Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бурнашев, Т. С. Хан, Шун-ичи Амари, О некоторых задачах оценивания с информационными ограничениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 233–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 09:56:46

© 2001 г.   БУРНАШЕВ М. В.*, ХАН Т. С.**;
АМАРИ Ш.***

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ С ИНФОРМАЦИОННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹⁾

Статья является второй частью работы авторов [1]. Рассматривается задача оценки параметра, в которой часть данных не может наблюдаться непосредственно. Имеющийся помощник наблюдает эти данные и может передать нам некоторую ограниченную информацию о них. Какая именно информация позволит достичь наименьшей среднеквадратичной ошибки при оценивании параметра? В частности, какая минимальная информация достаточна для получения той же среднеквадратичной ошибки, как если бы мы непосредственно наблюдали все данные? Получены оценка сверху для величины этой минимальной информации и некоторые подобные результаты.

Ключевые слова и фразы: оценка параметра, среднеквадратичная ошибка, фишеровская информация, скорость передачи информации, критическая скорость.

Данная статья является второй частью работы авторов [1], из которой мы используем также обозначения.

Далее для модели ДСК («двоичный симметричный канал») из примера 2 [1] мы рассмотрим задачу оценивания параметра p .

Всюду далее $\log x = \log_2 x$. Для любого множества $\mathcal{A}$ через $|\mathcal{A}|$ или A обозначается его мощность. Для произвольной функции $f(x)$, $x \in \mathcal{A}$, через $|f|$ обозначается мощность множества $f(\mathcal{A})$.

1. Постановка задачи и некоторые вспомогательные результаты. Нам удобнее будет рассмотреть сначала более общую, чем для ДСК, задачу оценивания параметра. При этом, для разнообразия, в отличие от [1] мы поменяем местами статистику и помощника (т.е.

---

*Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный пер., 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: burn@i.i.tp.ru

**Graduate School of Information Systems, University of Electro-Communications, Chofugaoka 1-5-1, Chofu, Tokyo 182, Japan.

***RIKEN Brain Science Institute, Wako-shi, Hirosawa 2-1, Saitama 351-0198, Japan.

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 98-01-04108).

статистик будет наблюдать вход канала, а помощник наблюдает выход канала). Конечно, это не меняет сути задачи, однако делает более ясными ее связи с другими задачами.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ суть конечные множества, представляющие входной и выходной алфавиты канала соответственно. Задана переходная вероятность $p(y|x, \theta)$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, т.е. вероятность получить на выходе y при условии, что на входе был x . Предполагается, что она зависит от неизвестного параметра $\theta \in [a, b] \subset \mathbf{R}^1$, подлежащего оцениванию. Задано также некоторое априорное распределение $\pi(x)$ на входном алфавите $\mathcal{X}^n$, и входной блок x^n представляет собой вектор из n независимых случайных величин с этим распределением $\pi(x)$. Будем обозначать его распределение через $\pi(x^n)$.

Пусть задана скорость передачи $R > 0$ и разрешается заранее разбить выходное пространство $\mathcal{Y}^n$ на $N \leq 2^{Rn}$ частей $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N\}$. Теперь статистик наблюдает только вход канала x^n , а помощник наблюдает только выход канала y^n . Далее помощник сообщает статистику, какой части $\mathcal{Y}_i$ принадлежит наблюдение y^n . Другими словами, на множестве $\mathcal{Y}^n$ выбирается произвольная функция $f(y^n)$, принимающая не более N различных значений (т.е. $|\log f| \leq Rn$). Основываясь на собственном наблюдении x^n и дополнительной информации $f(y^n)$ от помощника, статистик строит некоторую оценку $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x^n, f(y^n))$ неизвестного параметра θ . Нас будет интересовать асимптотика ($n \rightarrow \infty$) среднеквадратичного риска оценки $\hat{\theta}_n$, а именно, поведение функции

$$\begin{aligned} e(\theta, \hat{\theta}_n, R, f) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \mathbf{E}_{\theta} \left[\hat{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta \right]^2 \right\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} \pi(x^n) \mathbf{E}_{\theta} \left[(\hat{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta)^2 \mid x^n \right] \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

$R > 0$, для хороших функций $f(y^n)$ (разбиений $\{\mathcal{Y}_i\}$) и хороших оценок $\hat{\theta}_n$.

Для этого естественно сначала понять поведение этой функции в случае, когда скорость передачи R велика настолько, что помощник может сообщить статистику точное значение блока y^n (например, $R \geq \log |\mathcal{Y}|$). Тогда мы приходим к стандартной статистической задаче оценки параметра по наблюдениям x^n, y^n . Мы будем рассматривать регулярный случай этой задачи, когда переходная вероятность $p(y|x, \theta)$ является непрерывно дифференцируемой (по θ) функцией для любых $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ и для нее определена фишеровская информация

$$I(\theta) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} p'^2(y|x, \theta) p(y|x, \theta) > 0. \quad (2)$$

Так как $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ суть конечные множества, то функция $I(\theta)$ является равномерно непрерывной для $\theta \in [a, b]$.

В стандартной теории оценивания всегда делается некоторое предположение, обеспечивающее существование какой-либо равномерно состоятельной оценки параметра θ [4], [5]. Тогда задача сведется к исследованию свойств наилучших оценок $\hat{\theta}_n$ в малой окрестности истинного значения θ . Для этого в нашем случае достаточно, например, предположить, что семейство вероятностных мер $\{p(y|x, \theta), \theta \in [a, b]\}$ является «равномерно разделенным» по θ , т.е.

$$\inf_{|\theta - \theta_1| \geq \varepsilon} \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} |p(y|x, \theta) - p(y|x, \theta_1)| > 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Пусть, далее, $\hat{\theta}_n(x^n, y^n)$ — оценка максимального правдоподобия параметра θ . Из стандартной теории оценивания следует, что равномерно по $\theta \in [a, b]$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \mathbf{E}_\theta [\hat{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta]^2 \right\} \leq \frac{1}{I(\theta)} \quad (4)$$

(неравенство в (4) возникает на концах отрезка $[a, b]$).

С другой стороны, известно, что для любых $\delta > 0$ и $c \in [a, b]$ справедливо неравенство $(c_\delta = (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b])$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\hat{\theta}_n} \sup_{\theta \in c_\delta} \left\{ n \mathbf{E}_\theta [\tilde{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta]^2 - \frac{1}{I(\theta)} \right\} \geq 0. \quad (5)$$

Поэтому из (4), (5) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\hat{\theta}_n} \sup_{\theta \in [a, b]} \left\{ n \mathbf{E}_\theta [\tilde{\theta}_n(x^n, y^n) - \theta]^2 - \frac{1}{I(\theta)} \right\} = 0. \quad (6)$$

Нас будет интересовать вопрос, при какой минимальной скорости $R_{\text{crit}} = R_{\text{crit}}([a, b])$ выполняется естественный аналог соотношения (6)? Другими словами, при каких скоростях R существует функция $f(y^n)$ с $|\log f| \leq Rn$ такая, что выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\theta}_n} \sup_{\theta \in [a, b]} \left\{ n \mathbf{E}_\theta [\tilde{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta]^2 - \frac{1}{I(\theta)} \right\} = 0. \quad (7)$$

Покажем сначала, что достаточно установить соотношение (7) в некоторой локальной $\delta(n)$ -окрестности каждой точки $\theta \in [a, b]$.

Предложение 1. Для справедливости соотношения (7) достаточно, чтобы для любого $c \in [a, b]$ и $\delta(n) = (\ln n)/\sqrt{n}$ выполнялось соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\theta}_n} \sup_{\theta \in c_{\delta(n)}} \left\{ n \mathbf{E}_\theta [\tilde{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta]^2 - \frac{1}{I(\theta)} \right\} = 0. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим себе, что статистик знает точную величину блока y^m для некоторого $m < n$. Тогда в силу предположений (2), (3) существуют положительные постоянные K_1, K_2 (не зависящие от n, θ) такие, что для оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_m = \hat{\theta}_m(x^m, y^m)$ выполняется неравенство (см. [4, теорема 5.3])

$$\sup_{\theta \in [a, b]} \mathbf{P}_\theta \left\{ |\hat{\theta}_m - \theta| > z \right\} \leq K_1 e^{-K_2 m z^2}, \quad z > 0. \quad (9)$$

Поэтому для последовательности $\delta(m) = (\ln m)/\sqrt{m}$, начиная с достаточно больших m , имеем

$$\sup_{\theta \in [a, b]} \mathbf{E}_\theta \left[\left(\hat{\theta}_m - \theta \right)^2 ; I_{|\hat{\theta}_m - \theta| > \delta(m)/4} \right] \leq \frac{1}{m^2}. \quad (10)$$

Пусть теперь помощник сообщает статистику точные значения первых $m = \sqrt{n}$ величин $(y_1, \dots, y_m)$. С их помощью статистик может построить некоторый интервал длины $\delta(n)/2$, в котором с большой вероятностью находится параметр θ (в силу (10) оставшейся малой вероятностью можно пренебречь).

Построим теперь на отрезке $[a, b]$ следующую систему отрезков длины $\delta(n)$. В качестве первого отрезка выберем $[a, a + \delta(n)]$. Далее будем последовательно сдвигать этот отрезок вправо на $\delta(n)/2$, пока его правый конец не превысит точки b . В результате общее число таких отрезков длины $\delta(n)$ в построенной системе не превышает $2(b - a)/\delta(n) + 1$. С другой стороны, любой отрезок длины $\delta(n)/2$ на отрезке $[a, b]$ полностью принадлежит одному из отрезков этой системы.

Далее для каждого отрезка этой системы помощник может использовать свою функцию f и сообщить ее значение статистику. Так как общее число отрезков системы меньше $\sqrt{n}$ (т.е. неэкспоненциально), то это не изменит скорости передачи R . Статистик же по первым $\sqrt{n}$ наблюдениям может правильно определить отрезок системы (длины $\delta(n)$), которому принадлежит оцениваемый параметр. После этого он использует соответствующую этому отрезку функцию f . Отсюда вытекает справедливость предложения 1.

З а м е ч а н и е. Хотя предложение 1 представляет собой довольно простой и понятный результат, его в свое время не знали авторы работы [2], и это послужило причиной определенных трудностей в [2].

Следствие 1. *Справедлива формула*

$$R_{\text{crit}}([a, b]) = \sup_{\theta \in [a, b]} R_{\text{crit}}(\theta_{\delta(n)}), \quad (11)$$

где $\theta_{\delta(n)} = (\theta - \delta(n), \theta + \delta(n)) \cap [a, b]$.

В силу предложения 1 и следствия 1 рассматриваемая задача сводится к изучению локального (в малой окрестности истинного значения θ) поведения хороших оценок $\tilde{\theta}_n$. Ясно, что это поведение будет выражаться в терминах соответствующим образом модифицированной фишеровской информации. Введем необходимые для этого понятия.

Для произвольного разбиения $\{\mathcal{Y}_i; i = 1, \dots, N = 2^{Rn}\}$ (определяющего функцию $f_n(y^n)$ с $|\log f_n| \leq Rn$) определим условную и безусловную фишеровскую информацию:

$$I(\theta; f_n | x^n) = I(\theta; \{\mathcal{Y}_i\} | x^n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \frac{p'^2(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)}{p(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} I(\theta; f_n) &= I(\theta; \{\mathcal{Y}_i\}) = \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} \pi(x^n) I(\theta; \{\mathcal{Y}_i\} | x^n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} \pi(x^n) \sum_{i=1}^N \frac{p'^2(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)}{p(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем также максимальную достижимую фишеровскую информацию при заданной скорости R

$$I(\theta; R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\log f_n| \leq Rn} I(\theta; f_n), \quad R > 0. \quad (14)$$

Так как в соотношении (8) мы имеем дело только с состоятельными оценками в «регулярном эксперименте» [4], [5], то для любого $R > 0$ справедлива формула [2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\hat{\theta}_n} \sup_{\theta \in \mathcal{C}_{\delta(n)}} \left\{ n \mathbf{E}_{\theta} [\hat{\theta}_n(x^n, f(y^n)) - \theta]^2 - \frac{1}{I(\theta; R)} \right\} = 0. \quad (15)$$

Ясно также, что для величин $I(\theta; R)$ и $I(\theta)$ выполняется неравенство

$$I(\theta; R) \leq I(\theta), \quad R > 0. \quad (16)$$

Для его доказательства заметим, что для любых $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathcal{Y}^n$ и $x^n \in \mathcal{X}^n$ в силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} p'^2(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta) &= \left[\sum_{y^n \in \mathcal{Y}_i} \sqrt{p(y^n | x^n, \theta)} \frac{p'(y^n | x^n, \theta)}{\sqrt{p(y^n | x^n, \theta)}} \right]^2 \\ &\leq p(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta) \sum_{y^n \in \mathcal{Y}_i} \frac{p'^2(y^n | x^n, \theta)}{p(y^n | x^n, \theta)}. \end{aligned}$$

Поэтому для любого разбиения $\{\mathcal{Y}_i\}$ и любого $x^n \in \mathcal{X}^n$ получаем

$$I(\theta; \{\mathcal{Y}_i\} | x^n) = \frac{1}{n} \sum_i \frac{p'^2(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)}{p(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)} \leq \frac{1}{n} \sum_i \sum_{y^n \in \mathcal{Y}_i} \frac{p'^2(y^n | x^n, \theta)}{p(y^n | x^n, \theta)},$$

что вместе с (12)–(14) дает неравенство (16).

Поэтому мы приходим к чисто аналитической задаче: при каких R в (16) выполняется равенство? Ясно, что существует определенная критическая скорость $R_{\text{crit}}(\theta) \geq 0$ такая, что равенство в (16) выполняется для $R > R_{\text{crit}}(\theta)$ и не выполняется для $R < R_{\text{crit}}(\theta)$. Формально определим $R_{\text{crit}}(\theta) \geq 0$ как

$$R_{\text{crit}}(\theta) = \inf \{R: I(\theta; R) = I(\theta)\}, \quad \theta \in [a, b]. \quad (17)$$

2. Оценка сверху для $R_{\text{crit}}(\theta)$ (фишеровская информация для случайно выбранных точек). Чтобы оценить величину $R_{\text{crit}}(\theta)$ сверху, мы оценим снизу величину $I(\theta, R)$ и получим таким образом достаточное условие равенства в соотношении (16).

В свою очередь, чтобы оценить снизу величину $I(\theta; R)$, мы используем метод «случайного выбора» множеств $\{\mathcal{Y}_i\}$, который уже применялся в первой части работы [1].

Далее мы рассматриваем ДСК из примера 2 в [1] с неизвестной переходной вероятностью $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ и $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = E = \{0; 1\}$. Вероятность получить на выходе блок $y^n = (y_1, \dots, y_n)$ при условии, что на входе был блок $x^n = (x_1, \dots, x_n)$, дается формулой

$$\mathbf{P}(y^n | x^n) = (1 - \theta)^{n-d(x^n, y^n)} \theta^{d(x^n, y^n)},$$

где $d(x^n, y^n)$ есть расстояние Хемминга между блоками x^n и y^n . Будем предполагать, что входной блок x^n имеет равновероятное априорное распределение на E^n .

Выберем N натуральных чисел $Y_1, \dots, Y_N$ с $Y_1 + \dots + Y_N = 2^n$. Каждое Y_i есть мощность соответствующей части разбиения $\mathcal{Y}_i$. Рассмотрим теперь всевозможные разбиения множества $\mathcal{Y}^n$ на N множеств $(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N)$ с $|\mathcal{Y}_i| = Y_i$, $i = 1, \dots, N$. Другими словами, выберем сначала случайным образом Y_1 элементов из множества $\mathcal{Y}^n$ (это будет множество $\mathcal{Y}_1$). Затем из оставшейся части множества $\mathcal{Y}^n$ выберем случайным образом следующие Y_2 элементов (это будет множество $\mathcal{Y}_2$) и т.д.

В силу симметрии фишеровская информация $I(\theta, \{\mathcal{Y}_i\} | x^n)$, усредненная по всем разбиениям $\{\mathcal{Y}_i\}$, не зависит от входного блока x^n . Поэтому можно считать, что x^n есть нулевой блок $0 \in E^n$. В результате для усредненной величины $\mathbf{E}I(\theta, \{\mathcal{Y}_i\} | x^n)$ имеем из (13)

$$\mathbf{E}I(\theta, \{\mathcal{Y}_i\} | x^n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \mathbf{E} \frac{p'^2(\mathcal{Y}_i | 0, \theta)}{p(\mathcal{Y}_i | 0, \theta)} = \sum_{i=1}^N i(\theta, Y_i), \quad \sum_{i=1}^N Y_i = 2^n, \quad (18)$$

где

$$i(\theta, A) = \frac{1}{n} \mathbf{E} \frac{p'^2(\mathcal{A} | 0, \theta)}{p(\mathcal{A} | 0, \theta)}, \quad (19)$$

а последнее усреднение проводится по всем возможным равновероятным множествам $\mathcal{A}$ мощности A .

Исследуем теперь величину $i(\theta, A)$ из (19) и покажем, что она является почти линейной функцией по A при не слишком больших A . Для этого рассмотрим сначала случай $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Выберем некоторое $\theta < r < \frac{1}{2}$ и введем следующие классы $\{\mathcal{B}_i\}$ и $\{\mathcal{C}_i\}$ множеств $\mathcal{A} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_A\}$, где $\mathbf{y}_i \in E^n$, $i = 1, \dots, A$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_i &= \{\mathcal{A}: w(\mathbf{y}_i) \leq rn\}, \quad i = 1, \dots, A, \\ \mathcal{C}_i &= \left\{ \mathcal{A}: \min_{j \neq i} w(\mathbf{y}_j) > rn \right\}, \quad i = 1, \dots, A,\end{aligned}$$

где $w(\mathbf{y})$ — вес (т.е. число единиц) вектора $\mathbf{y}$.

Так как множества $\{\mathcal{B}_i \cap \mathcal{C}_i; i = 1, \dots, A\}$ не пересекаются между собой, то в силу симметрии имеем $(\mathbf{E}[\xi; \mathcal{A}] = \int_{\mathcal{A}} x dF_{\xi}(x))$

$$\mathbf{E} \frac{p'^2(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)} \geq A \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}_1 \right]. \quad (20)$$

Далее, имеем ($M = 2^n$, V_{rn} — мощность шара радиуса rn в E^n)

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}_1) = V_{rn} 2^{-n};$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathcal{C}_1 | \mathcal{B}_1) &= \binom{M - V_{rn}}{A - 1} / \binom{M - 1}{A - 1} = \prod_{i=1}^{V_{rn}-1} \left[1 - \frac{A - 1}{M - V_{rn} - i} \right] \\ &\geq \left[1 - \frac{A - 1}{M - 2V_{rn} + 1} \right]^{V_{rn}-1} \geq 1 - \frac{AV_{rn}}{2^n - 2V_{rn}}.\end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{p'(y^n | x^n, \theta)}{p(y^n | x^n, \theta)} &= \frac{d(x^n, y^n) - \theta n}{\theta(1 - \theta)}, \quad \frac{p'(\mathbf{y} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{0}, \theta)} = \frac{w(\mathbf{y}) - \theta n}{\theta(1 - \theta)}, \\ i(\theta, 1) &= \frac{1}{n} \mathbf{E} \frac{p'^2(\mathbf{y} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{0}, \theta)} = \frac{1}{n} \mathbf{E} \frac{(w(\mathbf{y}) - \theta n)^2}{\theta^2(1 - \theta)^2} p(\mathbf{y} | \mathbf{0}, \theta) \\ &= \frac{2^{-n}}{\theta(1 - \theta)}.\end{aligned}$$

Поэтому для $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_A\} \in \mathcal{C}_1$ справедлива оценка

$$0 \leq \sum_{i=2}^A p'(\mathbf{y}_i | \mathbf{0}, \theta) \leq \frac{n}{\theta} \sum_{i=2}^A p(\mathbf{y}_i | \mathbf{0}, \theta). \quad (22)$$

Кроме того, с помощью неравенства Чебышева имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=2}^A p(\mathbf{y}_i | \mathbf{0}, \theta) > z \right\} \leq (A - 1) 2^{-n} z^{-1}, \quad z > 0. \quad (23)$$

Введем множество элементарных событий $\mathcal{D}_z \subseteq \mathcal{C}_1$, $z > 0$:

$$\mathcal{D}_z = \left\{ \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_A\} \in \mathcal{C}_1: \sum_{i=2}^A p(\mathbf{y}_i | \mathbf{0}, \theta) \leq z \right\}.$$

Теперь для $\mathcal{A} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_A\} \in \mathcal{D}_z$ с помощью (22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{p'^2(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)} &\geq \frac{p'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta) - 2nz\theta^{-1}|p'(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)|}{p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta) + z} \\ &\geq \frac{p'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)} - \frac{zp'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)} - \frac{2nz|p'(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)|}{\theta p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}. \end{aligned}$$

Поэтому для правой части (20) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}_1 \right] &\geq \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}_z \right] \\ &\geq \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)} - \frac{zp'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)} - \frac{2nz|p'(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)|}{\theta p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}_z \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)} - \frac{zp'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)} - \frac{2nz|p'(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)|}{\theta p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \right] \mathbf{P}(\mathcal{D}_z | \mathcal{B}_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Оценим теперь первые три члена из правой части (24) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \right] &\geq \frac{n2^{-n}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n^2}{\theta^2} \mathbf{E} [p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta); \mathcal{B}_1^c] \\ &= \frac{n2^{-n}}{\theta(1-\theta)} - \frac{n^22^{-n}}{\theta^2} \mathbf{P}_\theta(\mathcal{B}_1^c), \\ \mathbf{E} \left[\frac{p'^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}{p^2(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \right] &\leq \frac{n^2 V_{rn} 2^{-n}}{\theta^2}, \\ \mathbf{E} \left[\frac{|p'(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)|}{p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{0}, \theta)}; \mathcal{B}_1 \right] &\leq \frac{n V_{rn} 2^{-n}}{\theta}. \end{aligned}$$

Далее, с помощью (21) и (23) для $r \leq \frac{1}{2}$ и $A \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{D}_z | \mathcal{B}_1) &\geq \mathbf{P}(\mathcal{C}_1 | \mathcal{B}_1) - \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=2}^A p(\mathbf{y}_i | \mathbf{0}, \theta) > z \right\} \\ &\geq 1 - A2^{-n} (2V_{rn} + z^{-1}). \end{aligned}$$

Поэтому из (20) и (24) получаем

$$\mathbf{E} \frac{p'^2(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)}{p(\mathcal{A} | \mathbf{0}, \theta)} \geq \frac{A n 2^{-n}}{\theta(1-\theta)} \left[1 - \frac{n \mathbf{P}_\theta(\mathcal{B}_1^c) + 3nzV_{rn}}{\theta} - \frac{A(2V_{rn} + z^{-1})}{2^n} \right]. \quad (25)$$

Нам осталось оценить величины $\mathbf{P}_\theta(\mathcal{B}_1^c)$ и V_{rn} в правой части (25) и выбрать параметры r, z . Сначала, используя стандартные оценки для

биномиальных коэффициентов [6], [7] и формулу Тейлора для функции $h(r)$ [1, п. 2.2], имеем

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\mathcal{B}_1^c) &= \sum_{i > rn} \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} \leq \frac{\theta^{rn+1} (1-\theta)^{n(1-r)} 2^{nh(r)}}{2(r-\theta)\sqrt{n\tau}} \\ &\leq \frac{\theta}{2(r-\theta)\sqrt{n\tau}} \exp\{-2n(r-\theta)^2\}, \quad \theta < r \leq \frac{1}{2}; \\ V_{rn} &\leq \frac{\sqrt{1-r}}{2(1-2r)\sqrt{rn}} 2^{nh(r)}, \quad r < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Полагая теперь $r = \theta + \sqrt{(\ln n)/n}$, $z = 1/(n^2 V_{rn})$, получаем

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\mathcal{B}_1^c) &\leq n^{-2} \sqrt{\frac{\theta}{\ln n}}, \quad \theta + \sqrt{\frac{\ln n}{n}} < \frac{1}{2}, \\ V_{rn} &\leq \frac{2^{nh(\theta)}}{2n^2(1-2\theta-2\sqrt{(\ln n)/n})\sqrt{n\theta}} \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\sqrt{n \ln n}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) и (26) вытекает следующий результат, представляющий также самостоятельный интерес.

Предложение 2. Для величины $i(\theta, A)$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n\sqrt{\theta \ln n}} - \frac{3}{n\theta} - \frac{A 2^{nh(\theta)-n}}{(1-2\theta-2\sqrt{(\ln n)/n})\sqrt{n\theta}} \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\sqrt{n \ln n}} \\ \leq \frac{\theta(1-\theta)2^n}{A} i(\theta, A) \leq 1, \quad \theta + \sqrt{\frac{\ln n}{n}} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вернемся теперь к соотношению (18). Пусть мощность Y_i каждой части разбиения $\mathcal{Y}_i$ удовлетворяет условию

$$Y_i \leq 2^{n-nh(\theta)} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sqrt{n \ln n}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (28)$$

Для таких разбиений $\{\mathcal{Y}_i\}$ в силу (27) равномерно по $\theta \in [a, b]$, $0 < a < b < \frac{1}{2}$, имеем

$$EI(\theta; \{\mathcal{Y}_i\}) = \frac{n}{\theta(1-\theta)} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Ясно, что для существования набора $\{Y_i, i = 1, \dots, N\}$, удовлетворяющего условию (28), достаточно, чтобы для общего числа N частей разбиения было выполнено условие

$$N \geq 2^{nh(\theta)} \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\sqrt{n \ln n}} \quad (30)$$

Заметим также, что для величины $I(\theta; R)$ выполняется свойство

$$I(\theta; R) = I(1-\theta; R), \quad 0 < \theta < 1, \quad R > 0.$$

В результате из (11) и (27)–(30) получаем

Следствие 2. Справедливо соотношение

$$I(\theta; R) = I(\theta) \quad \text{для } R \geq h(\theta), \quad 0 < \theta < 1; \quad (31)$$

и, следовательно,

$$R_{\text{crit}}(\theta) \leq h(\theta), \quad R_{\text{crit}}([a, b]) \leq \max_{x \in [a, b]} h(x). \quad (32)$$

3. Точка $\theta = \frac{1}{2}$. В случае точки $\theta = \frac{1}{2}$ вычисления, связанные с фишеровской информацией, значительно упрощаются, что позволяет найти точный вид функции $I(\theta = \frac{1}{2}; R)$ для всех $R > 0$.

Сначала из определения (13) имеем

$$I(\theta; \{\mathcal{Y}_i\}) = n^{-1} 2^{-n} \sum_{x^n \in E^n} \sum_{i=1}^N \frac{p'^2(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)}{p(\mathcal{Y}_i | x^n, \theta)} = \sum_{i=1}^N i(\theta, \mathcal{Y}_i), \quad (33)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} i(\theta, \mathcal{A}) &= \frac{2^{-n}}{n} \sum_{x^n \in E^n} \frac{p'^2(\mathcal{A} | x^n, \theta)}{p(\mathcal{A} | x^n, \theta)} \\ &= \frac{2^{-n}}{n\theta^2(1-\theta)^2} \sum_{x^n \in E^n} \frac{[\sum_{y^n \in \mathcal{A}} (d(x^n, y^n) - n\theta)p(y^n | x^n, \theta)]^2}{\sum_{y^n \in \mathcal{A}} p(y^n | x^n, \theta)}. \end{aligned} \quad (34)$$

При $\theta = \frac{1}{2}$ величина $i(\theta, \mathcal{A})$ из (34) принимает вид ($A = |\mathcal{A}|$)

$$\begin{aligned} i\left(\frac{1}{2}, \mathcal{A}\right) &= \frac{2^{4-2n}}{nA} \sum_{y_1^n \in \mathcal{A}} \sum_{y_2^n \in \mathcal{A}} \sum_{x^n \in E^n} \left(d(y_1^n, x^n) - \frac{n}{2}\right) \left(d(y_2^n, x^n) - \frac{n}{2}\right) \\ &= A 2^{2-n} \left\{ 1 - \frac{2}{nA^2} \sum_{y_1^n \in \mathcal{A}} \sum_{y_2^n \in \mathcal{A}} d(y_1^n, y_2^n) \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где использовались вычисления ($d = d(y_1^n, y_2^n)$)

$$\begin{aligned} &\sum_{x^n \in E^n} \left(d(y_1^n, x^n) - \frac{n}{2}\right) \left(d(y_2^n, x^n) - \frac{n}{2}\right) \\ &= \sum_{w=0}^d \sum_{v=0}^{n-d} \binom{d}{w} \binom{n-d}{v} \left(w + v - \frac{n}{2}\right) \left(d - w + v - \frac{n}{2}\right) \\ &= 2^{d-2} \sum_{v=0}^{n-d} \binom{n-d}{v} [4v^2 + 4v(d-n) + d(d-1) - n(2d-n)] \\ &= 2^{n-2} (n - 2d(y_1^n, y_2^n)). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти максимум в правой части (35) при заданной мощности A , необходимо найти минимум (по всем множествам $\mathcal{A}$)

выражения $2(nA^2)^{-1} \sum_{y_1^n \in \mathcal{A}} \sum_{y_2^n \in \mathcal{A}} d(y_1^n, y_2^n)$. Более того, нас будет интересно поведение этого минимума, когда $A \sim 2^{rn}$, $0 < r < \frac{1}{2}$. Известно [8], что асимптотически этот минимум достигается, когда множество $\mathcal{A}$ является шаром $B_{\alpha n} \subset E^n$ некоторого радиуса αn , $0 < r < \frac{1}{2}$. Так как $A \sim 2^{rn} \sim |B_{\alpha n}| \sim 2^{nh(\alpha)}$, $h(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$, то

$$h(\alpha) = r = \frac{\log A}{n}. \quad (36)$$

Для того чтобы вычислить сумму в правой части (35), представим себе, что все блоки $y^n \in \mathcal{A}$ записаны в виде матрицы размера $A \times n$ (т.е. каждая строка матрицы есть некоторый блок y^n). Пусть, далее, m_i , $i = 1, \dots, n$, есть число единиц в i -м столбце этой матрицы. Тогда имеем

$$\frac{2}{nA^2} \sum_{y_1^n \in \mathcal{A}} \sum_{y_2^n \in \mathcal{A}} d(y_1^n, y_2^n) = \frac{4}{nA^2} \sum_{i=1}^n m_i(A - m_i).$$

Для общего числа единиц в матрице имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{j=0}^{\alpha n} j \binom{n}{j} = \alpha n |B_{\alpha n}| (1 + o(1)).$$

Поэтому

$$m_1 = \dots = m_n = \alpha |B_{\alpha n}| (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, для шара $\mathcal{A}$ имеем

$$\frac{2}{nA^2} \sum_{y_1^n \in \mathcal{A}} \sum_{y_2^n \in \mathcal{A}} d(y_1^n, y_2^n) = 4\alpha(1-\alpha)(1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

В результате из (35) получаем

$$\max_{\mathcal{A}: |\mathcal{A}|=A} i\left(\frac{1}{2}, \mathcal{A}\right) = A 2^{2-n} (1-2\alpha)^2 (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (38)$$

где α определено в (36).

Для того чтобы с помощью формулы (38) получить необходимый результат для всего пространства E^n , нам потребуется следующее усиление леммы о «покрытиях» из [1].

Лемма. Пусть $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_X\} \subset E^n$ есть произвольное множество мощности $X \leq 2^{n-2}$ и $K = \lfloor (n+1)2^n/X \rfloor$. Тогда существуют K «сдвигов» $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K\} \subset E^n$ таких, что:

1) множества $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} + \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, K$, покрывают пространство E^n , причем любая точка $\mathbf{x} \in E^n$ покрыта не более $4n$ раз;

2) если $X \geq 6n^2$, то существует система непересекающихся множеств $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathcal{X}_i$, $i = 1, \dots, K$, покрывающих пространство E^n , с $|\mathcal{Y}_i| \geq X/(8n)$, $i = 1, \dots, K$.

Доказательство. Пусть K, m — произвольные натуральные числа. Чтобы получить первое утверждение леммы, выберем K сдвигов случайным независимым образом (с возвращениями). Тогда имеем

$$P_0 = \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{найдется непокрытая точка } x \in E^n, \text{ либо} \\ \text{найдется точка } x \in E^n, \text{ покрытая более чем } m \text{ раз} \end{array} \right\} \\ \leq 2^n \Pr \{ \text{точка } 0 \text{ не покрыта} \} \\ + 2^n \Pr \{ \text{точка } 0 \text{ покрыта более чем } m \text{ раз} \} = P_1 + P_2.$$

Для любого $K > (n+1) 2^n \ln 2/X$ получаем

$$P_1 = 2^n (1 - X 2^{-n})^K \leq \exp \{ -X K 2^{-n} + n \ln 2 \} < \frac{1}{2}.$$

Далее, используя известные оценки для биномиальных коэффициентов [7], имеем ($M = 2^n$)

$$\ln P_2 = \ln \left\{ M \sum_{i=m+1}^K \binom{K}{i} \left(\frac{X}{M} \right)^i \left(1 - \frac{X}{M} \right)^{K-i} \right\} \\ \leq \ln M + K h_e \left(\frac{m+1}{K} \right) + K \ln \left(1 - \frac{X}{M} \right) - (m+1) \ln \frac{M-X}{X} \\ \leq \ln M - \frac{KX}{M} + (m+1) \ln \frac{eKX}{(m+1)(M-X)},$$

где для функции $h_e(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$ использовалась оценка $h_e(x) \leq x \ln(e/x)$. Теперь для K , определенного в условии леммы, и $m = 4n$ получаем $P_2 \leq \frac{1}{2}$. В итоге для таких K, m имеем $P_0 < 1$, и поэтому существует набор сдвигов, удовлетворяющий первому утверждению леммы.

Чтобы доказать второе утверждение леммы, возьмем какую-либо точку $x \in E^n$. Она покрыта не более чем m множествами $\mathcal{X}_i$. Отнесем ее к одному из этих множеств случайным равновероятным образом. Проведем эту процедуру для всех точек $x \in E^n$. В результате мы получим систему непересекающихся множеств $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathcal{X}_i$, $i = 1, \dots, K$, покрывающих пространство E^n . Для нее при $2mN \leq X$ имеем

$$Q_0 = \Pr \{ \text{найдется множество } \mathcal{Y}_i \text{ с } |\mathcal{Y}_i| \leq N \} \\ \leq K \Pr \{ |\mathcal{Y}_1| \leq N \} \leq K \sum_{j=0}^N \binom{X}{j} m^{-j} \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{X-j} \\ \leq K \left(1 - \frac{1}{m} \right)^X (m-1)^{-N} \exp \left\{ X h_e \left(\frac{N}{X} \right) \right\} \\ < K \exp \left\{ N \ln \frac{eX}{(m-1)N} - \frac{X}{m} \right\} \leq K e^{-X/(2m)} < 1,$$

если $X \geq 6n^2$. Следовательно, существует набор сдвигов, удовлетворяющий второму утверждению леммы.

Вернемся теперь к соотношению (33), и пусть $\mathcal{A} = B_{\alpha n}(0)$ с $|\mathcal{A}| = A \simeq 2^{rn}$. В силу леммы существуют $N = (n+1)2^n/A \simeq n2^{n(1-r)}$ сдвигов $\{y_1, \dots, y_N\} \subset E^n$ таких, что шары $B_{\alpha n}(y_i) = \mathcal{A} + y_i$, $i = 1, \dots, N$, покрывают все пространство E^n . В силу второго утверждения леммы существуют непересекающиеся множества $\mathcal{Y}_i \subset B_{\alpha n}(y_i)$, $i = 1, \dots, N$, которые по-прежнему покрывают все пространство E^n , причем каждое множество $\mathcal{Y}_i$ имеет мощность $|\mathcal{Y}_i| \geq |B_{\alpha n}|/(8n)$.

Нам осталось показать, что соотношение (37) остается верным и для таких множеств $\{\mathcal{Y}_i\}$. Для этого заметим, что в шаре $B_{\alpha n}$ число упорядоченных пар (y_1^n, y_2^n) , для которых $|d(y_1^n, y_2^n) - 2\alpha(1-\alpha)n| > \sqrt{n \ln n}$, не превышает $|B_{\alpha n}|^2 n^{-3}$. Так как $\mathcal{Y}_i \subset B_{\alpha n}$ и общее число упорядоченных пар (y_1^n, y_2^n) в $\mathcal{Y}_i$ имеет порядок $|\mathcal{Y}_i|^2 n^{-2}$, то для «основной массы» этих пар выполняется соотношение $|d(y_1^n, y_2^n) - 2\alpha(1-\alpha)n| \leq \sqrt{n \ln n}$, откуда получаем

$$\frac{2}{nY_i^2} \sum_{y_1^n \in \mathcal{Y}_i} \sum_{y_2^n \in \mathcal{Y}_i} d(y_1^n, y_2^n) = 4\alpha(1-\alpha)(1+o(1)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (39)$$

$$i\left(\frac{1}{2}, \mathcal{Y}_i\right) = Y_i 2^{2-n} (1-2\alpha)^2 (1+o(1)), \quad i = 1, \dots, N, \quad n \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Так как $\sum_i Y_i = 2^n$, то из (33) и (40) следует

$$I\left(\frac{1}{2}; \{\mathcal{Y}_i\}\right) = 4(1-2\alpha)^2. \quad (41)$$

В итоге из (33)–(41) получаем

Предложение 3. Функция $I(\frac{1}{2}; R)$ определяется соотношением

$$I\left(\frac{1}{2}; R\right) = 4(1-2\alpha)^2, \quad 0 < R < 1, \quad (42)$$

где $h(\alpha) = 1 - R$. В частности, $R_{\text{crit}}(\frac{1}{2}) = 0$.

Для сравнения найдем также величину $i(\frac{1}{2}, A)$, представляющую собой усреднение величины $i(\frac{1}{2}, \mathcal{A})$ по всем случайно выбранным множествам $\mathcal{A}$ мощности A . При этом можно считать, что множество $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A} = \{y_1^n = 0, y_2^n, \dots, y_A^n\}$. Тогда имеем

$$A^{-2} \mathbf{E} \sum_{y_1^n \in \mathcal{A}} \sum_{y_2^n \in \mathcal{A}} d(y_1^n, y_2^n) = A^{-1} \mathbf{E} \sum_{y \in \mathcal{A}} w(y) = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right).$$

Поэтому из (35) получаем

$$i\left(\frac{1}{2}, A\right) = \mathbf{E} i\left(\frac{1}{2}, \mathcal{A}\right) = 2^{2-n} \left(1 - \frac{A-1}{2^n - 1}\right).$$

В результате из (33) для $0 \leq R < 1$ имеем

$$\mathbb{E} I\left(\frac{1}{2}; \{\mathcal{A}_i\}\right) = 2^{2-n}(N-1) = 2^{2-(1-R)n} (1 - 2^{-Rn}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Это означает, что при $\theta = \frac{1}{2}$ случайный выбор множеств $\{\mathcal{A}_i\}$ является очень плохим (получаемая фишеровская информация даже стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$). Можно высказать предположение, что случайный выбор множеств $\{\mathcal{A}_i\}$ дает асимптотически оптимальные результаты только при $R > R_{\text{crit}}(\theta)$. В случае $R < R_{\text{crit}}(\theta)$ оптимальное множество $\mathcal{A}_i$, видимо, представляет собой набор «хорошо разделенных» шаров определенного радиуса. В этом состоит некоторое отличие ситуации в этой задаче от традиционной ситуации в теории информации (где «средний» код всегда является достаточно хорошим).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурнашев М. В., Амары Ш., Хан Т. С. О некоторых задачах проверки гипотез с информационными ограничениями. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 4, с. 625–638.
2. Ahlswede R., Burnashev M. V. On minimax estimation in the presence of side information about remote data. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 1, p. 141–171.
3. Han T. S., Amari S. Parameter estimation with multiterminal data compression. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, v. 41, № 6, p. 1802–1833.
4. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
5. Le Cam L. Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. New York: Springer-Verlag, 1986, 742 p.
6. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965, 439 с.
7. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Советское радио, 1974, 720 с.
8. Ahlswede R., Althofer I. The asymptotic behavior of diameters in the average. — J. Combin. Theory, Ser. B, 1994, v. 61, № 2, p. 167–177.

Поступила в редакцию
22.X.1998