более точно, имеет место следующий результат.

Обозначим через $\mathbf{1}(A)$ индикатор события A , а через $\mathcal{L}(\xi)$ и $\mathcal{L}(\xi | B)$, соответственно, безусловное и условное при условии B распределения случайного процесса ξ в пространстве Скорохода $D(0, 1)$.

Теорема 4. Если условия (1) выполнены и $x \gg (n \ln n)^{1/2}$, то имеет место слабая сходимость

$$\mathcal{L}(x^{-1}S_{[nt]} | \bar{S}_n > x) \Rightarrow \mathcal{L}(J_\beta \mathbf{1}(U \leq t)),$$

$$\mathcal{L}(x^{-1}S_{[nt]} | S_n > x) \Rightarrow \mathcal{L}(J_\beta \mathbf{1}(U \leq t))$$

при $n \rightarrow \infty$, где случайные величины J_β и U независимы, $\mathbf{P}\{J_\beta > y\} = y^{-\beta}$, $y \geq 1$, а U равномерно распределена на $(0, 1)$.

З а м е ч а н и е 5. Напомним, что в крамеровском случае предельный процесс (при стандартных предположениях, см., например, [6]) будет вырожденным: наиболее вероятные траектории случайного блуждания в этих условиях просто следуют «наикратчайшему» пути, ведущему из $(0, 0)$ в (n, x) , так что условным пределом для процесса $x^{-1}S_{[nt]}$ будет тождественная функция t , $t \in (0, 1)$. Во второй части настоящей работы мы увидим, что в «правильном экспоненциальном» случае пределом при достаточно больших x/n может быть линейная комбинация процесса из теоремы 4 и прямой линии для крамеровского случая.

Доказательство теоремы 4 может быть получено незначительной модификацией доказательства теоремы 3.1 из [9] (где был рассмотрен специальный случай $x = an$), либо выведено из рассуждений, содержащихся в следующем разделе работы.

Вернемся теперь к нашему обсуждению хвоста $\bar{V}_n$.

Теорема 5. Предположим, что условия (1) выполнены.

(i) Если условие $[D_\gamma]$ имеет место, то утверждение теоремы 1 справедливо и для $\bar{V}_n$.

(ii) Если условие $[D_k]$ выполнено для некоторого $k \leq b$, то для некоторого $c > 0$ равномерно по $n \leq cx^2/\ln x$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x) = nV(x) & \left\{ 1 - \frac{1}{nx} U_1(x) \sum_{l=0}^{n-1} \mathbf{E} \bar{S}_l + \frac{1}{n} \sum_{m=2}^k \frac{(-1)^m}{x^m} U_m(x) \right. \\ & \times \left. \sum_{j=1}^{n-1} \left[\mathbf{E} \bar{S}_{n-j}^m + \sum_{l=2}^m \binom{m}{l} \mathbf{E} S_{j-1}^l \mathbf{E} \bar{S}_{n-j}^{m-l} \right] + o(n^{k/2} x^{-k}) \right\} \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$.

Используя асимптотическую формулу $\mathbf{E} \bar{S}_n \sim (2n/\pi)^{1/2}$ (являющуюся следствием принципа инвариантности и равномерной интегрируемости величин $n^{-1/2} \bar{S}_n$ в силу (1) и неравенства Колмогорова)

и тот факт, что

$$U_1(x) = -\beta + L_1(x) \rightarrow -\beta \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (14)$$

(см. замечание 3), мы получаем следующий результат.

Следствие 2. В предположениях теоремы 5 (ii), если $k = 1$, то равномерно по $x \geq c(n \ln n)^{1/2}$

$$\bar{V}_n(x) = nV(x) \left(1 + \frac{2^{3/2}\beta n^{1/2}}{3\pi^{1/2}x} (1 + o(1)) \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 6. Из наших результатов легко вывести разложение для совместного распределения S_n и $\bar{S}_n$. Именно, для любого $r > 1$ очевидным образом выполняется соотношение:

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n > x, S_n \leq rx\} = \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x\} - \mathbf{P}\{S_n > rx\} = \bar{V}_n(x) - V_n(rx).$$

С другой стороны, для $r \in (0, 1)$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_n \leq x, S_n > rx\} &= \mathbf{P}\{S_n > rx\} - \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x\} + \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x, S_n \leq rx\} \\ &= \bar{V}_n(rx) - V_n(x) + o(n^2 V(x) x^{-b}), \end{aligned}$$

поскольку событие $\{\bar{S}_n > x, S_n \leq rx\}$ потребовало бы, грубо говоря, двух «больших» (по абсолютной величине) скачков в блуждании, см. лемму 1 и (27) ниже.

З а м е ч а н и е 7. Заметим, что для распределения времени первого перескока (13) справедливо соотношение: $\mathbf{P}\{\tau_x = n\} = \bar{V}_n(x) - \bar{V}_{n-1}(x)$, и поэтому, скажем, в предположениях следствия 2, $\mathbf{P}\{\tau_x = n\} = V(x) (1 + o(n^{3/2}/x))$. В предположениях теоремы 5 (ii) можно получить уточнения этого соотношения с ошибкой порядка $o(V(x)n^{1+k/2}x^{-k})$.

Наконец, мы сформулируем асимптотические разложения для двух специальных случаев границы g . Вначале предположим, что $g(j)$ есть линейная граница с фиксированным положительным коэффициентом наклона $a > 0$, и положим $\bar{S}(a) = \max_{j \geq 0} (S_j - aj)$, $s(a) = \mathbf{E}\bar{S}(a)$, $u \wedge v = \min(u, v)$, $u \vee v = \max(u, v)$.

Теорема 6. Если условия (1) и $[D_k]$ выполнены при некоторых $k \leq b \wedge (\beta - 1)$, то для $g(j) = x + aj$, $a > 0$, и некоторого $c > 0$ равномерно по n имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n) &= \sum_{j=1}^n V(x + aj) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m U_m(x + aj)}{(x + aj)^m} \right. \\ &\quad \times \left[\mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^m(a) + \sum_{l=2}^m \binom{m}{l} \mathbf{E}S_{j-1}^l \mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^{m-l}(a) \right] \left. \right\} \\ &\quad + o\left((x \wedge n)^2 x^{-b} V(x) + (x \wedge n)^{k/2} x^{-k+1} V(x)\right) \end{aligned} \quad (15)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Это утверждение остается справедливо и когда $\beta - 1 < k \leq b$, с той лишь разницей, что при $x < n$ появится добавочный остаточный член вида $O(x^2 V(x)(n/x)^{k+1} V(n))$.

Присутствие добавочного остаточного члена при больших k ($\in (\beta - 1, b]$) объясняется тем фактом, что моменты $\mathbf{E} \bar{S}_n^k(a) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (тогда как при меньших значениях k они ограничены конечным значением величины $\mathbf{E} \bar{S}^k(a)$, ср. (35)).

З а м е ч а н и е 8. Главный член в правой части (15) получен в частном случае $k = 1$, но при более широких условиях на V в работе [11].

При достаточно больших n ($n \gg x$), вероятность $\mathbf{P}(G_n)$ в случае линейной границы с положительным коэффициентом наклона ведет себя асимптотически как вероятность события

$$G_\infty = \left\{ \max_{k \geq 1} (S_k - ak - x) > 0 \right\} \equiv \{ \bar{S}(a) > x \}.$$

Для этого события мы можем вывести из последней теоремы следующий результат (оценивая тем самым хвост распределения случайной величины $\bar{S}(a)$).

Следствие 3. Если выполнены условия (1) при $\beta > 3$ и $[D_2]$, то, при $x \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P}(G_\infty) = \frac{1}{a} \int_x^\infty V(u) du + \left[\frac{s(a)}{a} - \frac{1}{2} + o(1) \right] V(x).$$

З а м е ч а н и е 9. Подобное разложение было выведено ранее в [19] в частном случае, когда $X - a = \xi_1 - \xi_2$, где ξ_i суть независимые случайные величины, ξ_2 следует показательному распределению, а ξ_1 имеет плотность специального вида с «толстым хвостом» (так что $\bar{S}(a)$ имеет стационарное распределение времени ожидания в соответствующей системе обслуживания типа $M/G/1$). Приближение первого порядка для $\mathbf{P}(G_\infty)$ было получено в более широких условиях в [5], [11] и [20].

Мы также можем уточнить соотношение (7) в случае границы (6). Пусть $w(t)$, $t \geq 0$, есть стандартный винеровский процесс. Положим

$$F_t = \{s \in [t, 1]: f(s) = f_*(t)\}, \quad w^{(t)} = \max_{s \in F_t} w(s), \quad E_t = \mathbf{E} w^{(t)}.$$

Теорема 7. Предположим, что условия (1) и $[D_1]$ выполнены, а граница g задана формулой (6) для некоторой непрерывной функции f . Тогда для некоторого $c > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^n V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) + (1 + o(1)) \frac{\beta n^{3/2} V(x)}{x} \int_0^1 f_*^{-\beta-1}(t) E_t dt$$

равномерно по $x \geq c(n \ln n)^{1/2}$. Первый член правой части этого представления можно заменить на $n \int_0^1 V(x f_*(t)) dt + O(V(x))$.

Наконец, мы приведем результат для плотностей. В дополнение к (1) потребуем теперь, чтобы существовало конечное $K > 0$ такое, что V имеет правильно меняющуюся плотность на (K, ∞) (и тем самым является вполне правильно меняющейся функцией): $v(t) = t^{-\beta-1}l(t)$, где $l(t)$ медленно меняется при $t \rightarrow \infty$, а также введем следующее условие.

У с л о в и е $[d_k]$, $k \geq 1$. Существуют функции $l_1(t), \dots, l_k(t)$, такие, что

$$l(t(1+y)) = l(t) \left[\sum_{j=0}^{k-1} y^j l_j(t) + y^k l_k(t) (1 + \delta_k(y, t)) \right], \quad \delta_k(y, t) = o(1) \quad (16)$$

при $y \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Мы положили здесь $l_0(t) \equiv 1$.

Аналогично замечанию 2, если вышеприведенное условие выполнено, то все $l_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, k$. Отметим также, что в этом случае

$$v(t(1+y)) = v(t) \left[\sum_{j=0}^k y^j u_j(t) + y^k (u_k(t) \delta_k(y, t) + O(|y|)) \right], \quad (17)$$

где

$$u_j(t) = \sum_{m=0}^j \binom{-(\beta+1)}{m} l_{j-m}(t), \quad j = 0, \dots, k.$$

Теорема 8. Если условия (1) и $[d_k]$ для некоторого $k \leq b$ выполнены и существует число $N > 0$, такое, что для характеристической функции $\varphi(t)$ скачка X_1 справедливо $\int |\varphi(t)|^N dt < \infty$, то S_n будет иметь плотность v_n при $n \geq N$ и, при $x \rightarrow \infty$,

$$v_n(x) = nv(x) \left[1 + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j}{x^j} u_j(x) \mathbf{E} S_{n-1}^j + o(n^{k/2} x^{-k}) \right] + o(n^{3/2} x^{-b} V(x))$$

равномерно по $n \in [N, cx^2/\ln x]$.

Так называемые «интегро-локальные» предельные теоремы, описывающие поведение вероятностей того, что наше случайное блуждание попадет в удаленный интервал фиксированной длины, иногда также представляют интерес. Отметим, что обычно такие результаты нельзя вывести из интегральных вариантов (для хвостов распределений). Это справедливо и в нашем случае.

Для фиксированных вещественного Δ и функции $f(t)$, положим $\Delta f(t) = f(t + \Delta) - f(t)$. Нас интересует поведение величины

$$\Delta V_n(x) = V_n(x + \Delta) - V_n(x) \equiv -\mathbf{P}\{x < S_n \leq x + \Delta\}.$$

Теорема 9. Если условия (1) и $[D_1]$ выполнены, то, для некоторого $c > 0$,

$$\Delta V_n(x) = -\frac{n\beta V(x)}{x} (\Delta + o(1)) + o(n^2 x^{-b} V(x)),$$

где член $o(1)$ равномерно мал при $n \leq cx^2 / \ln x$.

При дополнительных условиях (включающих $[D_2]$) можно получить и второй член в асимптотическом разложении для $\Delta V_n(x)$. Аналогичные результаты справедливы и для $\Delta \bar{V}_n(x)$.

В заключение этого раздела мы приведем численную иллюстрацию наших результатов. Рассмотрим простой случай симметрично распределенных X_j с хвостом

$$V(t) = \begin{cases} 0,5, & 0 < t < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{t^{-3}}{6\sqrt{3}}, & t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

так что $\beta = 3$, $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}X^2 = 1$. Условие $[D_k]$ очевидным образом выполняется при всех $k \geq 1$. Возьмем $n = 10$ и посмотрим, как наши результаты улучшают «грубые аппроксимации» (2) и (12) для $V_n(x)$ и $\bar{V}_n(x)$, соответственно, в разумном диапазоне значений x .

Рис. 1

На рис. 1 изображены графики «грубой аппроксимации» $nV(x)$, главной части аппроксимации из следствия 1 и полученной методом Монте-Карло оценки для хвоста $V_n(x)$ (было использовано 2×10^7 независимых реализаций X). Рис. 2 показывает ту же самую «грубую аппроксимацию» $nV(x)$, главную часть аппроксимации из следствия 2 и оценку Монте-Карло для $\bar{V}_n(x)$. Мы видим, что в обоих случаях имеет

место значительное улучшение в точности аппроксимации. Совпадение графиков на рис. 1 гораздо более точное по той очевидной причине, что аппроксимирующая формула, использованная в этом случае, есть на самом деле асимптотическое разложение с двумя «поправочными» членами (коэффициент при $n^{1/2}/x$ равен нулю, и первый нетривиальный поправочный член имеет порядок n/x^2), тогда как приближение для $\bar{V}_n(x)$ основано на разложении с одним таким членом.

Рис. 2

2. Доказательства

Нам потребуется следующий вспомогательный результат. Положим $Q = nV(x)$, $R = nx^{-b}$ и заметим, что $Q = o(R)$ при $x \rightarrow \infty$.

В последующем символ c (с индексом или без) будет использоваться для обозначения постоянных (возможно различных внутри одной и той же формулы).

Лемма 1. Если (1) выполнено, то для любого $h < \frac{1}{2}$ существует $c > 0$, такое, что для всех n и $x \geq c (n \ln n)^{1/2}$ равномерно по всем $g \in \mathcal{G}_{x,n}$ справедливо

$$\mathbf{P}\{G_n; X_j \leq hx, j = 1, \dots, n\} \leq \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x; X_j \leq hx, j = 1, \dots, n\} \leq cQ^2.$$

Доказательство. Первое неравенство очевидно, поскольку $\min_{k \leq n} g(k) \geq x$. Из (1) ясно, что для любого $r \in (2, \beta)$ момент $m_r = \mathbf{E}(X_1^+)^r < \infty$, $x^+ = \max(0, x)$. Далее, из соотношений (2) и (4) из Приложения 4 из [5] (см. также [22]) имеем, что для любого $h \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_n > x; X_j \leq hx, j = 1, \dots, n\} &\leq \left(\frac{2nm_r}{(hx)^r} \right)^{1/h} \exp \left\{ 1 + \frac{2n}{(hx)^2} \ln^2 \frac{(hx)^r}{2nm_r} \right\} \\ &= O \left((nx^{-r})^{1/h + [2n/(h^2x^2)]} \ln[(hx)^r/(2nm_r)] \right), \end{aligned} \quad (18)$$

что, как легко видеть, влечет желаемое соотношение при $h < \frac{1}{2}$ и r достаточно близком к β . Лемма 1 доказана.

Положим $S_m^{(j)} = S_{m+j} - S_j$, $\overline{S}_m^{(j)} = \max_{0 \leq l \leq m} S_{l+j} - S_j$, $\underline{S}_m^{(j)} = \min_{0 \leq l \leq m} S_{l+j} - S_j$,

$$M_{j,n} = \max_{0 \leq m \leq n-j} (S_m^{(j)} - g(m+j)) + g_*(j),$$

и

$$A_j = A_j(\varepsilon) = \{|S_{j-1}| < \varepsilon x, \overline{S}_{n-j}^{(j)} < \varepsilon x, |\underline{S}_{n-j}^{(j)}| < \varepsilon x\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Наши главные результаты будут выведены из следующего основного представления.

Лемма 2. В условиях (1) существует $c > 0$ и функция $\varepsilon = \varepsilon(x) \searrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, такие, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left\{ V(g_*(j) - S_{j-1} - M_{j,n}); A_j \right\} + o(QR) \quad (19)$$

равномерно по $g \in \mathcal{G}_{x,n}$ при $n \leq cx^2 / \ln x$.

В частных случаях (3) и (4) мы имеем

$$V_n(x) = n \mathbf{E} \left[V(x - S_{n-1}); |S_{n-1}| < \varepsilon x \right] + o(QR), \quad (20)$$

и

$$\overline{V}_n(x) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left[V(x - S_{j-1} - \overline{S}_{n-j}^{(j)}); |S_{j-1}| < \varepsilon x, \overline{S}_{n-j}^{(j)} < \varepsilon x \right] + o(QR) \quad (21)$$

соответственно.

Доказательство. Фиксируем $h < \frac{1}{2}$ и введем события

$$C_j = \{X_j > hx\}, \quad C = \bigcup_{j=1}^n C_j. \quad (22)$$

Тогда по лемме 1

$$\mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}(G_n C) + O(Q^2). \quad (23)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n C_j) &\geq \mathbf{P}(G_n C) \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n C_j) - \sum_{i < j} \mathbf{P}(G_n C_i C_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n C_j) - \frac{1}{2} n(n-1) \mathbf{P}\{X_1 > hx, X_2 > hx\} \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n C_j) + O(Q^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь из независимости событий C_j и A_j имеем

$$\mathbf{P}(C_j A_j^c) \leq 3 \mathbf{P}\{X_j > hx\} \mathbf{P}\left\{ \max_{m \leq n} |S_m| \geq \varepsilon x \right\}.$$

По неравенству типа Нагаева–Фука для максимума (см. [4] и следствие 3 в [14], а также [22]),

$$\mathbf{P}\left\{\max_{m \leq n} |S_m| \geq y\right\} \leq n\mathbf{P}\{|X_1| \geq c_{1,b}y\} + c_{2,b}(n\mathbf{E}|X_1|^b y^{-b})^2 + \exp\left\{-\frac{c_{3,b}y^2}{n}\right\}. \quad (25)$$

Из неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}\{|X| \geq y\} \leq \mathbf{E}(|X|^b; |X| \geq y) y^{-b} \quad (26)$$

мы видим теперь, что когда $\varepsilon \rightarrow 0$ достаточно медленно,

$$\mathbf{P}(C_j A_j^c) = o(nV(x)x^{-b}). \quad (27)$$

Далее, из (12) следует, что

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_{j-1} > x, X_j > hx\} = O(nV^2(x)). \quad (28)$$

Стало быть, полагая $M_j^0 = M_{j,n} - g_*(j)$, мы получаем из (27) и (28), что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n C_j) &= \mathbf{P}(G_n C_j \{\bar{S}_{j-1} \leq x\} A_j) + o(V(x)R) \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}(S_j + M_j^0 > 0); C_j \{\bar{S}_{j-1} \leq x\} A_j\right] + o(V(x)R) \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}(S_j + M_j^0 > 0); C_j A_j\right] + O(\mathbf{P}(\{\bar{S}_{j-1} > x\} C_j)) \\ &\quad + o(V(x)R) = \mathbf{E}\left[\mathbf{1}(S_j + M_j^0 > 0); A_j\right] + o(V(x)R), \end{aligned} \quad (29)$$

где последнее равенство вновь следует из (1) и того факта, что поскольку $h < \frac{1}{2}$, событие C_j является излишним в этом пересечении коль скоро $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Остается лишь заметить, что математическое ожидание в правой части (29) равно

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left[\mathbf{E}(\mathbf{1}(X_j > -S_{j-1} - M_j^0) \mid S_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n); A_j\right] \\ &= \mathbf{E}[V(g_*(j) - S_{j-1} - M_{j,n}); A_j], \end{aligned}$$

что влечет (вместе с (23), (24) и (29)) первое утверждение леммы 2. Соотношения (20) и (21) суть почти немедленные следствия этого утверждения.

Доказательство теоремы 1. Поскольку очевидным образом для любых последовательностей x_n и y_n справедливо неравенство $\min x_n \leq \max(x_n - y_n) + \min y_n \leq \max x_n$, мы имеем

$$\underline{S}_{n-j}^{(j)} \leq M_{j,n} \leq \bar{S}_{n-j}^{(j)}, \quad (30)$$

так что, учитывая (27),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{V(g_*(j) - S_{j-1} - M_{j,n}); A_j\} &\leq \mathbf{E}\{V(g_*(j) - 2\varepsilon x); A_j\} \\ &= V(g_*(j) - 2\varepsilon x)(1 - \mathbf{P}(A_j^c)) = V(g_*(j) - 2\varepsilon x) + o(V(x)R). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, нижняя оценка имеет вид $V(g_*(j) + 2\epsilon x) + o(V(x)R)$, что и влечет, в силу леммы 2, утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Используя соотношение (11) в (20), мы получаем из неравенства Ляпунова, что

$$\begin{aligned} V_n(x) &= nV(x) \mathbf{E} \left[1 + O \left(\left| \frac{S_{n-1}}{x} \right|^\gamma L_\gamma(x) \right); \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| < \epsilon \right] + o(QR) \\ &= nV(x) \left[1 + O \left(x^{-\gamma} L_\gamma(x) \mathbf{E} |S_{n-1}|^\gamma \right) \right. \\ &\quad \left. + o \left(\mathbf{E} \left[\left| \frac{S_{n-1}}{x} \right|^\gamma; \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| \geq \epsilon \right] + R \right) \right] \\ &= nV(x) \left[1 + O \left(n^{\gamma/2} x^{-\gamma} L_\gamma(x) + R \right) \right], \end{aligned}$$

поскольку при $m \leq b$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left| \frac{S_{n-m}}{x} \right|; \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| \geq \epsilon \right) &\leq \epsilon^{m-b} x^{-b} \mathbf{E} (|S_{n-1}|^b; |S_{n-1}| \geq \epsilon x) \\ &= \epsilon^m \mathbf{P}\{|S_{n-1}| \geq \epsilon x\} + \epsilon^{m-b} x^{-b} b \int_{\epsilon x}^{\infty} u^{b-1} \mathbf{P}\{|S_{n-1}| \geq u\} du \\ &= o(R), \end{aligned} \quad (31)$$

когда ϵ стремится к нулю достаточно медленно (последнее соотношение есть следствие применения неравенства Нагаева–Фука, оценивающего вероятности для сумм правой частью (25), и неравенства Чебышева (26)). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Подстановка (10) в (20) дает

$$\begin{aligned} V_n(x) &= nV(x) \mathbf{E} \left[1 - \frac{S_{n-1}}{x} U_1(x) + \frac{S_{n-1}^2}{x^2} U_2(x) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{S_{n-1}^k}{x^k} U_k(x) (1 + o(1)); \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| < \epsilon \right] + o(QR). \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь из (31) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[1 - \frac{S_{n-1}}{x} U_1(x) + \dots + (-1)^k \frac{S_{n-1}^k}{x^k} U_k(x) (1 + o(1)); \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| \geq \epsilon \right] \\ = o \left(R \sum_{m=0}^k |U_m(x)| \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Утверждение теоремы 3 следует из (32)–(33) и того факта, что $\mathbf{E} S_{n-1} = 0$, $\mathbf{E} |S_{n-1}^k| = O(n^{k/2})$ и $R = o(n^{k/2} x^{-k})$ в требуемом диапазоне значений x и n (напомним также, что, как было показано выше, $U_j(t)$ ограничены).

Следствие 1 получается, если найти первые четыре момента суммы S_{n-1} и подставить их в утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 5. Часть (i) следует из (21) аналогично рассуждению в доказательстве теоремы 1. Надо воспользоваться неравенством

$$\mathbf{E}|S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)}|^\gamma \leq (\mathbf{E}|S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)}|)^\gamma \leq (\mathbf{E}|S_{j-1}| + \mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^{(j)})^\gamma,$$

а также тем фактом, что $\mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^{(j)} = O(n^{1/2})$.

Чтобы доказать (ii), заметим, что аналогично (32)–(33) из (21) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x) = V(x) \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left[1 - \left(\frac{S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)}}{x} \right) U_1(x) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)}}{-x} \right)^k U_k(x) \right] + o \left(QR \sum_{j=1}^k |U_j(x)| \right) \\ + o \left(Qn^{k/2} x^{-k} |U_k(x)| \right). \end{aligned}$$

Теперь остается заметить, что в силу независимости

$$\mathbf{E}(S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)})^m = \mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^m + \sum_{l=2}^m \binom{m}{l} \mathbf{E}S_{j-1}^l \mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^{m-l},$$

поскольку $\mathbf{E}S_{j-1} = 0$. Теорема 5 доказана.

Непосредственное применение наших лемм 1 и 2 для доказательства теоремы 6 привело бы к плохим оценкам для остаточного члена, что сделало бы результат бесполезным в широком диапазоне значений x . Поэтому мы вначале докажем модифицированные варианты лемм. Положим $S_j(a) = S_j - aj$ и условимся, что любой « S -символ», используемый для обозначения функционалов от траектории $\{S_n\}$, будет обозначать соответствующий функционал от $\{S_n(a)\}$ коль скоро он снабжен аргументом a , так что, например, $\bar{S}_j(a) = \max_{m \leq j} S_m(a)$ и т.д. Положим

$$h = \frac{a}{4(1+a)}, \quad \alpha = \frac{a^2}{8(1+a)} = \frac{ah}{2}, \quad H_j = \{X_j > hx + \alpha j\}, \quad H = \bigcup_{j=1}^n H_j.$$

Лемма 3. Для любого $a > 0$ существует $c > 0$, такое, что

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n(a) > x, X_j \leq hx + \alpha j, j = 1, \dots, n\} \leq c((x \wedge n) V(x))^2$$

равномерно по n при $x \rightarrow \infty$.

(См. также [22].)

Доказательство. Мы должны рассмотреть лишь случай $x < n$; предположим, не теряя общности, что x целое и, более того, что $a \leq 1$.

Искомая вероятность есть

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_n(a) > x, H^c\} &\leq \mathbf{P}\left\{\bar{S}_x > \frac{ax}{2}; H^c\right\} + \mathbf{P}\left\{\bar{S}_x \leq \frac{ax}{2}; \bar{S}_n(a) > x; H^c\right\} \\ &\equiv p_1 + p_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Поскольку для $j \leq x$ имеем $hx + \alpha j \leq (ax/2)h^*$, где $h^* = (1 + a/2)/2(1 + a) < \frac{1}{2}$, первый член на правой стороне этого равенства

$$p_1 \leq \mathbf{P}\left\{\bar{S}_x > \frac{ax}{2}; X_j \leq \frac{ax}{2} h^*, j = 1, \dots, x\right\} = O(x^2 V^2(x))$$

из леммы 1.

С другой стороны, имеем $hx + \alpha(j + x) = hx^* + \alpha j$ с $x^* = x(1 + a/2)$, так что второй член

$$\begin{aligned} p_2 &\leq \mathbf{P}\left\{\bar{S}_{n-x}(a) > x + \frac{ax}{2}; X_j \leq hx + \alpha(j + x), j = 1, \dots, n - x\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\bar{S}_{n-x}(a) > x^*; X_j \leq hx^* + \alpha j, j = 1, \dots, n - x\}. \end{aligned}$$

Последняя вероятность имеет точно ту же форму, что и левая часть (34), но относится к более короткому временному интервалу (длины $n - x$) и большему значению x .

Повторяя вышеприведенный аргумент и полагая $x_\nu = x(1 + a/2)^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_n(a) > x; H^c\} &\leq c \sum_{\nu \geq 0} (x_\nu V(x_\nu))^2 \\ &\leq cx^2 V^2(x) \sum_{\nu \geq 0} \left(1 + \frac{a}{2}\right)^{-2\nu(\beta-1)} \left(\frac{L(x_\nu)}{L(x)}\right)^2 = O(x^2 V^2(x)), \end{aligned}$$

поскольку $\beta > 2$. Лемма 3 доказана.

Нам также понадобится модификация леммы 2. Положим

$$B_j = \{|S_{j-1}| < \varepsilon x, \bar{S}_{n-j}^{(j)} < \varepsilon x\}.$$

Лемма 4. *Существуют $c > 0$ и функция $\varepsilon = \varepsilon(x) \searrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, такие, что при $x \rightarrow \infty$,*

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n(a) > x\} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\{V(x + aj - S_{j-1} - \bar{S}_{n-j}^{(j)}(a)); B_j\} + o((x \wedge n)^2 x^{-b} V(x)).$$

Доказательство. Аналогично (23)–(24), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n H_j) &\geq \mathbf{P}(G_n H) \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n H_j) - \sum_{i < j} \mathbf{P}(G_n H_i H_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n H_j) - \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(H_j)\right)^2 \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n H_j) + O((x \wedge n)^2 V^2(x)) \end{aligned}$$

в силу независимости событий H_j и оценки

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(H_j) = \sum_{j=1}^n V(hx + aj) \leq (nV(x)) \wedge \sum_{j=1}^{\infty} V(hx + aj) = O((x \wedge n) V(x))$$

(поскольку $V(x)$ правильно меняющаяся и мы можем воспользоваться теоремой Карамата (см., например, [1]) для оценивания бесконечной суммы).

Следовательно, отсюда и из леммы 3 имеем

$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n H_j) + O((x \wedge n)^2 V^2(x)).$$

Теперь заметим, что, аналогично (29),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n H_j) &= \mathbf{P}\{G_n H_j \{\bar{S}_{j-1}(a) \leq x\} B_j\} \\ &\quad + O(\mathbf{P}(H_j B_j^c) + \mathbf{P}\{\bar{S}_{j-1} > x; H_j\}) \\ &= \mathbf{E}[V(x + aj - S_{j-1} - \bar{S}_{n-j}^{(j)}(a)); B_j] \\ &\quad + O(\mathbf{P}(H_j B_j^c) + jV(x)V(hx + \alpha j)) \end{aligned}$$

из (12), тогда как

$$\mathbf{P}(H_j B_j^c) \leq V(x + \alpha j) [\mathbf{P}\{|S_{j-1}| \geq \varepsilon x\} + \mathbf{P}\{\bar{S}_{n-j}(a) \geq \varepsilon x\}].$$

Остается напомнить, что по теореме 12, (см. [5, с. 172])

$$\mathbf{P}\{\bar{S}(a) \geq x\} = \frac{1 + o(1)}{a} \int_x^\infty V(u) du = \frac{1 + o(1)}{a\beta} xV(x) \quad (35)$$

при $x \rightarrow \infty$ в силу теоремы Карамата, так что

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_{n-j}(a) \geq \varepsilon x\} \leq \mathbf{P}\{\bar{S}(a) \geq \varepsilon x\} \wedge \mathbf{P}\{\bar{S}_n \geq \varepsilon x\} = O((\varepsilon x \wedge n)V(\varepsilon x)) \quad (36)$$

из (12), и следовательно, используя (25), мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [\mathbf{P}(H_j B_j^c) + jV(x)V(hx + \alpha j)] &= o\left(x^{-b} \sum_{j=1}^n jV(hx + \alpha j)\right) \\ &\quad + O\left((\varepsilon x \wedge n)V(\varepsilon x) \sum_{j=1}^n V(hx + \alpha j)\right) = o((x \wedge n)^2 x^{-b} V(x)). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 6. Чтобы установить утверждение теоремы, воспользуемся (аналогично вышеприведенным рассуждениям) представлением (10) и леммой 4. Для определения ошибки аппроксимации нам нужно оценить при $m \leq k$ остаточные члены

$$\begin{aligned} &(x + aj)^{-m} \mathbf{E}[(S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)}(a))^m; B_j^c] \\ &= O\left\{(x + aj)^{-m} \left[\mathbf{E}(|S_{j-1}|^m; |S_{j-1}| \geq \varepsilon x) + \mathbf{E}|S_{j-1}|^m \mathbf{P}\{\bar{S}_{n-j}(a) \geq \varepsilon x\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^m(a) \mathbf{P}\{|S_{j-1}| \geq \varepsilon x\} + \mathbf{E}(\bar{S}_{n-j}^m(a); \bar{S}_{n-j}(a) \geq \varepsilon x) \right] \right\} \\ &\equiv O(I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned}$$

Из (31) и (36) имеем

$$I_1 = o((x + aj)^{-m} j x^{-b}), \quad I_2 = O((x + aj)^{-m} j^{m/2} (\varepsilon x \wedge n) V(\varepsilon x)),$$

так что

$$\sum_{j=1}^n (I_1 + I_2) V(x + aj) = o((x \wedge n)^2 x^{-b} V(x)). \quad (37)$$

Далее, из (36) получаем:

$$\mathbf{E} \bar{S}_{n-j}^m(a) = O\left(\int_0^n u^m V(u) du + n \int_n^\infty u^{m-1} V(u) du\right) = O(1 \vee n^{m+1} V(n)).$$

Стало быть, (25) влечет

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n I_3 V(x + aj) &= O\left(\sum_{j=1}^n \frac{V(x + aj)}{(x + aj)^m} \mathbf{E} \bar{S}_{n-j}^m(a) \times o(j x^{-b})\right) \\ &= o\left((1 \vee n^{m+1} V(n))(x \wedge n) x^{-m-b+1} V(x)\right) \\ &= (x \wedge n)^2 x^{-b} V(x) \times O\left(\frac{1 \vee n^{m+1} V(n)}{(x \wedge n) x^{m-1}}\right) \\ &= o((x \wedge n)^2 x^{-b} V(x)). \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место, так как при $m = 1$ всегда выполнено $1 \vee n^{m+1} V(n) = 1$ (в силу неравенства Чебышева), тогда как при $m \geq 2$, максимум имеет порядок $o(n)$, а знаменатель $(x \wedge n) x^{m-1} \gg n$, когда $x \geq c(n \ln n)^{1/2}$.

Согласно (35)

$$I_4 = O\left((x + aj)^{-m} \int_{\varepsilon x}^\infty (u \wedge n) u^{m-1} V(u) du\right). \quad (38)$$

Когда $\varepsilon x > n$, мы получаем:

$$(x + aj)^{-m} n \int_{\varepsilon x}^\infty u^{m-1} V(u) du = O\left(n \frac{(\varepsilon x)^m V(\varepsilon x)}{(x + aj)^m}\right) = O(n \varepsilon^m V(\varepsilon x)).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n I_4 V(x + aj) = O(n^2 V(x) V(\varepsilon x) \varepsilon^m) = o(n^2 V(x) x^{-b}),$$

если $\varepsilon \rightarrow 0$ достаточно медленно.

Когда $\varepsilon x \leq n$, интеграл (38) можно оценить сверху величиной

$$\int_{\varepsilon x}^n u^m V(u) du + n \int_n^\infty u^{m-1} V(u) du = O(n^{m+1} V(n)),$$

и потому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n I_4 V(x + aj) &= O\left(n^{m+1} V(n) \sum_{j=1}^n \frac{V(x + aj)}{(x + aj)^m}\right) \\ &= O\left(x^2 V(x) \left(\frac{n}{x}\right)^{m+1} V(n)\right). \end{aligned}$$

Нам также нужно оценить погрешность (возникающую из (12)); мы полагаем $Y = (S_{j-1} + \bar{S}_{n-j}^{(j)}(a))/(x + aj)$ вида

$$\mathbf{E}[Y^k \delta_k(Y, x + aj); B_j] = o\left(j^{k/2}(x + aj)^{-k}\right),$$

когда $k \leq \beta - 1$ (в этом случае $\mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^k(a) \leq \mathbf{E}\bar{S}^k(a) < \infty$), так что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n V(x + aj) \mathbf{E}[Y^k \delta_k(Y, x + aj); B_j] &= o\left(\sum_{j=1}^n j^{k/2}(x + aj)^{-k} V(x + aj)\right) \\ &= o((x \wedge n)^{k/2} x^{-k+1} V(x)). \end{aligned}$$

Сходное рассуждение может быть использовано и когда $k \in (\beta - 1, b]$. Теорема 6 доказана.

Доказательство следствия 3. Очевидно, для $n = x^{3/2}$,

$$\mathbf{P}(G_n) \leq \mathbf{P}(G_\infty) \leq \mathbf{P}(G_n) + \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k>n} \{S_k > x + ak\}\right\},$$

где последняя вероятность, в силу (2) и (35), не превосходит

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{S_n > \frac{an}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{S_n \leq \frac{an}{2}; \bigcup_{k>n} \{S_k > x + ak\}\right\} \\ &= O(nV(n)) + \mathbf{P}\left\{\bar{S}(a) > x + \frac{an}{2}\right\} \\ &= O(nV(n)) = O(x^{3/2-3\beta/2} L(x^{3/2})) = o(V(x)). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\mathbf{P}(G_\infty) = \mathbf{P}(G_n) + o(V(x)). \quad (39)$$

Далее мы применим теорему 6, чтобы получить

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n) &= \sum_{j=1}^n V(x + aj) \left\{1 - \frac{U_1(x + aj)}{x + aj} \mathbf{E}\bar{S}_{n-j}(a)\right\} + o(V(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n V(x + aj) + \frac{\beta s(a) + o(1)}{a} \int_x^{x+na} \frac{V(u)}{u} du + o(V(x)) \quad (40) \end{aligned}$$

в силу того, что $\mathbf{E}\bar{S}_{n-j}^{(j)}(a) \uparrow s(a)$ при $n - j \rightarrow \infty$ и соотношения (14).

Для завершения доказательства остается заметить, что полагая $z = x + aj$, мы получаем из $[D_1]$ и (14) соотношение

$$\begin{aligned} V(x + aj) - \frac{1}{a} \int_{x+aj-1}^{x+aj} V(u) du &= V(z) \int_0^1 \left[1 - \frac{V(z(1 - ar/z))}{V(z)}\right] dr \\ &= V(z) \int_0^1 \left[-\beta \frac{ar}{z} (1 + o(1))\right] dr = -\frac{a\beta V(z)}{2z} (1 + o(1)) \\ &= -\frac{\beta + o(1)}{2} \int_{z-a}^z \frac{V(u)}{u} du, \end{aligned}$$

из которого, учитывая (39)–(40), следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_\infty) &= \frac{1}{a} \int_x^{x+an} V(u) du + \beta \left[\frac{s(a)}{a} - \frac{1}{2} + o(1) \right] \int_x^{x+an} \frac{V(u)}{u} du \\ &= \frac{1}{a} \int_x^\infty V(u) du + \left[\frac{s(a)}{a} - \frac{1}{2} + o(1) \right] V(x), \end{aligned}$$

где последнее равенство есть следствие из теоремы Карамата.

Доказательство теоремы 7. Полагая

$$a_n = \frac{n^{1/2}}{x} = o(1) \quad \text{и} \quad f_s(t) = f_*(s) - f(t+s),$$

мы имеем $M_{j,n} = n^{1/2} m_{j,n}$, где

$$m_{j,n} = \frac{1}{a_n} \max_{m \leq n-j} \left(a_n n^{-1/2} S_m^{(j)} + f_{j/n} \left(\frac{m}{n} \right) \right).$$

Поскольку $\max_{t \in [0, 1-s]} f_s(t) = 0$, из основного предложения в [8] вытекает (таким же образом, как и теорема 1 из той же заметки), что $m_{j,n}$ слабо сходится к $w^{(t)}$ при $n \rightarrow \infty$, $j/n \rightarrow t$. Теперь из (30) и неравенства Колмогорова мы получаем

$$\mathbf{P}\{|m_{j,n}| > z\} \leq \mathbf{P}\left\{n^{-1/2} \max_{m \leq n-j} |S_m^{(j)}| > z\right\} \leq z^{-2} \mathbf{E}[n^{-1} S_{n-j}^2] \leq z^{-2},$$

а это означает, что $m_{j,n}$ равномерно интегрируемы и, следовательно, что сходимость моментов также имеет место:

$$\mathbf{E} m_{j,n} \rightarrow E_t \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{j}{n} \rightarrow t. \quad (41)$$

Возвращаясь к представлению (19), имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left\{V(g_*(j) - S_{j-1} - M_{j,n}); A_j\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right) - S_{j-1} - n^{1/2} m_{j,n}\right); A_j\right\} \\ &= V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) \mathbf{E}\left\{1 - \left[\frac{S_{j-1}}{x f_*(j/n)} + \frac{n^{1/2} m_{j,n}}{x f_*(j/n)}\right] \right. \\ &\quad \left. \times U_1\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) (1 + o(1)); A_j\right\} \\ &= V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) \left[1 - \frac{n^{1/2} \mathbf{E} m_{j,n}}{x f_*(j/n)} U_1\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) (1 + o(1))\right] \\ &\quad + o\left(V(x) R(1 + |U_1(x)|)\right) \end{aligned}$$

аналогично (31), что влечет (вместе с (14) и (41)) соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n) &= \sum_{j=1}^n V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) + (1 + o(1)) \frac{\beta n^{1/2}}{x} \sum_{j=1}^n \frac{V(x f_*(j/n)) E_{j/n}}{f_*(j/n)} \\ &\quad + o(n^2 x^{-b} V(x)). \end{aligned} \quad (42)$$

Последний член, очевидно, пренебрежим, тогда как вторая сумма есть $(1+o(1))x^{-\beta}L(x)\sum_{j=1}^n f_*^{-\beta-1}\left(\frac{j}{n}\right)E_{j/n} = (1+o(1))nV(x)\int_0^1 f_*^{-\beta-1}(t)E_t dt$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Что касается первой суммы в (42), то из $[D_1]$ и (14) мы имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) - n \int_0^1 V(x f_*(u)) du \\ &= \sum_{j=1}^n V\left(x f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right) \int_{(j-1)/n}^{j/n} \left[1 - \frac{V(xu)}{V(x f_*(j/n))}\right] du \\ &= n\beta \sum_{j=1}^n \frac{V(x f_*(j/n))}{f_*(j/n)} \int_{(j-1)/n}^{j/n} \left[f_*(u) - f_*\left(\frac{j}{n}\right)\right] (1+o(1)) du \\ & \quad + O\left(nV(x) \sum_{j=1}^n n^{-1} \left[f_*\left(\frac{j}{n}\right) - f_*\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]\right) = O(V(x)), \end{aligned}$$

поскольку $f_*(u)$ не убывает, и это завершает доказательство.

Доказательство теоремы 8. Без потери общности можно предположить, что в теореме в условии интегрируемости $N = 1$. В этом случае X_1 (а, стало быть, и S_n) будет иметь ограниченную плотность.

Фиксируем $\Delta > 0$ и положим $\Delta_x = (x, x+\Delta)$. Прежде всего докажем, что справедливо следующее соотношение (событие C определено в (22)):

$$\mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x\} = \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C\} + o(Q^2 n^{-1/2} \Delta). \quad (43)$$

Введем независимые одинаково распределенные величины X'_i , распределенные согласно закону $\mathcal{L}(X'_i) = \mathcal{L}(X_i | X_i \leq hx)$ ($h < \frac{1}{2}$ фиксированно), и положим $S'_n = X'_1 + \dots + X'_n$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n \in dx; C^c\} = (1 - V(hx))^n \mathbf{P}\{S'_n \in dx\}. \quad (44)$$

Далее, пусть X''_i суть независимые одинаково распределенные преобразования Крамера над X'_i : для некоторого $\mu > 0$,

$$\mathbf{P}\{X''_i \in dx\} = \frac{e^{\mu x}}{\mathbf{E}e^{\mu X'_i}} \mathbf{P}\{X'_i \in dx\}.$$

Тогда, как хорошо известно, для суммы $S''_n = X''_1 + \dots + X''_n$ имеем

$$\mathbf{P}\{S''_n \in dx\} = \frac{e^{\mu x}}{\mathbf{E}e^{\mu S'_n}} \mathbf{P}\{S'_i \in dx\}, \quad (45)$$

так что

$$\mathbf{P}\{S'_n \in dx\} = e^{-\mu x} \left(\frac{\rho(\mu, hx)}{1 - V(hx)} \right)^n \mathbf{P}\{S''_n \in dx\},$$

где $\rho(\mu, y) = \int_0^y e^{\mu t} d(1 - V(t))$, и, следовательно, в силу (44)

$$\mathbf{P}\{S_n \in dx; C^c\} = e^{-\mu x} (\rho(\mu, hx))^n \mathbf{P}\{S''_n \in dx\}.$$

Выбирая теперь

$$\mu = \frac{1}{hx} \ln \frac{(hx)^r}{2nm_r}, \quad r \in (2, \beta) \quad (46)$$

(ср. приложение 4 в [5]), мы получаем аналогично (18), что

$$\mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C^c\} = o(Q^2 n^{-1/2} \Delta),$$

где множитель $n^{-1/2} \Delta$ появляется в силу леммы 2.6 из [16] благодаря равномерной (по x и n) ограниченности плотности величин X_n'' (что можно легко вывести из (44)–(46) и нашего предположения относительно φ). Последнее соотношение влечет (43).

Далее, поскольку, как легко видеть, при $1 \leq i < j \leq n$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C_i C_j\} \\ &= \int_{x_1, x_2 > hx} \mathbf{P}\{S_{n-2} \in \Delta_x - x_1 - x_2; X_{n-1} \in dx_1, X_n \in dx_2\} \\ &\leq (\mathbf{P}(C_1))^2 \sup_y v_{n-2}(y) \Delta = O(V^2(x) n^{-1/2} \Delta), \end{aligned}$$

отсюда и из (43) получаем аналогично (24), что вероятность

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x\} &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C_j\} + O(Q^2 n^{-1/2} \Delta) \\ &= n \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C_n\} + O(Q^2 n^{-1/2} \Delta). \end{aligned} \quad (47)$$

Теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C_n \cap \{|S_{n-1}| \geq \varepsilon x\}\} &\leq \mathbf{P}(C_1) \sup_y \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; |S_{n-1}| \geq \varepsilon x\} \\ &= o(RV(x) n^{-1/2} \Delta) \end{aligned} \quad (48)$$

аналогично (27) (мы вновь предполагаем, что $\varepsilon = \varepsilon(x) \searrow 0$ достаточно медленно при $x \rightarrow \infty$). Действительно, мы просто должны оценить здесь супремум. Предположим без потери общности, что $n-1 = 2m$, $S_{n-1} = S_m + S_m^*$, где S_m^* есть независимая копия S_m . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{n-1} \in \Delta_y; |S_{n-1}| \geq \varepsilon x\} &\leq 2 \sup_z \mathbf{P}\left\{S_m \in \Delta_z; |S_m^*| \geq \varepsilon \frac{x}{2}\right\} \\ &= 2 \mathbf{P}\left\{|S_m| \geq \varepsilon \frac{x}{2}\right\} \sup_z \mathbf{P}\{S_m \in \Delta_z\} = o(Rn^{-1/2} \Delta) \end{aligned}$$

из (25)–(26) и леммы 2.6 из [16].

Таким образом, мы вывели, что

$$\mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x\} = n \mathbf{P}\{S_n \in \Delta_x; C_n \cap \{|S_{n-1}| < \varepsilon x\}\} + o(Q R n^{-1/2} \Delta). \quad (49)$$

Отсюда мы имеем для плотности v_n , аналогично (29), следующее соотношение:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \frac{n}{dx} \mathbf{E}[\mathbf{1}(X_n \in dx - S_{n-1}); C_n \cap \{|S_{n-1}| < \varepsilon x\}] + o(Q R n^{-1/2}) \\ &= n \mathbf{E}\left[v\left(x\left(1 - \frac{S_{n-1}}{x}\right)\right); \left|\frac{S_{n-1}}{x}\right| < \varepsilon\right] + o(Q R n^{-1/2}), \end{aligned}$$

и теперь доказательство можно завершить таким же образом, как и таковое для теоремы 3.

Доказательство теоремы 9. Условие $[D_1]$ и соотношение (14) влекут

$$\Delta V(t) = \frac{\Delta}{t} V(t) \left[U_1(t) \left(1 + \delta_1 \left(\frac{\Delta}{t}, t \right) \right) + O \left(\frac{|\Delta|}{t} \right) \right] = -\frac{\beta V(t)}{t} (\Delta + o(1)).$$

Следовательно, из (20) (предполагая без потери общности, что $x\varepsilon(x) = (x + \Delta)\varepsilon(x + \Delta)$) имеем

$$\begin{aligned} \Delta V_n(x) &= n\mathbf{E} \left[\Delta V(x - S_{n-1}); |S_{n-1} < \varepsilon x| \right] + o(QR) \\ &= -(\beta n \Delta) \mathbf{E} \left[V^* \left(x \left(1 - \frac{S_{n-1}}{x} \right) \right) \left(1 + o(1) \right); \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| < \varepsilon \right] + o(QR), \end{aligned}$$

где функция

$$V^*(t) = t^{-1}V(t) = t^{-\beta-1}L(t)$$

также удовлетворяет условию $[D_1]$. Стало быть, аналогично (10) и (14),

$$V^*(t(1+y)) = V^*(t) \left[1 + y(U_1^*(t)(1 + \delta_1^*(y, t)) + O(|y|)) \right],$$

где $U_1^*(t) = -(\beta + 1) + L_1(t)$.

Вспоминая, что

$$\mathbf{E} \left[1 - \frac{S_{n-1}}{x} U_1^*(x); \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| \geq \varepsilon \right] = o(R)$$

из (31), мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta V_n(x) &= -(\beta n \Delta) V^*(x) \mathbf{E} \left[\left(1 - \frac{S_{n-1}}{x} (U_1^*(x) + o(1)) \right) \right. \\ &\quad \left. \times (1 + o(1)); \left| \frac{S_{n-1}}{x} \right| < \varepsilon \right] + o(QR) \\ &= -(\beta n \Delta) V^*(x) \mathbf{E} \left[\left(1 - \frac{S_{n-1}}{x} (U_1^*(x) + o(1)) \right) (1 + o(1)) \right] \\ &\quad + o(QR) = -(\beta n \Delta + o(1)) V^*(x) + o(QR), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. New York: Cambridge University Press, 1987.
2. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. — Сиб. матем. журн., 1962, т. 3, в. 5, с. 645–694.
3. Боровков А. А. Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I. — Сиб. матем. журн., 1964, т. 5, в. 2, с. 253–289.

4. Боровков А. А. Замечания о неравенствах для сумм независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 3, с. 587–589.
5. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
6. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, в. 3, с. 493–509.
7. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
8. Borovkov K. A. A note on a limit theorem for differentiable mappings. — Ann. Probab., 1985, v. 13, p. 1018–1021.
9. Durrett R. Conditional limit theorems for random walks with negative drift. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1980, B. 52, S. 277–287.
10. Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. — Insurance Math. Econom., 1982, v. 1, p. 55–72.
11. Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 387–397.
12. Mikosch T., Nagaev A. V. Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance. — Extremes, 1998, v. 1, p. 81–110.
13. Nagaev S. V. Large deviations. — Ann. Probab., 1979, v. 7, p. 745–789.
14. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 4, с. 660–675.
15. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
16. Petrov V. V. Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables. NY: Oxford University Press, 1995.
17. Линелис И. Ф. Одна задача больших уклонений в пространстве траекторий. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 1, с. 73–87.
18. Розовский Л. В. Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 686–705.
19. Teugels J. L., Willekens E. Asymptotic expansions for waiting time probabilities in an $M/G/1$ queue with long tailed service time. — Queueing Syst. Theory Appl., 1992, v. 10, p. 295–311.
20. Veraverbeke N. Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk. — Stochastic Proc. Appl., 1977, v. 1, p. 27–37.
21. Vinogradov V. Refined Large Deviation Limit Theorems. Harlow: Longman, 1994.
22. Боровков А. А. Оценки для распределений сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера. — Сиб. матем. ж., 2000, т. 41, № 5, с. 997–1038.

Поступила в редакцию
23.V.2000