Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ч.-Х. Ли, Косые сверточные полугруппы и связанные с ними процессы с иммиграцией, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 247–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:05:17

© 2001 г.

ЛИ Ч.-Х.*

КОСЫЕ СВЕРТОЧНЫЕ ПОЛУГРУППЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОЦЕССЫ С ИММИГРАЦИЕЙ¹⁾

С помощью косых сверточных полугрупп описывается особый тип иммиграции, связанной с мерозначными ветвящимися процессами. Приводится характеристика общей неоднородной косой сверточной полугруппы в терминах входных вероятностных законов. Соответствующий процесс с иммиграцией строится путем суммирования мерозначных траекторий процесса Кузнецова, определенного правилом вхождения. Затем изучается поведение процесса Кузнецова, что дает представление о структуре траекторий процесса с иммиграцией. Некоторые известные результаты об избыточных мерах формулируются в терминах стационарных процессов с иммиграцией.

Ключевые слова и фразы: мерозначный ветвящийся процесс, суперпроцесс, процесс с иммиграцией, косая сверточная полугруппа, входной закон, правило вхождения, избыточная мера, мера Кузнецова.

1. Введение. Пусть E — лузинское топологическое пространство (т.е. гомеоморфизм борелевского подмножества компактного метрического пространства) с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(E)$. Пусть $B(E)$ обозначает множество ограниченных $\mathcal{B}(E)$ -измеримых функций на E , а $B(E)^+$ — подпространство $B(E)$, содержащее неотрицательные функции. Символом $M(E)$ мы обозначим пространство конечных мер на $(E, \mathcal{B}(E))$ с топологией слабой сходимости. Для $f \in B(E)$ и $\mu \in M(E)$ мы будем обозначать $\mu(f)$ интеграл $\int_E f d\mu$. Предположим, что $(P_t)_{t \geq 0}$ — переходная полугруппа правого борелевского процесса ξ с пространством состояний E , а $\phi(\cdot, \cdot)$ — механизм ветвления, задаваемый соотношением

$$\phi(x, z) = b(x)z + c(x)z^2 + \int_0^\infty (e^{-zu} - 1 + zu) m(x, du), \quad (1.1)$$

Zong-Hu Li. Skew convolution semi-groups and related immigration processes.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

*Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China; e-mail: lizh@math.carleton.ca

¹⁾ Работа выполнена при поддержке National Natural Science Foundation of China (№ 19361060).

$x \in E$, $z \geq 0$, где $b \in B(E)$, $c \in B(E)^+$ и $(u \wedge u^2)m(x, du)$ — ограниченное ядро, действующее из E в $(0, \infty)$. Тогда для любого $f \in B(E)^+$ эволюционное уравнение

$$V_t f(x) + \int_0^t ds \int_E \phi(y, V_s f(y)) P_{t-s}(x, dy) = P_t f(x), \quad (1.2)$$

$t \geq 0$, $x \in E$, имеет единственное решение $V_t f \in B(E)^+$, и существует марковская полугруппа $(Q_t)_{t \geq 0}$ на $M(E)$ такая, что

$$\int_{M(E)} e^{-\nu(f)} Q_t(\mu, d\nu) = \exp \{ -\mu(V_t f) \} \quad (1.3)$$

для всех $t \geq 0$, $\mu \in M(E)$ и $f \in B(E)^+$. Марковский процесс X с переходной полугруппой $(Q_t)_{t \geq 0}$ называется *суперпроцессом Доусона-Ватанабе* с параметрами (ξ, ϕ) . При наших предположениях процесс X имеет правую борелевскую реализацию; см. [11] и [12]. (ξ, ϕ) -суперпроцесс является математической моделью эволюции популяции в некоторой области, см., например, [3] и [4]. При изучении ситуации, в которой имеются дополнительные источники, из которых происходит иммиграция индивидуумов в рассматриваемую область, необходимо ввести ветвящиеся процессы с иммиграцией. Такой тип модифицированных процессов хорошо известен по литературе о ветвящихся процессах, см., например, [1], [5], [8], [21], [24] и [32].

В [25] класс мерозначных процессов с иммиграцией описан следующим образом. Пусть $(N_t)_{t \geq 0}$ — семейство вероятностных мер на $M(E)$. Назовем $(N_t)_{t \geq 0}$ *косой сверточной полугруппой*, ассоциированной с X или $(Q_t)_{t \geq 0}$, если

$$N_{r+t} = (N_r Q_t) * N_t, \quad r, t \geq 0, \quad (1.4)$$

где «*» обозначает операцию свертки. Соотношение (1.4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$Q_t^N(\mu, \cdot) := Q_t(\mu, \cdot) * N_t, \quad t \geq 0, \mu \in M(E), \quad (1.5)$$

определяет марковскую полугруппу $(Q_t^N)_{t \geq 0}$ на $M(E)$. Марковский процесс называется *процессом с иммиграцией*, ассоциированным с X , если он имеет переходную полугруппу $(Q_t^N)_{t \geq 0}$. Интуитивный смысл процесса с иммиграцией ясен из (1.5), а именно, $Q_t(\mu, \cdot)$ — это распределение потомков тех индивидуумов, распределение которых в нулевой момент времени равно $\mu \in M(E)$, а N_t — распределение потомков индивидуумов, иммигрировавших в E за время $(0, t]$. Очевидно, (1.5) дает общее описание иммиграции, независимой от «внутреннего» населения.

Большая часть теории суперпроцессов Доусона-Ватанабе переносится на связанные с ними процессы с иммиграцией и может быть построена с помощью методов, очень близких к тем, которые использовались в [3] и [4]. Однако интересно, что, как видно из (1.4) и (1.5),

процессы с иммиграцией обладают многими дополнительными структурами. Заметим, что соотношение (1.5) аналогично построению переходной полугруппы Леви по *обычной* сверточной полугруппе. Хорошо известно, что сверточная полугруппа на евклидовом пространстве однозначно определяется безгранично делимой вероятностной мерой. Как показано в [25], косую сверточную полугруппу можно охарактеризовать в терминах безгранично делимого входного закона. Таким образом, процессы с иммиграцией могут рассматриваться как обобщенные формы хорошо известных процессов Леви. Другими примерами процессов с иммиграцией являются квадраты бесселевых диффузий и радиальные составляющие диффузий Орнштейна–Уленбека, см. [21] и [33]. Приведенное выше описание включает также новые классы процессов, ранее не рассматривавшиеся, см. [26], [27] и [28].

В моделях иммиграции, изучавшихся ранее, обычно предполагалось, что иммигранты прибывают в E в соответствии со случайной мерой на $\mathbf{R} \times E$. При описании в терминах косой сверточной полугруппы сценарии не совсем ясны. Наличие этого слабого места и стало мотивировкой данной работы. Главная цель данной статьи — дать интерпретацию косых сверточных полугрупп с помощью построения мерозначных процессов с иммиграцией и анализа их траекторий. Вначале мы доказываем, что общая неоднородная косая сверточная полугруппа может быть разложена на три компоненты, включающие, соответственно, счетное семейство входных законов, счетное семейство замкнутых входных законов и континуальное семейство безгранично делимых вероятностных законов с рассеянной мерой на пространстве индексов. Затем мы приводим конструкцию определенных выше процессов с иммиграцией с помощью отбора мерозначных траекторий со случайными моментами рождения и гибели. Наша конструкция основана на наблюдении, что любая косая сверточная полугруппа определяется непрерывной возрастающей мерозначной траекторией $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ и правилом вхождения $(G_t)_{t \geq 0}$. Из этого факта вытекает естественное разложение иммиграции на две части — на детерминированную часть, определяемую траекторией $(\gamma_t)_{t \geq 0}$, и случайную часть, определяемую правилом $(G_t)_{t \geq 0}$. Вторая часть обычно является неоднородным процессом с иммиграцией и может быть построена путем суммирования траекторий $\{w_t: \alpha < t < \beta\}$ в ассоциированном процессе Кузнецова, см. [22]. С помощью анализа асимптотического поведения траекторий $\{w_t: \alpha < t < \beta\}$ в окрестности времени рождения $\alpha = \alpha(w)$ мы показываем, что почти все эти траектории начинают распространяться в расширении E_D^T исходного пространства, включая те, точки роста которых составляют множество меры нуль в этом пространстве. В сочетании с нашей конструкцией процесса с иммиграцией это дает полное описание изучаемого явления. В некоторых особых случаях безгранично делимый входной закон для (ξ, ϕ) -суперпроцесса соот-

ветствует σ -конечному входному закону, и ассоциированный процесс с иммиграцией может быть построен с помощью однородного траекторно-значного пуассоновского случайного процесса, характеристическая мера которого является марковской мерой, определяемой входным законом. Эта конструкция хорошо зарекомендовала себя при изучении процессов с иммиграцией, см., например, [26], [29] и [32]. В качестве дополнительных применений наших построений мы приводим формулировки некоторых хорошо известных результатов об избыточных мерах в терминах стационарных процессов с иммиграцией.

Статья устроена следующим образом. Пункт 2 содержит предварительные сведения. В п. 3 мы доказываем теорему о разложении для неоднородных косых сверточных полугрупп. Конструкция процессов с иммиграцией с использованием процессов Кузнецова приведена в п. 4. «Почти наверное»-поведение процессов Кузнецова изучается в п. 5. В п. 6 мы обсуждаем стационарные процессы с иммиграцией, определяемые избыточными мерами.

2. Предварительные сведения. Напомним, что $M(E)$ — это пространство конечных борелевских мер на лузинском топологическом пространстве E . Хорошо известно, что пространство $M(E)$, снабженное топологией слабой сходимости, также является лузинским пространством. Пусть $M(E)^\circ = M(E) \setminus \{0\}$, где 0 обозначает нулевую меру. Для вероятностной меры F на $M(E)$ зададим ее функционал Лапласа соотношением

$$L_F(f) := \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} F(d\nu), \quad f \in B(E)^+, \quad (2.1)$$

которое однозначно определяет F . Хорошо известно, что F безгранично делима тогда и только тогда, когда

$$L_F(f) = \exp \left\{ -\eta(f) - \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) H(d\nu) \right\}, \quad (2.2)$$

$f \in B(E)^+$, где $\eta \in M(E)$ и $[1 \wedge \nu(E)]H(d\nu)$ является конечной мерой на $M(E)^\circ$ (см., например, [20]). Мы пишем $F = I(\eta, H)$, если F определяется соотношением (2.2).

Предположим, что $X = (W, \mathcal{G}, \mathcal{G}_{r,t}, X_t, \mathbf{Q}_{r,\mu})$ — марковский процесс в $M(E)$ с переходной полугруппой $(Q_{r,t})_{r \leq t}$. Пусть

$$V_{r,t}f(x) := -\ln \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} Q_{r,t}(\delta_x, d\nu), \quad (2.3)$$

$r \leq t$, $x \in E$, $f \in B(E)^+$, где δ_x обозначает единичную массу, сосредоточенную в точке $x \in E$. В данной статье мы всегда считаем, что для любых $r \leq t$ и $f \in B(E)^+$ сужение функции $V_{s,t}f(x)$ от (s, x) на $[r, t] \times E$ ограничено и измеримо. Мы также предполагаем, что $V_{r,t}f(x)$ непрерывно справа по $t \geq r$ при $f \in C(E)^+$, т.е. при f , являющихся непрерывными

функциями в $B(E)^+$. Процесс X называется *мерозначным ветвящимся процессом* (МВ-процессом), если его переходная полугруппа удовлетворяет соотношению

$$\int_{M(E)} e^{-\nu(f)} Q_{r,t}(\mu, d\nu) = \exp \{ -\mu(V_{r,t}f) \}, \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+. \quad (2.4)$$

При этом предположении мера $Q_{r,t}(\mu, \cdot)$ является безгранично делимой и $(V_{r,t})_{r \leq t}$ образуют семейство операторов на $B(E)^+$, удовлетворяющих условию $V_{r,s}V_{s,t} = V_{r,t}$ для всех $r \leq s \leq t$. Это семейство называется *полугруппой кумулянтов* процесса X (см., например, [34] и [35]). (ξ, ϕ) -суперпроцесс, определенный во введении, является частным случаем МВ-процесса.

Предположим, что $(Q_{r,t})_{r \leq t}$ — переходная полугруппа МВ-процесса и $(N_{r,t})_{r \leq t}$ — семейство вероятностных мер на $M(E)$. Назовем $(N_{r,t})_{r \leq t}$ *косой сверточной полугруппой* (SC-полугруппой), ассоциированной с $(Q_{r,t})_{r \leq t}$, если

$$N_{r,t} = (N_{r,s}Q_{s,t}) * N_{s,t}, \quad r \leq s \leq t. \quad (2.5)$$

Теорема 2.1. *Соотношение (2.5) имеет место тогда и только тогда, когда*

$$Q_{r,t}^N(\mu, \cdot) := Q_{r,t}(\mu, \cdot) * N_{r,t}, \quad r \leq t, \quad \mu \in M(E), \quad (2.6)$$

определяет марковскую полугруппу $(Q_{r,t}^N)_{r \leq t}$ на $M(E)$.

Доказательство. Пусть $(Q_{r,t})_{r \leq t}$ и $(Q_{r,t}^N)_{r \leq t}$ заданы соотношениями (2.4) и (2.6) соответственно. Легко проверить, что (2.5) эквивалентно уравнению Чепмена–Колмогорова

$$Q_{r,t}^N(\mu, \cdot) = \int_{M(E)} Q_{r,s}^N(\mu, d\nu) Q_{s,t}^N(\nu, \cdot), \quad r \leq s \leq t, \quad \mu \in M(E),$$

откуда вытекает требуемое утверждение.

Пусть T — интервал и $(N_{r,t})_{r \leq t}$ — SC-полугруппа, ассоциированная с $(Q_{r,t})_{r \leq t}$. Если $\{Y: t \in T\}$ — марковский процесс с переходной полугруппой $(Q_{r,t}^N)_{r \leq t}$, определяемой соотношением (2.6), то мы будем называть его *процессом с иммиграцией*, ассоциированным с X . (Конечно, SC-полугруппы и процессы с иммиграцией могут также быть определены для некоторых более общих классов марковских процессов, фазовые пространства которых обладают полугрупповой структурой.)

Известно, что на E можно задать метрику ρ так, что борелевская σ -алгебра на E , порожденная ρ , будет совпадать с исходной борелевской σ -алгеброй, см., например, [2, с. 275]. Для множества $M(E)$, наделенного топологией слабой сходимости на (E, ρ) , мы будем использовать обозначение $M(E_\rho)$. Тогда $M(E_\rho)$ локально компактно и метризуемо. Пусть $D(E_\rho)^+$ — счетное всюду плотное подмножество пространства *строго положительных* непрерывных функций на (E, ρ) .

Лемма 2.1. Пусть $\{F_n: n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность вероятностных мер на $M(E)$. Если существует предел

$$L(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} L_{F_n}(f), \quad f \in D(E_\varrho)^+, \quad (2.7)$$

и $L(f) \rightarrow 1$ при $f \rightarrow 0$, то существует вероятностная мера F на $M(E)$ такая, что $L_F(f) = L(f)$ для всех $f \in D(E_\varrho)^+$. При этом если каждая F_n безгранично делима, то F также обладает этим свойством.

Доказательство. Пусть $\overline{M}(E_\varrho) := M(E_\varrho) \cup \{\infty\}$ обозначает одноточечное компактное расширение множества $M(E_\varrho)$. Тогда последовательность $\{F_n\}$, рассматриваемая как последовательность вероятностных мер на $\overline{M}(E_\varrho)$, относительно компактна. Пусть $\{F_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{F_n\}$, сходящаяся к некоторой вероятностной мере F на $\overline{M}(E_\varrho)$. В силу (2.7) и ограниченной сходимости мы имеем

$$L(f) = \int_{\overline{M}(E_\varrho)} e^{-\nu(f)} F(d\nu), \quad f \in D(E_\varrho)^+,$$

где подынтегральное выражение доопределяется по непрерывности нулем в ∞ . Так как $L(f) \rightarrow 1$ при $f \rightarrow 0$, то $F(M(E_\varrho)) = 1$, и, следовательно, мы получаем первое утверждение. Второе утверждение доказываем непосредственным образом.

Для любого $\alpha \in [-\infty, \infty)$ семейство σ -конечных мер $(K_t)_{t > \alpha}$ на $M(E)$ называется *входным законом* (в α) для полугруппы $(Q_t)_{r \leq t}$, если $K_r Q_{r,t} = K_t$ для всех $t > r > \alpha$. Оно называется *входным вероятностным законом*, если каждая K_t является вероятностной мерой. Входной закон $(K_t)_{t > \alpha}$ называется *замыкаемым*, если существует σ -конечная мера K_α на $M(E)$ такая, что $K_t = K_\alpha Q_{\alpha,t}$ для всех $t > \alpha$. В этом случае $(K_t)_{t > \alpha}$ называется *замкнутым входным законом* для $(Q_{r,t})_{r \leq t}$. Входной закон $(K_t)_{t > \alpha}$ называется *минимальным*, если каждый входной закон, доминируемый законом $(K_t)_{t > \alpha}$, пропорционален ему. Эти определения применимы к общим переходным полугруппам с очевидными модификациями.

Пример 2.1. Пусть $T_1 \subset \mathbf{R}$ — счетное множество и $\{(K_{s,t})_{t > s}: s \in T_1\}$ — семейство входных вероятностных законов для $(Q_{r,t})_{r \leq t}$. Предположим, что

$$-\sum_{s \in [r,t) \cap T_1} \ln L_{K_{s,t}}(1) < \infty$$

для всех $r \leq t \in \mathbf{R}$. В силу леммы 2.1 мы можем заметить, что соотношение

$$\ln L_{N_{r,t}}(f) = \sum_{s \in [r,t) \cap T_1} \ln L_{K_{s,t}}(f), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+, \quad (2.8)$$

определяет вероятностную меру $N_{r,t}$ на $M(E)$. Несложно проверить, что $(N_{r,t})_{r \leq t}$ образует SC-полугруппу. Предположим, что для каждого $s \in T_1$ задан марковский процесс $(X_{s,t})_{t > s}$ с переходной полугруппой

$(Q_{r,t})_{r \leq t}$ и одномерными распределениями $(K_{s,t})_{t > s}$ и что элементы семейства $\{(X_{s,t})_{t > s} : s \in T_1\}$ независимы. Тогда для любого $t \geq \alpha$ случайная мера $Y_t := \sum_{s \in [\alpha, t) \cap T_1} X_{s,t}$ почти наверное корректно определена и $\{Y_t : t \geq \alpha\}$ — процесс с иммиграцией, соответствующий SC-полугруппе, задаваемой соотношением (2.8).

Пример 2.2. Пусть $T_2 \subset \mathbf{R}$ — счетное множество и $\{(K_{s,t})_{t \geq s} : s \in T_2\}$ — семейство замкнутых входных вероятностных законов для $(Q_{r,t})_{r \leq t}$ таких, что $-\sum_{s \in (r,t) \cap T_2} \ln L_{K_{s,t}}(1) < \infty$ для всех $r \leq t \in \mathbf{R}$. Тогда можно определить SC-полугруппу $(N_{r,t})_{r \leq t}$ с помощью соотношения

$$\ln L_{N_{r,t}}(f) = \sum_{s \in (r,t] \cap T_2} \ln L_{K_{s,t}}(f), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+. \quad (2.9)$$

Соответствующий процесс с иммиграцией может быть построен так же, как в предыдущем примере.

Пример 2.3. Предположим, что $(N_{r,t})_{r \leq t}$ — семейство вероятностных мер на $M(E)$, задаваемое соотношением

$$\ln L_{N_{r,t}}(f) = \int_r^t \ln L_{K_{s,t}}(f) \zeta(ds), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+, \quad (2.10)$$

где $\zeta(ds)$ — радонова мера на $\mathbf{R}$ и $\{(K_{s,t})_{t > s} : s \in \mathbf{R}\}$ — семейство безгранично делимых входных вероятностных законов для $(Q_{r,t})_{r \leq t}$. Тогда $(N_{r,t})_{r \leq t}$ является SC-полугруппой.

Пример 2.4. Предположим, что имеется вероятностное пространство, на котором заданы два процесса $\{X_t^1 : t \geq 0\}$ и $\{X_t^2 : t \geq 0\}$, где $\{X_t^1 : t \geq 0\}$ — суперпроцесс с параметрами (ξ_1, ϕ_1) , а $\{X_t^2 : t \geq 0\}$ при условии $\{X_t^1 : t \geq 0\}$ является процессом с иммиграцией, соответствующим SC-полугруппе, задаваемой соотношением

$$\ln L_{N_{r,t}}(f) = - \int_r^t X_s(V_{t-s}^2 f) ds, \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+,$$

где $(V_t^2)_{t \geq 0}$ определяется соотношением (1.2) с параметрами (ξ_2, ϕ_2) . Тогда $\{(X_t^1, X_t^2) : t \geq 0\}$ также является марковским процессом. Интуитивно ясно, что он описывает эволюцию популяции с двумя типами «частиц» на E , при которой частицы второго типа могут порождаться частицами обоих типов, см. [18]. Более общие формы суперпроцессов с несколькими типами частиц изучались в [16], [17], [23] и др.

3. Разложение косых сверточных полугрупп. В этом пункте мы докажем теорему о разложении для неоднородной SC-полугруппы, которая используется в конструкции однородного процесса с иммиграцией. Рассмотрим переходную полугруппу $(Q_{r,t})_{r \leq t}$ МВ-процесса, определенного в предыдущем пункте.

Теорема 3.1. Семейство вероятностных мер $(N_{r,t})_{r \leq t}$ на $M(E)$ образует SC-полугруппу, ассоциированную с $(Q_{r,t})_{r \leq t}$, тогда и только

тогда, когда

$$\ln L_{N_{r,t}}(f) = \sum_{s \in [r,t] \cap T_1} \ln L_{K_{s,t}^1}(f) + \sum_{s \in (r,t] \cap T_2} \ln L_{K_{s,t}^2}(f) + \int_r^t \ln L_{K_{s,t}^3}(f) \zeta(ds), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+, \quad (3.1)$$

где $T_1, T_2 \subset \mathbf{R}$ — счетные множества, $\zeta(ds)$ — рассеянная радонова мера на $\mathbf{R}$, $\{(K_{s,t}^1)_{t \geq s}: s \in T_1\}$ — семейство входных вероятностных законов, $\{(K_{s,t}^2)_{t \geq s}: s \in T_2\}$ — семейство замкнутых входных вероятностных законов, а $\{(K_{s,t}^3)_{t \geq s}: s \in \mathbf{R}\}$ — семейство безгранично делимых входных вероятностных законов для $(Q_{r,t})_{r \leq t}$.

В принципе, входные законы могут быть получены путем применения леммы 2.1. Доказательство довольно утомительно, поскольку мы не предполагаем наличия феллеровского свойства и класс $D(E_\varrho)^+$ не сохраняется полугруппой кумулянтов $(V_{r,t})_{r \leq t}$. Разобьем доказательство на несколько лемм. Предположим, что $(N_{r,t})_{r \leq t}$ — SC-полугруппа, ассоциированная с $(Q_{r,t})_{r \leq t}$, и пусть

$$J_{r,t}(f) = -\ln \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} N_{r,t}(d\nu), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+. \quad (3.2)$$

Тогда соотношение (2.5) эквивалентно соотношению

$$J_{r,t}(f) = J_{r,s}(V_{s,t}f) + J_{s,t}(f), \quad r \leq s \leq t, \quad f \in B(E)^+. \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что $J_{r,t}(f)$ — невозрастающая функция от $r \leq t$ и $J_{t,t}(f) = 0$. Тогда существует радонова мера $G_t(f, \cdot)$ на $(-\infty, t]$ такая, что $G_t(f, \{t\}) = \lim_{r \uparrow t} J_{r,t}(f)$ и при $r \leq s < t$.

$$G_t(f, (r, s]) = \lim_{v \downarrow s} \lim_{u \downarrow r} [J_{u,t}(f) - J_{v,t}(f)] = \lim_{v \downarrow s} \lim_{u \downarrow r} J_{u,v}(V_{v,t}f). \quad (3.4)$$

Лемма 3.1. (i) Если $f, g \in B(E)^+$ и $0 \leq g \leq cf$ с некоторой константой $c \geq 1$, то $G_t(g, \cdot) \leq c G_t(f, \cdot)$.

(ii) Для $t \leq u$ и $f \in B(E)^+$ имеет место соотношение $G_u(f, ds) = G_t(V_{t,u}f, ds)$ на $(-\infty, r)$.

(iii) Для $t \leq u$ и $f \in B(E)^+$ имеет место соотношение $G_u(f, ds) \ll G_t(1, ds)$ на $(-\infty, t)$.

Доказательство. При $r \leq s < t \leq u$ воспользуемся (2.4), (3.2) и неравенством Иенсена, чтобы убедиться, что

$$\begin{aligned} G_t(g, (r, s]) &= \lim_{v \downarrow s} \lim_{w \downarrow r} J_{w,v}(V_{v,t}g) \leq \lim_{v \downarrow s} \lim_{w \downarrow r} J_{w,v}(V_{v,t}(cf)) \\ &\leq c \lim_{v \downarrow s} \lim_{w \downarrow r} J_{w,v}(V_{v,t}f) = c G_t(f, (r, s]). \end{aligned}$$

Аналогично, мы имеем $G_t(g, \{t\}) \leq c G_t(f, \{t\})$. Тем самым, п. (i) доказан. Пусть $r \leq s < t \leq u$. В силу (3.4) и полугруппового свойства $(V_{r,t})_{r \leq t}$ мы имеем

$$G_u(f, (r, s]) = \lim_{v \downarrow s} \lim_{w \downarrow r} J_{w,v}(V_{v,t}V_{t,u}f) = G_t(V_{t,u}f, (r, s]),$$

откуда вытекает (ii). Комбинируя (i) и (ii), получаем

$$G_u(f, (r, s]) = G_t(V_{t,u}f, (r, s]) \leq (\|V_{t,u}f\| + 1) G_t(1, (r, s]),$$

откуда вытекает (iii).

Ясно, что имеет место единственное разложение

$$J_{r,t}(f) = J_{r,t}^1(f) + J_{r,t}^2(f) + J_{r,t}^3(f), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+, \quad (3.5)$$

где $J_{r,t}^1(f)$ — непрерывная слева невозрастающая ступенчатая функция, $J_{r,t}^2(f)$ — непрерывная справа невозрастающая ступенчатая функция и $J_{r,t}^3(f)$ — непрерывная невозрастающая функция от $r \leq t$, причем $J_{t,t}^i(f) = 0$ для $i = 1, 2, 3$. В силу единственности, $(J_{r,t}^i)_{r \leq t}$ также удовлетворяет соотношению (3.3). Применяя лемму 2.1, мы можем получить

$$N_{r,t} = N_{r,t}^1 * N_{r,t}^2 * N_{r,t}^3, \quad r \leq t, \quad (3.6)$$

где $(N_{r,t}^i)_{r \leq t}$ — SC-полугруппа, соответствующая функционалу $(J_{r,t}^i)_{r \leq t}$. Заметим также, что $J_{s,t}^1(f)$ и $J_{s,t}^2(f)$ задают, соответственно, атомические меры $G_t^1(f, \cdot)$ и $G_t^2(f, \cdot)$ на $(-\infty, t]$, а $J_{s,t}^3(f)$ задает рассеянную меру $G_t^3(f, \cdot)$ на $(-\infty, t]$.

Лемма 3.2. *Существуют счетные множества $T_1, T_2 \subset \mathbf{R}$, входные вероятностные законы $\{(K_{r,t}^1)_{t > r} : r \in T_1\}$ и замкнутые входные вероятностные законы $\{(K_{r,t}^2)_{t \geq r} : r \in T_2\}$ такие, что*

$$J_{r,t}^1(f) = - \sum_{s \in [r,t) \cap T_1} \ln L_{K_{s,t}^1}(f), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+, \quad (3.7)$$

$$J_{r,t}^2(f) = - \sum_{s \in (r,t] \cap T_2} \ln L_{K_{s,t}^2}(f), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+. \quad (3.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку рассуждения аналогичны, мы приведем лишь доказательство (3.8). Напомним, что $J_{s,t}^2(f)$ непрерывна справа по $s \leq t$. Следовательно,

$$G_t^2(f, \{s\}) = \downarrow \lim_{r \uparrow s} [J_{r,t}^2(f) - J_{s,t}^2(f)] = \downarrow \lim_{r \uparrow s} J_{r,s}^2(V_{s,t}f), \quad (3.9)$$

$f \in B(E)^+$. Таким образом,

$$\exp \{ - G_t^2(f, \{s\}) \} = \uparrow \lim_{r \uparrow s} \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} N_{r,s}^2 Q_{s,t}(d\nu), \quad f \in B(E)^+.$$

В силу леммы 2.1 мы замечаем, что

$$\exp \{ - G_t^2(f, \{s\}) \} = \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} K_{s,t}^2(d\nu), \quad f \in D(E_\varrho)^+, \quad (3.10)$$

для вероятностной меры $K_{s,t}^2$ на $M(E)$. Пусть $Q = \{u_i : i = 1, 2, \dots\}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathbf{R}$, и пусть T_2 — множество атомов мер $\{G_{u_i}^2(1, \cdot) : i = 1, 2, \dots\}$. В силу (3.10) и леммы 3.1 мы получаем

$$\ln L_{N_{r,t}^2}(f) = - G_t^2(f, (r, t]) = \ln L_{K_{t,t}^2}(f) + \sum_{s \in (r,t) \cap T_2} \ln L_{K_{s,t}^2}(f), \quad r \leq t,$$

сначала для $f \in D(E_0)^+$, а затем для всех $f \in B(E)^+$. В частности, (3.10) также имеет место для $f \in B(E)^+$. Но из (3.9) вытекает, что $G_t^2(f, \{s\}) = G_s^2(V_{s,t}f, \{s\})$. Тогда $K_{s,s}Q_{s,t} = K_{s,t}$ при $s \leq t$, т.е. $(K_{s,t})_{t \geq s}$ образует замкнутый входной закон. Если $-\ln L_{K_{t,t}^2}(f) > 0$, то $-\ln L_{K_{t,t}^2}(1) > 0$. В силу непрерывности $V_{t,u}1$ по $u \geq t$ мы имеем

$$G_u^2(1, \{t\}) = -\ln L_{K_{t,u}^2}(1) = -\ln L_{K_{t,t}^2}(V_{t,u}1) > 0$$

для некоторого $u \in Q$. Тогда $t \in Q$, и, следовательно, мы получаем (3.8).

Лемма 3.3. *Существует рассеянная радонова мера $\zeta(ds)$ на $\mathbf{R}$ такая, что $G_t^3(f, ds) \ll \zeta(ds)$ для всех $t \in \mathbf{R}$ и $f \in B(E)^+$.*

Доказательство. Пусть $Q = \{u_i: i = 1, 2, \dots\}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathbf{R}$. Выберем $a_i > 0$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} a_i G_{u_i}^3(1, (u_i - 1, u_i]) < \infty$. Мы можем определить рассеянную радонову (на самом деле конечную) меру ζ на $\mathbf{R}$ с помощью соотношения

$$\zeta(ds) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{(u_i-1, u_i]}(s) G_{u_i}^3(1, ds), \quad s \in \mathbf{R}. \quad (3.11)$$

Если $G_t^3(f, B) > 0$ для борелевского множества $B \subset (-\infty, t]$, то $G_t^3(f, (u_i - 1, u_i) \cap B) > 0$ для некоторого $u_i \in (-\infty, t) \cap Q$. Поэтому из леммы 3.1 вытекает, что $G_{u_i}^3(1, (u_i - 1, u_i) \cap B) > 0$, и, следовательно, $\zeta(B) > 0$.

Лемма 3.4. *Производная Радона–Никодима $G_t^3(f, ds)/\zeta(ds)$ имеет версию $D_{s,t}(f)$ с представлением*

$$D_{s,t}(f) = -\ln L_{F_{s,t}}(f), \quad s < t, \quad f \in B(E)^+, \quad (3.12)$$

где $F_{s,t}$ — безгранично делимая вероятностная мера на $M(E)$.

Доказательство. Пусть $r < t$. Чтобы избежать тривиальных случаев, предположим, что $\zeta(r, t] > 0$. Возьмем возрастающую последовательность упорядоченных множеств $\pi_n = \{s_0^n, s_1^n, \dots, s_{m(n)}^n\}$, такую, что $r = s_0^n < s_0^n < \dots < s_{m(n)}^n = t$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, где $\delta_n = \max\{s_i^n - s_{i-1}^n: 1 \leq i \leq m(n)\}$. Пусть $\mathcal{F}_n$ — σ -алгебра на $(r, t]$, порожденная интервалами $(s_0^n, s_1^n], \dots, (s_{m(n)-1}^n, s_{m(n)}^n]$, и пусть

$$M_n(f)(s) = \begin{cases} \frac{G_t^3(f, (s_{i-1}^n, s_i^n])}{\zeta(s_{i-1}^n, s_i^n]}, & \text{если } s_{i-1}^n < s \leq s_i^n \text{ и } \zeta(s_{i-1}^n, s_i^n] > 0, \\ 0, & \text{если } s_{i-1}^n < s \leq s_i^n \text{ и } \zeta(s_{i-1}^n, s_i^n] = 0. \end{cases}$$

Тогда относительно вероятностной меры $(\zeta(r, t])^{-1}\zeta$ последовательность $\{M_n(f), \mathcal{F}_n: n \geq 1\}$ является мартингалом, замкнутым справа производной Радона–Никодима $G_t^3(f, ds)/\zeta(ds)$. Но так как $\{\mathcal{F}_n: n \geq 1\}$ порождает борелевскую σ -алгебру на $(r, t]$, то $M_n(f)(s)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к

$G_t^3(f, ds)/\zeta(ds)$ для ζ -почти всех $s \in (r, t]$ по теореме о сходимости мартингалов. Тогда можно взять множество $A_t \subset (-\infty, t]$ полной ζ -меры такое, что для любого $s \in A_t$ существуют последовательности $r_k \uparrow s$ и $s_k \downarrow s$, удовлетворяющие

$$\frac{G_t^3(f, ds)}{\zeta(ds)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G_t^3(f, (r_k, s_k])}{\zeta(r_k, s_k]}, \quad f \in D(E_\varrho)^+.$$

Ясно, что $G_t^3(f, (r_k, s_k]) = G_{s_k}(V_{s_k, t}f, (r_k, s_k])$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{G_t^3(f, ds)}{\zeta(ds)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp\{-G_{s_k}(V_{s_k, t}f, (r_k, s_k])\}}{\zeta(r_k, s_k]} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta(r_k, s_k]} \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) N_{r_k, s_k} Q_{s_k, t}(d\nu) \end{aligned} \quad (3.13)$$

для $f \in D(E_\varrho)^+$. С другой стороны, поскольку

$$\int_r^t \frac{G_t^3(f, ds)}{\zeta(ds)} \zeta(ds) = -\ln \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} N_{r, t}^3(d\nu),$$

выбирая меньшее множество $A_t \subset (-\infty, t]$ полной ζ -меры, можно получить, что $G_t^3(f, ds)/\zeta(ds) \downarrow 0$ при $f \downarrow 0$ для всех $s \in A_t$. В силу (3.13) и леммы 2.1 существуют безгранично делимые вероятностные меры $\{F_{s, t}: s \in A_t\}$ такие, что

$$\frac{G_t^3(f, ds)}{\zeta(ds)} = -\ln L_{F_{s, t}}(f), \quad s \in A_t, \quad f \in D(E_\varrho)^+.$$

Полагая $F_{s, t} = \delta_0$ при $s \in (-\infty, t] \setminus A_t$, мы получаем

$$G_t^3(f, (r, t]) = -\ln \int_{M(E)} e^{-\nu(f)} N_{r, t}^3(d\nu) = -\int_r^t \ln L_{F_{s, t}}(f) \zeta(ds)$$

сначала для $f \in D(E_\varrho)^+$, а затем для всех $f \in B(E)^+$.

Лемма 3.5. Для полугруппы $(Q_{r, t})_{r \leq t}$ существуют безгранично делимые входные вероятностные законы $\{(K_{s, t})_{t > s}: s \in \mathbf{R}\}$ такие, что

$$J_{r, t}^3(f) = -\int_r^t \ln L_{K_{s, t}}(f) \zeta(ds), \quad t \geq r, \quad f \in B(E)^+. \quad (3.14)$$

Доказательство. По лемме 3.1 мы имеем $G_t^3(f, ds) = G_r^3(V_{r, t}f, ds)$ при $s < r \leq t$. Отсюда вытекает, что $D_{s, t}(f) = D_{s, r}(V_{r, t}f)$ для ζ -почти всех $s \in (-\infty, r]$. Пусть λ — мера Лебега на $\mathbf{R}$. По лемме Фубини существует множество $B(f) \subseteq \mathbf{R}$ полной ζ -меры и множества $C_s(f) \subseteq [s, \infty)$ и $C_{s, r}(f) \subseteq [r, \infty)$ полной λ -меры такие, что

$$D_{s, t}(f) = D_{s, r}(V_{r, t}f), \quad s \in B(f), \quad r \in C_s(f), \quad t \in C_{s, r}(f).$$

По лемме 3.4 $D_{s, t}$ и $D_{s, r} \circ V_{r, t}$ определяются их сужениями на счетный класс $D(E_\varrho)^+$. Тогда для множества $B \subseteq \mathbf{R}$ полной ζ -меры и множеств $C_s \subseteq (s, \infty)$ и $C_{s, r} \subseteq (r, \infty)$ полной λ -меры мы имеем

$$D_{s, t} = D_{s, r} \circ V_{r, t}, \quad s \in B, \quad r \in C_s, \quad t \in C_{s, r}, \quad (3.15)$$

как операторы на $B(E)^+$. Для любого $s \in B$ выберем последовательность $\{s_k\} \subset C_s$ с $s_k \downarrow s$. Согласно (3.15), мы получаем

$$D_{s,s_k} \circ V_{s_k,t} = D_{s,s_{k+1}} \circ V_{s_{k+1},t} = D_{s,t}, \quad t \in C_{s,s_k} \cap C_{s,s_{k+1}}.$$

В силу леммы 3.4 и наших предположений $D_{s,s_k}(V_{s_k,t}f)$ и $D_{s,s_{k+1}}(V_{s_{k+1},t}f)$ непрерывны справа по $t \geq s_{k+1}$ при $f \in C(E)^+$. Тогда мы имеем

$$D_{s,s_k} \circ V_{s_k,t} = D_{s,s_{k+1}} \circ V_{s_{k+1},t}, \quad t \geq s_k, \quad (3.16)$$

как операторы на $B(E)^+$. Для $t > s$ возьмем некоторое $s_k \in (s, t)$ и положим $I_{s,t} = D_{s,s_k} \circ V_{s_k,t}$, $I_{s,t}$ не зависит от выбора s_k в силу (3.16). Соответственно, пусть F_{s,s_k} — безгранично делимая вероятностная мера на $M(E)$, определяемая леммой 3.4, и пусть $K_{s,t} = F_{s,s_k} Q_{s_k,t}$, $K_{s,t}$ также не зависит от выбора s_k . Ясно, что $(K_{s,t})_{t>s}$ образует входной закон для $(Q_{r,t})_{r \leq t}$ и

$$I_{s,t} = -\ln L_{F_{s,s_k}} \circ V_{s_k,t} = -\ln L_{K_{s,t}}(f), \quad t > s. \quad (3.17)$$

Из (3.15) мы имеем $I_{s,t} = D_{s,t}$ для λ -почти всех $t \in (s, \infty)$. Если $s \in \mathbf{R} \setminus B$, то мы положим $I_{s,t} = 0$ для всех $t > s$. Тогда лемма Фубини обеспечивает существование множества $U \subseteq \mathbf{R}$ полной λ -меры такого, что для любого $t \in U$ мы имеем $I_{s,t} = D_{s,t}$ для ζ -почти всех $s \in (-\infty, t)$. Следовательно, если $t \in U$, то

$$J_{r,t}^3(f) = G_t^3(f, (r, t]) = \int_r^t I_{s,t}(f) \zeta(ds), \quad r \leq t, \quad f \in B(E)^+. \quad (3.18)$$

Напомним, что и ζ , и $G_t^3(f, \cdot)$ являются рассеянными мерами. Для $t \in \mathbf{R} \setminus U$ выберем последовательность $\{t_k\} \subset U$ такую, что $t_k \uparrow t$. По (3.18) и лемме 3.1 мы имеем

$$\begin{aligned} J_{r,t}^3(f) &= \lim_{k \rightarrow \infty} G_t^3(f, (r, t_k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{t_k}^3(V_{t_k,t}f, (r, t_k]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_r^{t_k} I_{s,t_k}(V_{t_k,t}f) \zeta(ds) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_r^{t_k} I_{s,t}(f) \zeta(ds) \\ &= \int_r^t I_{s,t}(f) \zeta(ds), \end{aligned}$$

откуда вытекает требуемый результат.

Доказательство теоремы 3.1. Легко видеть, что для семейства $(N_{r,t})_{r \leq t}$, определенного соотношением (3.1), имеет место (2.5). Комбинируя (3.5) и леммы 3.2 и 3.5, мы замечаем, что любая SC-полугруппа допускает разложение (3.1).

Пусть $(Q_t)_{t \geq 0}$ — переходная полугруппа однородного МВ-процесса. Следующий частный случай теоремы 3.1 был доказан в [25].

Теорема 3.2 (см. [25]). Семейство вероятностных мер $(N_t)_{t \geq 0}$ на $M(E)$ является SC-полугруппой, ассоциированной с $(Q_t)_{t \geq 0}$, тогда

и только тогда, когда для $(Q_t)_{t \geq 0}$ существует безгранично делимый вероятностный входной закон $(K_t)_{t > 0}$ такой, что

$$\ln L_{N_t}(f) = \int_0^t [\ln L_{K_s}(f)] ds, \quad t \geq 0, f \in B(E)^+. \quad (3.19)$$

4. Построение процесса с иммиграцией. Чтобы наилучшим образом использовать существующую литературу, в этом и следующих пунктах мы ограничимся рассмотрением переходной полугруппы $(Q_t)_{t \geq 0}$ однородного правого борелевского МВ-процесса X . Пусть $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$ обозначает сужение $(Q_t)_{t \geq 0}$ на $M(E)^\circ$.

Сначала напомним некоторые факты из теории потенциала, см., например, [6] и [14]. Семейство σ -конечных мер $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ называется *правилом вхождения* для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$, если $J_s Q_{t-s}^\circ \leq J_t$ при $t > st$, $s \in \mathbf{R}$ и $J_s Q_{t-s}^\circ \uparrow J_t$ при $s \uparrow t$. Заметим, что входной закон $(H_t)_{t > r}$ для $r \in [-\infty, \infty)$ может быть расширен до правила вхождения, если положить $H_t = 0$ для $t \leq r$. Пусть $W(M(E))$ обозначает пространство траекторий $\{w_t: t \in \mathbf{R}\}$, которые являются $M(E)^\circ$ -значными и непрерывными справа на открытом интервале $(\alpha(w), \beta(w))$ и принимают значение, равное нулевой мере, в других точках. Траектория $[0]$, тождественно равная 0, соответствует пустому интервалу (α, β) . Положим $\alpha([0]) = +\infty$ и $\beta([0]) = -\infty$. Пусть $(\mathcal{G}^\circ, \mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbf{R}}$ — естественные σ -алгебры на $W(M(E))$, порожденные координатным процессом. Операторы сдвига $\{\sigma_t: t \in \mathbf{R}\}$ на $W(M(E))$ определяются соотношением $\sigma_t w_s = w_{t+s}$. Каждому правилу вхождения $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ соответствует единственная σ -конечная мера $\mathbf{Q}^J$ на $(W(M(E)), \mathcal{G}^\circ)$, относительно которой координатный процесс $\{w_t: t \in \mathbf{R}\}$ является марковским с одномерными распределениями $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ и полугруппой $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$. А именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^J \{ \alpha < t_1, w_{t_1} \in d\nu_1, w_{t_2} \in d\nu_2, \dots, w_{t_n} \in d\nu_n, t_n < \beta \} \\ = J_{t_1}(d\nu_1) Q_{t_2-t_1}^\circ(\nu_1, d\nu_2) \cdots Q_{t_n-t_{n-1}}^\circ(\nu_{n-1}, d\nu_n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

для всех $t_1 < \dots < t_n \in \mathbf{R}$ и $\nu_1, \dots, \nu_n \in M(E)^\circ$. Существование этой меры было доказано С. Е. Кузнецовым [22], также см. [15]. Системе $(W(M(E)), \mathcal{G}^\circ, \mathcal{G}_t^\circ, w_t, \mathbf{Q}^J)$ обычно называют *процессом Кузнецова*, определяемым $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$, а $\mathbf{Q}^J$ называют *мерой Кузнецова*. Имеет место представление

$$J_t = H_{-\infty, t} + \int_{\mathbf{R}} H_{s, t} \rho(ds), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (4.2)$$

где $\rho(ds)$ — радонова мера на $\mathbf{R}$ и $(H_{s, t})_{t \in \mathbf{R}}$ — входной закон при $s \in [-\infty, \infty)$. Из этого представления следует, что

$$\mathbf{Q}^J(dw) = \mathbf{Q}_{-\infty}(dw) + \int_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}_s(dw) \rho(ds), \quad (4.3)$$

где $Q_s(dw)$ — мера Кузнецова, определенная законом $(H_{s,t})_{t \in \mathbf{R}}$, см. [15]. Если $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ — входной закон при $r \in [-\infty, \infty)$, то носителем Q^J является $W_r(M(E))$ — подмножество множества $W(M(E))$, включающее в себя траектории $\{w_t: t \in \mathbf{R}\}$ такие, что $\alpha(w) = r$. В частности, если F — избыточная мера для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$ и $J_t \equiv F$, то Q^J стационарна, т.е. $Q^J \circ \sigma_t^{-1} = Q^J$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Теперь предположим, что $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ — правило вхождения для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$ с представлением (4.2) и $N^J(dw)$ — пуассоновская случайная мера на $W(M(E))$ с интенсивностью $Q^J(dw)$. Легко видеть, что процесс

$$Y_t^J := \int_{W(M(E))} w_t N^J(dw) \quad (4.4)$$

почти наверное корректно определен для каждого $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 4.1. В ситуации, описанной выше, $\{Y_t^J: t \in \mathbf{R}\}$ является процессом с иммиграцией, соответствующим (неоднородной) SC-полугруппе $(N_{r,t})_{r \leq t}$, определяемой соотношением

$$\ln L_{N_{r,t}}(f) = - \int_{[r,t)} \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) H_{s,t}(d\nu) \rho(ds), \quad (4.5)$$

$r \leq t$, $f \in B(E)^+$.

Доказательство. Согласно (4.3), для любой ограниченной борелевской функции F на $M(E)$ такой, что $F(0) = 0$, мы имеем

$$Q^J\{F(w_t); r \leq \alpha < t\} = \int_{[r,t)} H_{s,t}(F) \rho(ds). \quad (4.6)$$

Теперь требуемые результаты вытекают из (4.6) и марковского свойства Q^J .

Пусть $(N_t)_{t \geq 0}$ — SC-полугруппа, ассоциированная с $(Q_t)_{t \geq 0}$, заданная соотношением (3.19). Предположим, что $K_t = I(\eta_t, H_t)$ и $N_t = I(\gamma_t, G_t)$ при $t > 0$ и $t \geq 0$ соответственно.

Лемма 4.2. Пусть $G_t = 0$ при $t < 0$. Тогда $(G_t)_{t \in \mathbf{R}}$ является правилом вхождения для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$.

Доказательство. Напомним, что $Q_t(\mu, \cdot)$ — безгранично делимая вероятностная мера на $M(E)$ при всех $t \geq 0$ и $\mu \in M(E)$. Предположим, что $Q_t(\delta_x, \cdot) = I(\lambda_t(x, \cdot), L_t(x, \cdot))$. Согласно (1.4),

$$G_t = G_{t-r} + G_r Q_{t-r}^\circ + \int_E \gamma_r(dx) L_{t-r}(x, \cdot), \quad t > r > 0,$$

и, следовательно, $G_r Q_{t-r} \leq G_t$. Из (3.19) мы имеем

$$G_t Q_{t-r}^\circ = \int_0^t H_s Q_{t-r}^\circ ds = G_r Q_{t-r}^\circ + \int_r^t H_s Q_{t-r}^\circ ds,$$

так что $G_r Q_{t-r}^\circ \uparrow G_t$ при $r \uparrow t$. Поэтому $(G_t)_{t \in \mathbf{R}}$ является правилом вхождения.

Теперь мы укажем конструкцию процесса с иммиграцией, соответствующего $(N_t)_{t \geq 0}$. Следующая теорема показывает, что, за исключением детерминированной части $\{\gamma_t: t \geq 0\}$, и моменты вхождения, и эволюции иммигрантов определяются пуассоновской случайной мерой, основанной на мере Кузнецова Q^G .

Теорема 4.1. Пусть Y_t^G определяется соотношением (4.4) с $J = G$, и пусть $Y_t = \gamma_t + Y_t^G$. Тогда $\{Y_t: t \geq 0\}$ — процесс с иммиграцией с одномерными распределениями $(N_t)_{t \geq 0}$ и переходной полугруппой $(Q_t^N)_{t \geq 0}$.

Доказательство. Предположим, что $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$ представляется в виде (4.2) с $G_{s,t}$ вместо $J_{s,t}$. Тогда для $t \geq r \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{[r,t)} G_{s,t} \rho(ds) &= \int_{[0,t)} G_{s,t} \rho(ds) - \int_{[0,r)} G_{r,s} Q_{t-r}^\circ \rho(ds) \\ &= G_t - G_r Q_{t-r}^\circ = \int_0^t H_s ds - \int_0^r H_s Q_{t-r}^\circ ds. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из соотношения $K_{s+t} = K_s Q_t$ вытекает, что

$$\eta_{s+t} = \int_E \eta_s(dx) \lambda_t(x, \cdot), \quad H_{s+t} = \int_E \eta_s(dx) L_t(x, \cdot) + H_s Q_t^\circ. \quad (4.8)$$

Из второго соотношения в (4.8) мы имеем

$$\int_0^r H_{s+t-r} ds - \int_0^r H_s Q_{t-r}^\circ ds = \int_0^r ds \int_E \eta_s(dx) L_{t-r}(x, \cdot).$$

Подставляя это в (4.7), мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{[r,t)} G_t^s \rho(ds) &= \int_0^{t-r} H_s ds + \int_0^r ds \int_E \eta_s(dx) L_{t-r}(x, \cdot) \\ &= G_{t-r} + \int_E \gamma_r(dx) L_{t-r}(x, \cdot). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Поскольку часть $\{\gamma_t: t \geq 0\}$ неслучайна, легко проверить, что $\{Y_t: t \geq 0\}$ — марковский процесс с одномерными распределениями $(N_t)_{t \geq 0}$. По лемме 4.1 мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\exp \{ -Y_t(f) \} \mid Y_s: 0 \leq s \leq r \right] \\ = \exp \left\{ -Y_r^G(V_{t-r} f) - \gamma_t(f) \right. \\ \left. - \int_{[r,t)} \rho(ds) \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) G_t^s(d\nu) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Используя первое соотношение из (4.8), мы замечаем, что

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \int_0^{t-r} \eta_s ds + \int_0^r ds \int_E \eta_s(dx) \lambda_{t-r}(x, \cdot) \\ &= \gamma_{t-r} + \int_E \gamma_r(dx) \lambda_{t-r}(x, \cdot). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Комбинируя (4.9), (4.10) и (4.11), мы получаем

$$\mathbf{E} \left[\exp \{ -Y_t(f) \} \mid Y_s: 0 \leq s \leq r \right] \\ = \exp \left\{ -Y_r(V_{t-r}f) - \gamma_{t-r}(f) - \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) G_{t-r}(d\nu) \right\},$$

т.е. $\{Y_t: t \geq 0\}$ — марковский процесс с переходной полугруппой $(Q_t^N)_{t \geq 0}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим полугруппу $(Q_t)_{t \geq 0}$ (ξ, ϕ) -суперпроцесса. Пусть $\mathcal{X}^1(Q)$ — множество входных вероятностных законов $K = (K_t)_{t \geq 0}$ для полугруппы $(Q_t)_{t \geq 0}$ таких, что

$$\int_0^1 ds \int_{M(E)^\circ} \nu(E) K_s(d\nu) < \infty. \quad (4.12)$$

Пусть $\mathcal{X}(P)$ — множество входных законов $\kappa = (\kappa_t)_{t \geq 0}$ для исходной полугруппы $(P_t)_{t \geq 0}$, которые удовлетворяют условию $\int_0^1 \kappa_s(E) ds < \infty$. Для $\kappa \in \mathcal{X}(P)$ положим

$$S_t(\kappa, f) = \kappa_t(f) - \int_0^t ds \int_E \phi(y, V_s f(y)) \kappa_{t-s}(dy), \quad (4.13)$$

$t > 0$, $f \in B(E)^+$. Заметим, что $S_t(\kappa, f) = \mu(V_t f)$, если $(\kappa_t)_{t \geq 0}$ задается условием $\kappa_t = \mu P_t$. Следующая теорема полностью характеризует множество безгранично делимых входных вероятностных законов для $(Q_t)_{t \geq 0}$.

Теорема 4.2 (см. [26]). *Закон $K \in \mathcal{X}^1(Q)$ безгранично делим тогда и только тогда, когда*

$$\ln L_{K_t}(f) = -S_t(\kappa, f) - \int_{\mathcal{X}(P)} (1 - \exp \{ -S_t(\eta, f) \}) F(d\eta), \quad (4.14)$$

где $\kappa \in \mathcal{X}(P)$ и F — σ -конечная мера на $\mathcal{X}(P)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 ds \int_{\mathcal{X}(P)} \eta_s(1) F(d\eta) < \infty. \quad (4.15)$$

Пусть $\mathcal{X}(Q^\circ)$ — множество входных законов K для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$, удовлетворяющих (4.12). Для $\mathcal{X}(Q^\circ)$ можно также указать следующую общую характеристику (см. также [7]).

Теорема 4.3. *Любой входной закон $H \in \mathcal{X}(Q^\circ)$ может быть представлен в виде*

$$\int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) H_t(d\nu) \\ = S_t(\kappa, f) + \int_{\mathcal{X}(P)} (1 - \exp \{ -S_t(\eta, f) \}) F(d\eta), \quad (4.16)$$

$t > 0$, $f \in B(E)^+$, где $\kappa \in \mathcal{K}(P)$ и F — σ -конечная мера на $\mathcal{K}(P)$, удовлетворяющая (4.15). Если дополнительно

$$\int_a^\infty \left[\sup_{x \in E} |\phi(x, z)^{-1}| \right] dz < \infty \quad (4.17)$$

для некоторого постоянного $a > 0$, то (4.16) определяет входной закон $H \in \mathcal{K}(Q^\circ)$ при любом $\kappa \in \mathcal{K}(P)$ и любой σ -конечной мере F на $\mathcal{K}(P)$, удовлетворяющей (4.15).

Доказательство. Если $H \in \mathcal{K}(Q^\circ)$, то $(K_t)_{t \geq 0} = I(0, H_t)_{t \geq 0}$ задает безгранично делимый входной вероятностный закон $K \in \mathcal{K}^1(Q)$. Таким образом, представление (4.16) вытекает из (4.14). Если выполнено (4.17), то существует семейство σ -конечных мер $\{L_t(x, \cdot) : t > 0, x \in E\}$ на $M(E)^\circ$ таких, что $Q_t(\delta_x, \cdot) = I(0, L_t(x, \cdot))$, см. [4, с. 195–196]. Используя это, можно показать, что произвольный безгранично делимый входной вероятностный закон $K \in \mathcal{K}^1(Q)$ можно задать как $(K_t)_{t \geq 0} = I(0, H_t)_0$ для некоторого $H \in \mathcal{K}(Q^\circ)$. Из (4.14) мы заключаем, что (4.16) определяет входной закон $H \in \mathcal{K}(Q^\circ)$. Теорема доказана.

Пусть $H \in \mathcal{K}(Q^\circ)$, и пусть $\mathbf{Q}^H$ — соответствующая мера Кузнецова с носителем $W_0(M(E))$. Если $N(ds, dw)$ — пуассоновская случайная мера на $[0, \infty) \times W_0(M(E))$ с интенсивностью $ds \times \mathbf{Q}^H(dw)$, то соотношение

$$Y_t = \int_{[0, t)} \int_{W_0(M(E))} w_{t-s} N(ds, dw), \quad t \geq 0, \quad (4.18)$$

задает процесс с иммиграцией, соответствующий SC-полугруппе $(N_t)_{t \geq 0}$, определяемой с помощью соотношения

$$\ln L_{N_t}(f) = - \int_0^t ds \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) H_s(d\nu), \quad (4.19)$$

$t \geq 0$, $f \in B(E)^+$. Ясно, что (4.18) по существу является частным случаем (4.4). Эта конструкция была использована в [26], [29] и [32]. Из теорем 3.2, 4.2 и 4.3 легко видеть, что при условии (4.17) любой однородный процесс с иммиграцией, ассоциированный с (ξ, ϕ) -суперпроцессом, может быть задан в виде (4.18). С этим связана также статья [10], в которой условный (ξ, ϕ) -суперпроцесс строится путем сложения масс, выкинутых «бессмертной частицей», двигающейся вокруг как копия ξ .

Конструкция, использующая процесс Кузнецова, позволяет обобщить некоторые известные результаты о (ξ, ϕ) -суперпроцессах на процесс с иммиграцией. В качестве примера приведем характеризацию для «взвешенного времени занятости» процесса с иммиграцией с использованием конструкции (4.18). Для простоты мы рассмотрим только частный случай. Известно, что если X — (ξ, ϕ) -суперпроцесс, то

$$\mathbf{Q}_\mu \exp \left\{ -X_t(f) - \int_0^t X_s(g) ds \right\} = \exp \{ -\mu(V_t(f, g)) \}, \quad (4.20)$$

$f, g \in B(E)^+$, где $V_t(f, g)(x) \equiv u_t(x)$ — решение уравнения

$$u_t(x) + \int_0^t ds \int_E \phi(x, u_s(y)) P_{t-s}(x, dy) = P_t f(x) + \int_0^t P_s g(x) ds, \quad (4.21)$$

$t \geq 0$; см., например, [11] и [19]. Формулы (4.20) и (4.21) характеризуют совместное распределение X_t и взвешенного времени занятости $\int_0^t X_s ds$.

Из теорем 3.2 и 4.2 мы знаем, что условие

$$\int_{M(E)} e^{-\nu(f)} Q_t^\kappa(\mu, d\nu) = \exp \left\{ -\mu(V_t f) - \int_0^t S_r(\kappa, f) dr \right\}, \quad (4.22)$$

$t \geq 0$, $f \in B(E)^+$, определяет переходную полугруппу $(Q_t^\kappa)_{t \geq 0}$ процесса с иммиграцией, ассоциированного с (ξ, ϕ) -суперпроцессом. Пусть

$$h = \int_0^1 P_s 1 ds \in B(E)^+.$$

Из [26] мы знаем, что $(Q_t^\kappa)_{t \geq 0}$ имеет реализацию $(W, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Y_t, Q_\mu^\kappa)$ такую, что для каждого $g \in B(E)^+$ траектория $\{Y_t(g \wedge h): t \geq 0\}$ почти наверное измерима и локально ограничена, откуда вытекает, что $\int_0^t Y_s(g) ds$ можно определить почти наверное с помощью возрастающих пределов.

Теорема 4.4. *Предположим, что выполнено условие (4.17). Пусть $(W, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Y_t, Q_\mu^\kappa)$ — реализация $(Q_t^\kappa)_{t \geq 0}$, описанная выше. Тогда*

$$\begin{aligned} & Q_\mu^\kappa \exp \left\{ -Y_t(f) - \int_0^t Y_s(g) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu(u_t) - \int_0^t S_r(\kappa, f, g) dr \right\}, \quad f, g \in B(E)^+, \end{aligned}$$

где $u_t(x)$ определяется из (4.21) и

$$S_t(\kappa, f, g) = \kappa_t(f) + \int_0^t \kappa_s(g) ds - \int_0^t \kappa_{t-s}(\phi(u_s)) ds, \quad t > 0. \quad (4.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 4.3 существует входной закон $H \in \mathcal{X}(Q^\circ)$ такой, что

$$\int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) H_t(d\nu) = S_t(\kappa, f), \quad t > 0, f \in B(E)^+. \quad (4.24)$$

Пусть Q^H — соответствующая мера Кузнецова на $W(M(E))$. По (4.24) мы имеем

$$\begin{aligned} & Q^H \left(1 - \exp \left\{ -w_t(f) - \int_0^t w_s(g) ds \right\} \right) \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} Q^H \left(1 - Q_{w_\tau} \exp \left\{ -X_{t-\tau}(f) - \int_0^{t-\tau} X_s(g) ds \right\} \right) \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} Q^H \left(1 - \exp \{ -w_\tau(u_{t-\tau}) \} \right) = \lim_{\tau \downarrow 0} S_\tau(\kappa, u_{t-\tau}) = S_t(\kappa, f, g), \end{aligned}$$

где для получения последнего равенства использованы (4.21) и (4.23). Тогда, используя конструкцию (4.18), мы получаем

$$\begin{aligned} & Q_0^\kappa \exp \left\{ -Y_t(f) - \int_0^t Y_s(g) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t Q^H \left(1 - \exp \left\{ -w_{t-\tau}(f) - \int_\tau^t w_{s-\tau}(g) ds \right\} \right) d\tau \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t S_{t-\tau}(\kappa, f, g) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

и требуемый результат следует из соотношения $Q_\mu^\kappa = Q_\mu * Q_0^\kappa$.

5. «Почти наврное»-поведение процессов Кузнецова. В этом пункте мы будем изучать поведение процессов Кузнецова в окрестностях моментов их рождения. Обсуждение этих свойств представляет интерес, поскольку оно проливает свет на структуру траекторий процесса с иммиграцией. Отсутствие феллеровского свойства снова делает доказательство немного длиннее, чем можно было бы ожидать. Пусть $(Q_t)_{t \geq 0}$ — переходная полугруппа (ξ, ϕ) -суперпроцесса. Нам необходимо рассматривать две топологии на пространстве E : исходную топологию и топологию Рэя процесса ξ . Мы используем обозначение E_τ для множества E с топологией Рэя процесса ξ . Обозначение $M(E_\tau)$ самоочевидно. Пусть $(P_t^b)_{t \geq 0}$ — полугруппа ограниченных ядер на E , определяемых как

$$P_t^b f(x) = P_x f(\xi_t) \exp \left\{ - \int_0^t b(\xi_s) ds \right\}, \quad x \in E, f \in B(E)^+. \quad (5.1)$$

Несложно проверить, что для любого $H \in \mathcal{X}(Q^\circ)$ соотношение

$$\gamma_t(f) = \int_{M(E)^\circ} \nu(f) H_t(d\nu), \quad t > 0, f \in B(E)^+, \quad (5.2)$$

определяет входной закон $\gamma = (\gamma_t)_{t > 0}$ для $(P_t^b)_{t \geq 0}$.

Сначала рассмотрим специальный σ -конечный входной закон. Вспомним общую формулу (4.16). Пусть $x \in E$. Предположим, что соотношение

$$\int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) L_t(x, d\nu) = V_t f(x), \quad t > 0, f \in B(E)^+, \quad (5.3)$$

определяет входной закон $L(x) \in \mathcal{X}(Q^\circ)$. Ясно, что $(P_t^b(x, \cdot))_{t > 0}$ — минимальный входной закон для $(P_t^b)_{t \geq 0}$, который может быть задан соотношением (5.2) с $H_t(d\nu)$, замененным на $L_t(x, d\nu)$. Отсюда легко вывести, что $L(x) \in \mathcal{X}(Q^\circ)$ минимален.

Теорема 5.1. Обозначим $Q^{L(x)}$ меру Кузнецова на $W(M(E))$, определяемую соотношением $L(x) \in \mathcal{X}(Q^\circ)$. Тогда $w_t(E) \rightarrow 0$ и $(w_t(E))^{-1} w_t \rightarrow \delta_x$ в $M(E_\tau)$ при $t \downarrow 0$ для $Q^{L(x)}$ -почти всех траекторий $w \in W(M(E))$.

Доказательство. Утверждение было доказано в [29] для случая, когда полугруппа $(P_t)_{t \geq 0}$ является феллеровской и $\phi(x, z) \equiv z^2/2$ по теореме Перкинса [30], которая утверждает, что условный (ξ, ϕ) -суперпроцесс является обобщенным суперпроцессом Флеминга–Вино. Выкладки в [29] громоздки и не могут быть обобщены на рассматриваемую ситуацию. Здесь мы приведем доказательство теоремы, основанное на h -преобразовании (ξ, ϕ) -суперпроцесса. В нашем доказательстве важную роль играет рэевский конус для исходного процесса ξ . Мы будем предполагать, что полугруппа $(P_t)_{t \geq 0}$ консервативна. Для неконсервативной исходной полугруппы доказательство может быть сведено к консервативному случаю подобно тому, как это сделано в [29].

Пусть $\mathcal{R}$ — счетный конус Рэя для ξ , построенный в [31], и пусть $\bar{E}$ — соответствующая компактификация Рэя–Найта множества E с топологией Рэя. Заметим, что каждая $f \in \mathcal{R}$ непрерывна на E_r и допускает непрерывное продолжение $\bar{f}$ на $\bar{E}$. Как обычно, мы рассматриваем $M(E_r)$ как топологическое подпространство $M(\bar{E})$. Поскольку $\bar{E}$ является компактным метрическим пространством, $M(\bar{E})$ локально компактно и сепарабельно. Для любого фиксированного $u > 0$ соотношение

$$U_t^r(\mu, d\nu) = (\mu(P_{u-r}^b 1))^{-1} \nu(P_{u-t}^b 1) Q_{t-r}(\mu, d\nu), \quad 0 \leq r \leq t \leq u, \quad (5.4)$$

определяет неоднородную переходную полугруппу $(U_t^r)_{r \leq t}$ на $M(E)^\circ$. Определим вероятностную меру $U_u^{L(x)}(dw)$ на $W(M(E))$ с помощью соотношения

$$U_u^{L(x)}(dw) = (P_u^b 1(x))^{-1} w_u(1) Q^{L(x)}(dw).$$

Тогда относительно $U_u^{L(x)}$ процесс $\{w_t: 0 < t \leq u\}$ является марковским с полугруппой $(U_t^r)_{r \leq t}$ и одномерными распределениями

$$H_t(x, d\nu) := (P_u^b 1(x))^{-1} \nu(P_{u-t}^b 1) L_t(x, d\nu), \quad 0 < t \leq u. \quad (5.5)$$

Поскольку $L(x) \in \mathcal{X}(Q^\circ)$ минимален, $(H_t(x, \cdot))_{0 < t \leq u}$ является минимальным входным (вероятностным) законом для $(U_t^r)_{r \leq t}$. Возьмем $f \in \mathcal{R}$. По (5.3)–(5.5) и теореме о мартингальной сходимости мы $U_u^{L(x)}$ -почти наверное имеем

$$\begin{aligned} V_t f(x) &= \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) (\nu(P_{u-t}^b 1))^{-1} H_t(x, d\nu) P_u^b 1(x) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) (\nu(P_{u-t}^b 1))^{-1} U_t^r(w_r, d\nu) P_u^b 1(x) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} (w_r(P_{u-r}^b 1))^{-1} (1 - \exp\{-w_r(V_{t-r} f)\}) P_u^b 1(x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из (5.1) и (5.6) вытекает, что $U_u^{L(x)}$ -почти наверное

$$V_t f(x) \leq \liminf_{r \downarrow 0} (w_r(P_{u-r}^b 1))^{-1} P_u^b 1(x) \leq \liminf_{r \downarrow 0} e^{2\|b\|u} (w_r(1))^{-1}.$$

Заметим, что $V_t f(x)$ непрерывна справа по $t \geq 0$. Тогда, устремляя $t \downarrow 0$ и $f \uparrow \infty$ в последнем неравенстве, мы получаем, что $U_u^{L(x)}$ -почти наверное $w_t(1) \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Поскольку при каждом $u > 0$ меры $U_u^{L(x)}$ и $Q^{L(x)}$ взаимно абсолютно непрерывны на $\{w \in W_0(M(E)): w_u(1) > 0\}$, мы получаем первое утверждение. Рассуждая так же, как в (5.6), мы получаем, что $U_t^{L(x)}$ -почти наверное

$$\begin{aligned} P_t^b f(x) &= \int_{M(E)^\circ} \nu(f) (\nu(1))^{-1} H_t(x, d\nu) P_t^b 1(x) \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} (w_\tau(P_{t-\tau}^b 1))^{-1} w_\tau(P_{t-\tau}^b f) P_t^b 1(x). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Понятно, что мера $U_u^{L(x)}$ абсолютно непрерывна относительно $U_t^{L(x)}$ при $u \geq t > 0$. Так как $f \in \mathcal{R}$ является α -избыточной функцией для $(P_t)_{t \geq 0}$ при некотором $\alpha = \alpha(f) \geq 0$, то из (5.1) и (5.7) вытекает, что $U_u^{L(x)}$ -почти наверное

$$e^{-\|b\|t} P_t f(x) \leq \liminf_{\tau \downarrow 0} e^{(3\|b\|+\alpha)t} (w_\tau(1))^{-1} w_\tau(f).$$

Возьмем $w \in W_0(M(E))$, вдоль которой выполняется последнее неравенство для всех $f \in \mathcal{R}$ и всех рациональных $t \in (0, u]$. Пусть $r_k = r_k(w)$ — последовательность такая, что $r_k \downarrow 0$ и $(w_{r_k}(1))^{-1} w_{r_k} \rightarrow \hat{w}_0$ в $M(\bar{E})$ при $k \rightarrow \infty$, где $\hat{w}_0$ — вероятностная мера на $\bar{E}$. Тогда

$$e^{-\|b\|t} P_t f(x) \leq e^{(3\|b\|+\alpha)t} \hat{w}_0(\bar{f}).$$

Устремив $t \downarrow 0$, мы получим $f(x) \leq \hat{w}_0(\bar{f})$, так что $\hat{w}_0 = \delta_x$. Отсюда с очевидностью следует, что $(w_\tau(1))^{-1} w_\tau \rightarrow \delta_x$ в $M(E_\tau)$ при $\tau \downarrow 0$, откуда непосредственно вытекает второе утверждение.

Теперь мы рассмотрим h -преобразование исходной полугруппы $(P_t)_{t \geq 0}$. Пусть $h(x) = \int_0^1 P_s 1(x) ds$ для $x \in E$. Так как $h \in B(E)^+$ — избыточная функция для $(P_t)_{t \geq 0}$, то формула

$$T_t f(x) = (h(x))^{-1} \int_E f(y) h(y) P_t(x, dy), \quad x \in E, f \in B(E)^+, \quad (5.8)$$

определяет правую борелевскую полугруппу $(T_t)_{t \geq 0}$ на E , см., например, [31]. Пусть $(T_t^\partial)_{t \geq 0}$ — консервативное продолжение $(T_t)_{t \geq 0}$ на $E^\partial := E \cup \{\partial\}$, где ∂ — точка покоя. Пусть E_D^∂ обозначает входное пространство $(T_t^\partial)_{t \geq 0}$ с топологией Рэя. Пусть $E_D^T = E_D^\partial \setminus \{\partial\}$, и пусть $(\bar{T}_t)_{t \geq 0}$ — рэевское продолжение $(T_t^\partial)_{t \geq 0}$ на E_D^T . Тогда $(\bar{T}_t)_{t \geq 0}$ также являются правыми борелевскими полугруппами. Пусть закон $\kappa \in \mathcal{X}(P)$, нетривиален, и предположим, что соотношение

$$\int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) H_t(d\nu) = S_t(\kappa, f), \quad t > 0, f \in B(E)^+, \quad (5.9)$$

задает входной закон $H := L\kappa \in \mathcal{X}(Q^\circ)$. Пусть $Q^{L\kappa}$ — соответствующая мера Кузнецова на $W(M(E))$. Тогда справедлива

Теорема 5.2. Для $w \in W(M(E))$ определим $M(E_D^T)$ -значную траекторию $\{h\bar{w}_t: t \in \mathbf{R}\}$ с помощью соотношений

$$h\bar{w}_t(E_D^T \setminus E) = 0 \quad \text{и} \quad h\bar{w}_t(dx) = h(x) w_t(dx) \quad \text{для } x \in E. \quad (5.10)$$

Тогда для $\mathbf{Q}^{L\kappa}$ -почти всех $w \in W(M(E))$ процесс $\{h\bar{w}_t: t > 0\}$ непрерывен справа в топологии $M(E_D^T)$ и $h\bar{w}_t \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. При этом для $\mathbf{Q}^{L\kappa}$ -почти всех $w \in W(M(E))$ мы имеем $(w_t(h))^{-1} h\bar{w}_t \rightarrow \delta_{x(w)}$ для некоторого $x(w) \in E_D^T$ при $t \downarrow 0$.

Доказательство. В силу результатов [11], если $f \in B(E)$ чисто непрерывна относительно $(P_t)_{t \geq 0}$, то $\{w_t(f): t > 0\}$ непрерывна справа для почти всех $w \in W(M(E))$. Так как избыточная функция $h \in B(E)^+$ чисто непрерывна, то этим свойством обладает и fh , какова бы ни была ограниченная непрерывная функция f на E . Следовательно, $\{hw_t: t > 0\}$ непрерывен справа для почти всех $w \in W(M(E))$. Мы можем определить полугруппу кумулянтов $(U_t)_{t \geq 0}$ как $U_t f = h^{-1} V_t(hf)$. Тогда $\{hw_t: t > 0\}$ — марковский процесс с правой борелевской переходной полугруппой, заданной соотношением (1.3), в котором $(V_t)_{t \geq 0}$ заменено на $(U_t)_{t \geq 0}$. Пусть E_τ^T обозначает множество E , снабженное относительной топологией из множества E_D^T . Снова применяя результаты из [11], мы заключаем, что $\{hw_t: t > 0\}$ непрерывен справа в $M(E_\tau^T)$ для почти всех $w \in W(M(E))$. Поэтому $\{h\bar{w}_t: t > 0\}$ непрерывен справа в $M(E_D^T)$ для почти всех $w \in W(M(E))$. Заметим, что соотношение

$$\bar{\psi}(x, z) = \begin{cases} (h(x))^{-1} \phi(x, h(x)z), & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in E_D^T \setminus E, \end{cases}$$

определяет механизм ветвления $\bar{\psi}(\cdot, \cdot)$ на E_D^T . Пусть $(\bar{U}_t)_{t \geq 0}$ — полугруппа кумулянтов, определяемая соотношением

$$\bar{U}_t \bar{f}(x) + \int_0^t ds \int_{E_D^T} \bar{\psi}(y, \bar{U}_s \bar{f}(y)) \bar{T}_{t-s}(x, dy) = \bar{T}_t \bar{f}(x), \quad (5.11)$$

$t \geq 0, x \in E_D^T$. Тогда $(\bar{U}_t)_{t \geq 0}$ соответствует борелевской правой переходной полугруппе $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ на $M(E_D^T)$. Для любых $t > 0$ и $x \in E_D^T$ носителем меры $\bar{T}_t(x, \cdot)$ является E , так что $\bar{T}_t \bar{f}(x)$ и $\bar{U}_t \bar{f}(x)$ не зависят от значений $\bar{f}$ на $E_D^T \setminus E$. В самом деле, если $f = \bar{f}|_E$ для $f \in B(E_D^T)^+$, то $\bar{U}_t \bar{f}(x) = U_t f(x)$ для всех $x \in E$. Мы можем написать $\bar{T}_t f$ и $\bar{U}_t f$ вместо $\bar{U}_t \bar{f}$ и $\bar{U}_t \bar{f}$ соответственно. Ясно, что определение $\bar{T}_t f$ и $\bar{U}_t f$ можно распространить на все неотрицательные борелевские функции f на E с помощью возрастающих пределов. Как показано в [26], существует мера $\rho \in M(E_D^T)$ такая, что $\kappa_t(f) = \rho(\bar{T}_t(h^{-1}f))$ и $S_t(\kappa, f) = \rho(\bar{U}_t(h^{-1}f))$. Тогда $\{h\bar{w}_t: t > 0\}$ — марковский процесс с переходной полугруппой $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ и

$$\mathbf{Q}^{L\kappa}(1 - e^{-h\bar{w}_t(\bar{f})}) = \rho(\bar{U}_t \bar{f}), \quad t > 0, f \in B(E_D^T)^+.$$

Теперь требуемые результаты вытекают из теоремы 5.1, примененной к $(\bar{U}_t)_{t \geq 0}$ и $(\bar{T}_t)_{t \geq 0}$.

В силу (4.14) мы имеем входной закон $K := l\kappa \in \mathcal{X}^1(Q)$, задаваемый соотношением

$$\int_{M(E)} e^{-\nu(f)} K_t(d\nu) = \exp \{ -S_t(\kappa, f) \}, \quad t > 0, f \in B(E)^+. \quad (5.12)$$

Легко видеть, что сужение K на $M(E)^\circ$ принадлежит к $\mathcal{X}(Q^\circ)$. Пусть $Q^{l\kappa}$ обозначает соответствующую меру Кузнецова на $W(M(E))$.

Теорема 5.3. Для $Q^{l\kappa}$ -почти всех $w \in W(M(E))$ $\{h\bar{w}_t: t > 0\}$ непрерывен справа и $h\bar{w}_t \rightarrow \rho$ для некоторого $\rho \in M(E_D^T)$ при $t \downarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы используем обозначения, введенные при доказательстве теоремы 5.2. Ясно, что $\{h\bar{w}_t: t > 0\}$ является марковским процессом относительно $Q^{l\kappa}$ с переходной полугруппой $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ и

$$Q^{l\kappa} \exp \{ -h\bar{w}_t(\bar{f}) \} = \exp \{ -\rho(\bar{U}_t \bar{f}) \}, \quad t > 0, f \in B(E_D^T)^+.$$

Таким образом, требуемые утверждения справедливы в силу единственности переходной вероятности.

Наконец, рассмотрим поведение траекторий процесса Кузнецова, определенного с помощью общего правила вхождения. Пусть $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ — правило вхождения для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$, удовлетворяющее условию

$$\int_r^t ds \int_{M(E)^\circ} \nu(E) J_s(d\nu) < \infty, \quad r \leq t, r, t \in \mathbf{R}. \quad (5.13)$$

Тогда мы можем считать, что $(J_t)_{t \in \mathbf{R}}$ задано соотношением (4.2) с входными законами $\{(H_{s,s+t})_{t > 0}: s \in \mathbf{R}\}$, взятыми из $\mathcal{X}(Q^\circ)$.

Теорема 5.4. В описанной выше ситуации для Q^J -почти всех траекторий $w \in W(M(E))$ процесс $\{h\bar{w}_t: t \in \mathbf{R}\}$, определенный в (5.10), непрерывен справа в $M(E_D^T)^\circ$ на интервале $(\alpha(w), \beta(w))$ и $h\bar{w}_t \rightarrow h\bar{w}_\alpha$ для некоторого $h\bar{w}_\alpha \in M(E_D^T)$ при $t \downarrow \alpha(w)$. При этом для Q^J -почти всех траекторий $w \in W(M(E))$ с $h\bar{w}_\alpha = 0$ мы имеем $(w_t(h))^{-1} h\bar{w}_t \rightarrow \delta_{x(w)}$ для некоторого $x(w) \in E_D^T$ при $t \downarrow \alpha(w)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Q^H — мера Кузнецова на $W(M(E))$, соответствующая входному закону $H \in \mathcal{X}(Q^\circ)$, представленному соотношением (4.16). Тогда мы имеем

$$Q^H(dw) = Q^{L\kappa}(dw) + \int_{\mathcal{X}(P)} Q^{l\eta}(dw) F(d\eta), \quad w \in W(M(E)).$$

По теоремам 5.2 и 5.3 для Q^H -почти всех $w \in W(M(E))$ процесс $\{h\bar{w}_t: t > 0\}$ непрерывен справа в $M(E_D^T)$ и $h\bar{w}_t \rightarrow h\bar{w}_0$ для некоторого $h\bar{w}_0 \in M(E_D^T)$ при $t \downarrow 0$. Более того, для Q^H -почти всех $w \in W(M(E))$ с $h\bar{w}_0 = 0$ мы имеем $(w_t(h))^{-1} h\bar{w}_t \rightarrow \delta_{x(w)}$ для некоторого $x(w) \in E_D^T$ при $t \downarrow 0$. Тогда требуемый результат имеет место в силу представления (4.3) меры $Q^J(dw)$.

Ясно, что соотношению (5.13) удовлетворяет правило вхождения $(G_t)_{t \in \mathbf{R}}$ в теореме 4.1. Следующий пример показывает, что рассматривать процесс $\{h\bar{w}_t: t \geq 0\}$ необходимо, если требуется получить правый предел траектории в $\alpha = \alpha(w)$ в обычном смысле.

Пример 5.1. Предположим, что ξ — минимальное броуновское движение в ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^d$ с гладкой границей ∂D . Мы также используем символ ∂ для обозначения оператора внутренней нормальной производной на ∂D . Для любого $\gamma \in M(\partial D)$ определим $(G_t)_{t \geq 0}$ соотношением

$$\int_{M(D)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) G_t(d\nu) = \int_0^t (1 - \exp\{-\gamma(\partial V_{t-s}f)\}) ds, \quad f \in B(D)^+,$$

и положим $G_t = 0$ при $t \leq 0$. Тогда $(G_t)_{t \in \mathbf{R}}$ образует правило вхождения для (ξ, ϕ) -суперпроцесса. С помощью простых модификаций доказательств теорем 5.3 и 5.4 можно убедиться, что $w_{\alpha+}(D) = \infty$ и $w_{\alpha+}(K) = 0$ для всех компактных множеств $K \subset D$ и $\mathbf{Q}^G$ -почти всех траекторий $w \in W(M(D))$.

6. Стационарные процессы с иммиграцией. Процессы с иммиграцией, описываемые с помощью SC-полугрупп, тесно связаны с теорией избыточных мер, см., например, [13], [14] и [6]. В этом пункте мы сформулируем некоторые результаты об избыточных мерах в терминах стационарных процессов с иммиграцией.

Сначала рассмотрим полугруппу $(Q_t)_{t \geq 0}$ общего правого борелевского МВ-процесса. Для двух вероятностных мер F_1 и F_2 на $M(E)$ мы будем писать $F_1 \leq F_2$, если существует некоторая вероятностная мера G такая, что $F_1 * G = F_2$. Пусть $\mathcal{E}^*(Q)$ обозначает множество всех вероятностных мер F на $M(E)$ таких, что

$$\int_{M(E)^\circ} \nu(1) F(d\nu) < \infty \quad (6.1)$$

и $FQ_t \leq F$ для всех $t \geq 0$. Мы будем писать $F \in \mathcal{E}_i^*(Q)$, если $F \in \mathcal{E}^*(Q)$ — стационарное распределение для $(Q_t)_{t \geq 0}$, и $F \in \mathcal{E}_p^*(Q)$, если $F \in \mathcal{E}^*(Q)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} FQ_t = \delta_0$. Очевидно, что $\delta_0 \in \mathcal{E}_i^*(Q)$, но могут существовать другие нетривиальные стационарные распределения, хотя мы и рассматриваем фазовое пространство $M(E)$.

Пусть $\mathcal{E}(Q^\circ)$ обозначает класс всех избыточных мер F для $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$, удовлетворяющих (6.1). Пусть $\mathcal{E}_i(Q^\circ)$ — подмножество множества $\mathcal{E}(Q^\circ)$, включающее в себя все инвариантные меры, и пусть $\mathcal{E}_p(Q^\circ)$ — подмножество чисто избыточных мер. Классы $\mathcal{E}(Q^\circ)$ и $\mathcal{E}^*(Q)$ тесно связаны. В самом деле, мера $F \in \mathcal{E}^*(Q)$ безгранично делима тогда и только тогда, когда $F = I(\rho, J)$ для $\rho \in M(E)$ и $J \in \mathcal{E}(Q^\circ)$, удовлетворяющего условиям

$$\int_E \rho(dx) \lambda_t(x, \cdot) \leq \rho \quad \text{и} \quad \int_E \rho(dx) L_t(x, \cdot) + JQ_t^\circ \leq J. \quad (6.2)$$

При условии (4.17) мера $F \in \mathcal{E}^*(Q)$ безгранично делима тогда и только тогда, когда $F = I(0, J)$ для некоторого $J \in \mathcal{E}(Q^0)$.

Следующая теорема показывает, что $\mathcal{E}^*(Q)$ совпадает с множеством стационарных распределений процессов с иммиграцией, связанных с X .

Теорема 6.1. Пусть $F \in \mathcal{E}^*(Q)$. Тогда эта мера может быть единственным образом представлена в виде $F = F_i * F_p$, где $F_i = \lim_{t \rightarrow \infty} FQ_t \in \mathcal{E}_i^*(Q)$ и $F_p \in \mathcal{E}_p^*(Q)$. При этом существует единственная SC-полугруппа $(N_t)_{t \geq 0}$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = F_p$.

Доказательство. Пусть $(N_t)_{t \geq 0}$ — распределения на $M(E)$, удовлетворяющие условию $F = (FQ_t) * N_t$. В силу свойства ветвления полугруппы $(Q_t)_{t \geq 0}$ можно проверить, что для любых $r \geq 0$ и $t \geq 0$

$$\begin{aligned} (FQ_{r+t}) * N_{r+t} &= F = (FQ_t) * N_t = \{[(FQ_r) * N_r] Q_t\} * N_t \\ &= (FQ_{r+t}) * (N_r Q_t) * N_t. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Следовательно, семейство $(N_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет соотношению (1.4), так что оно является SC-полугруппой, ассоциированной с $(Q_t)_{t \geq 0}$. По определению $\mathcal{E}^*(Q)$ мы имеем $FQ_{r+t} \preceq FQ_t$, так что существуют следующие пределы, определяющие функционалы Лапласа двух вероятностных мер F_i и F_p :

$$L_{F_i}(f) = \uparrow \lim_{t \uparrow \infty} L_{FQ_t}(f), \quad L_{F_p}(f) = \downarrow \lim_{t \uparrow \infty} L_{N_t}(f), \quad f \in B(E)^+. \quad (6.4)$$

Очевидно, что $F_i \in \mathcal{E}_i^*(Q)$ и $F = F_i * F_p$. С другой стороны, $F_i * F_p = F = (FQ_t) * N_t = F_i * (F_p Q_t) * N_t$, так что $F_p = (F_p Q_t) * N_t$. Поэтому $F_p \in \mathcal{E}^*(Q)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} F_p Q_t = \delta_0$. Единственность разложения очевидна.

Хорошо известно, что любое $J \in \mathcal{E}(Q^0)$ имеет разложение Рисса $J = J_i + J_p$, где $J_i \in \mathcal{E}_i(Q^0)$ и $J_p \in \mathcal{E}_p(Q^0)$ можно представить в виде $J_p = \int_0^\infty H_t dt$ для некоторого $H \in \mathcal{X}(Q^0)$. Пусть $\mathbf{Q}^J$ — мера Кузнецова на $W(M(E))$, определяемая J , и пусть $N^J(dw)$ — пуассоновская случайная мера с интенсивностью $\mathbf{Q}^J(dw)$. По лемме 4.1 соотношение

$$Y_t^J := \int_{W(M(E))} w_t N^J(dw), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (6.5)$$

определяет стационарный процесс с иммиграцией с одномерным распределением $I(0, J)$, соответствующий SC-полугруппе $(N_t)_{t \geq 0}$, определенной соотношением (4.19). Меры Кузнецова, определяемые J_i и J_p , являются сужениями $\mathbf{Q}^J$ на $\{w \in W(M(E)): \alpha(w) = -\infty\}$ и $\{w \in W(M(E)): \alpha(w) > -\infty\}$ соответственно; см. [13]. Следовательно, соотношение

$$Y_t^{(p)} = \int_{W(M(E))} w_t 1_{\{\alpha > -\infty\}} N^J(dw), \quad t \in \mathbf{R},$$

определяет стационарный процесс с иммиграцией, имеющий одномерное распределение $I(0, J_p)$ и SC-полугруппу $(N_t)_{t \geq 0}$. Интуитивно ясно,

что $\{Y_t^{(p)}: t \in \mathbf{R}\}$ является «чисто иммиграционной» частью популяции. Напротив,

$$Y_t^{(i)} = \int_{W(M(E))} w_t 1_{\{\alpha = -\infty\}} N^J(dw), \quad t \in \mathbf{R},$$

является стационарным (ξ, ϕ) -суперпроцессом с одномерным распределением $I(0, J_i)$, который представляет «коренную» часть популяции.

Процесс с иммиграцией, определяемый соотношением (6.5), как правило, не является непрерывным справа, но может иметь непрерывную справа модификацию. Для $w \in W(M(E))$ положим

$$w_{t+} = \begin{cases} \lim_{s \downarrow t} w_s, & \text{если предел в } M(E) \text{ существует,} \\ 0, & \text{если указанный выше предел в } M(E) \\ & \text{не существует,} \end{cases} \quad (6.6)$$

и определим процесс $\{\bar{Y}_t^J: t \in \mathbf{R}\}$ как

$$\bar{Y}_t^J = \int_{W(M(E))} w_{t+} N^J(dw), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (6.7)$$

Тогда $\bar{Y}_t^J = Y_t^J$ почти наверное, так как $\mathbf{Q}^J\{w_{t+} \neq w_t\} = \mathbf{Q}^J\{\alpha = t\} = 0$, см. [13]. Другими словами, $\{\bar{Y}_t^J: t \in \mathbf{R}\}$ является модификацией $\{Y_t^J: t \in \mathbf{R}\}$.

Теорема 6.2. *Предположим, что $(Q_t)_{t \geq 0}$ — переходная полугруппа (ξ, ϕ) -суперпроцесса. (i) Если $J \in \mathcal{E}_i(Q^\circ)$, то процесс $\{\bar{Y}_t^J \equiv Y_t^J: t \in \mathbf{R}\}$ почти наверное непрерывен справа. (ii) Если $J \in \mathcal{E}_p(Q^\circ)$ — потенциал меры, т.е.*

$$\int_{M(E)^\circ} (1 - e^{-\nu(f)}) J(d\nu) = \int_0^\infty ds \int_{M(E)^\circ} (1 - \exp\{-\nu(V_s f)\}) G(d\nu),$$

$f \in B(E)^+$, где $\nu(1)G(d\nu)$ — конечная мера на $M(E)^\circ$, то процесс $\{\bar{Y}_t^J: t \in \mathbf{R}\}$ почти наверное непрерывен справа.

Доказательство. Поскольку утверждение (i) весьма просто, мы приведем лишь доказательство утверждения (ii). Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$W_k(M(E)) = \left\{ w \in W(M(E)): w_{\alpha+}(E) \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Согласно результатам [13], траектория $\{w_{t+}: t \in \mathbf{R}\}$ непрерывна справа для $\mathbf{Q}^J$ -почти всех $w \in W(M(E))$ и $\mathbf{Q}^J([\cup_{k=1}^\infty W_k(M(E))]^c) = 0$. Пусть

$$\bar{Y}_t^{(k)} = \int_{W_k(M(E))} X_t(w, \cdot) 1_{\{\alpha(w) \geq -k\}} N^J(dw), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, что $\{\bar{Y}_t^{(k)}: t \geq -k\}$ является процессом с иммиграцией, соответствующим SC-полугруппе $(N_t^{(k)})_{t \geq 0}$, задаваемой соотношением

$$\int_{M(E)} e^{-\nu(f)} N_t^{(k)}(d\nu) = \exp \left\{ - \int_0^t ds \int_{M(E)} (1 - e^{-\nu(V_s f)}) 1_{\{\nu(E) \geq 1/k\}} G(d\nu) \right\}.$$

Заметим, что для каждого $l > -k$ процесс $\{\bar{Y}_t^{(k)}: -k \leq t \leq l\}$ является почти наверное конечной суммой непрерывных справа траекторий и $\bar{Y}_t^{(k)} \rightarrow \bar{Y}_t^J$, монотонно возрастая, при $k \rightarrow \infty$, откуда, как и в работе [26], вытекает требуемый результат.

Теорема 6.3. *Предположим, что $(Q_t)_{t \geq 0}$ — перетходная полугруппа (ξ, ϕ) -суперпроцесса. Пусть $J \in \mathcal{E}(Q^\circ)$, и пусть $\{Y_t^J: t \in \mathbf{R}\}$ определяется соотношением (6.5). Для каждого $r > 0$ положим*

$$Y_t^{r,J} = \int_{W(M(E))} w_t 1_{\{t \geq \alpha+r\}} N(dw), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Тогда $\{Y_t^{r,J}: t \in \mathbf{R}\}$ является почти наверное непрерывным справа стационарным процессом с иммиграцией и $Y_t^{r,J} \rightarrow Y_t^J$, монотонно возрастая почти наверное при $r \downarrow 0$ для каждого $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Очевидно, что $JQ_r^\circ \in \mathcal{E}(Q^\circ)$ и $JQ_r^\circ = J_i + J_p Q_r^\circ = J_i + \int_0^\infty H_r Q_s^\circ ds$. Используя (4.1), можно проверить, что мера Кузнецова на $W(M(E))$, определяемая соотношением $JQ_r^\circ \in \mathcal{E}(Q^\circ)$, является образом Q^J при отображении $\{w_t: t \in \mathbf{R}\} \mapsto \{w_t 1_{\{t \geq \alpha+r\}}: t \in \mathbf{R}\}$. Следовательно, $\{Y_t^{r,J}: t \in \mathbf{R}\}$ — стационарный процесс с иммиграцией, соответствующий JQ_r° . По теореме 6.2 процесс $\{Y_t^{r,J}: t \in \mathbf{R}\}$ почти наверное непрерывен справа. Второе утверждение очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. New York: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
2. *Cohn D. L.* Measure Theory. Boston: Birkhäuser, 1980, 373 p.
3. *Dawson D. A.* Infinitely divisible random measures and superprocesses. — Progr. Probab., 1992, v. 31, p. 1–129.
4. *Dawson D. A.* Measure-valued Markov processes. — Lecture Notes in Math., 1993, v. 1541, p. 1–260.
5. *Dawson D. A., Ivanoff G.* Branching diffusions and random measures. — Branching Processes. Ed. by A. Joffe and P. Ney. New York: Dekker, 1978, p. 61–103. (Adv. Probab. Relat. Topics, v. 5.)
6. *Dellacherie C., Maisonneuve B., Meyer P. A.* Probabilités et Potentiel. Ch. 17–24. Paris: Hermann, 1992.
7. *Dynkin E. B.* Three classes of infinite dimensional diffusion processes. — J. Funct. Anal., 1989, v. 86, p. 75–110.
8. *Dynkin E. B.* Branching particle systems and superprocesses. — Ann. Probab., 1991, v. 19, p. 1157–1194.
9. *Evans S.* The entrance space of a Markov branching process conditioned on nonextinction. — Canad. Math. Bull., 1992, v. 35, p. 70–74.
10. *Evans S.* Two representations of conditioned superprocess. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, 1993, v. 123, p. 959–971.
11. *Fitzsimmons P. J.* Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes. — Israel J. Math., 1998, v. 64, p. 337–361.
12. *Fitzsimmons P. J.* On the martingale problem for measure-valued Markov branching processes. — Seminar on Stochastic Processes, 1991. Ed. by E. Cinlar et al. Boston: Birkhäuser, 1992, p. 39–51.

13. *Fitzsimmons P. J., Maisonneuve B.* Excessive measures and Markov processes with random birth and death. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1986, v. 72, p. 319–336.
14. *Getoor R. K.* Excessive Measures. Boston: Birkhäuser, 1990, 189 p.
15. *Getoor R. K., Glover J.* Constructing Markov processes with random times of birth and death. — *Seminar on Stochastic Processes*, 1986. Ed. by E. Cinlar et al. Boston: Birkhäuser, 1987, p. 35–69.
16. *Gorostiza L. G., Lopez-Mimbela J. A.* The multitype measure branching process. — *Adv. Appl. Probab.*, 1990, v. 22, p. 49–67.
17. *Gorostiza L. G., Roelly S.* Some properties of the multitype measure branching process. — *Stochastic Process. Appl.*, 1990, v. 37, № 2, p. 259–274.
18. *Hong W. M., Li Z. H.* A central limit theorem for super Brownian motion with super Brownian immigration. — *J. Appl. Probab.*, 1999, v. 36, p. 1218–1224.
19. *Iscoe I.* A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1986, v. 71, p. 85–116.
20. *Kallenberg O.* Random Measures. Berlin: Akademie-Verlag, 1975, 104 p.
21. *Kawazu K., Watanabe S.* Branching processes with immigration and related limit theorems. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1971, т. 16, в. 1, с. 34–51.
22. *Кузнецов С. Е.* Построение марковских процессов со случайными моментами рождения и гибели. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т. 18, в. 3, с. 596–601.
23. *Li Z. H.* A note on the multitype measure branching process. — *Adv. Appl. Probab.*, 1992, v. 24, p. 496–498.
24. *Li Z. H.* Measure-valued branching processes with immigration. — *Stochastic Process. Appl.*, 1992, v. 43, p. 249–264.
25. *Li Z. H.* Convolution semigroups associated with measure-valued branching processes. — *Chinese Sci. Bull.*, (English Ed.), 1996, v. 41, p. 276–280.
26. *Li Z. H.* Immigration structures associated with Dawson–Watanabe superprocesses. — *Stochastic Process. Appl.*, 1996, v. 62, p. 73–86.
27. *Li Z. H.* Immigration processes associated with branching particle systems. — *Adv. Appl. Probab.*, 1998, v. 30, p. 657–675.
28. *Li Z. H.* Entrance laws for Dawson–Watanabe superprocesses with nonlocal branching. — *Acta Math. Sci.*, (English Ed.), 1998, v. 18, p. 449–456.
29. *Li Z. H., Shiga T.* Measure-valued branching diffusions: immigrations, excursions and limit theorems. — *J. Math. Kyoto Univ.*, 1995, v. 35, p. 233–274.
30. *Perkins E. A.* Conditional Dawson–Watanabe processes and Fleming–Viot processes. — *Seminar on Stochastic Processes*, 1991. Ed. by E. Cinlar et al., Boston: Birkhäuser, 1992, p. 143–156.
31. *Sharpe M. J.* General Theory of Markov Processes. Boston: Academic Press, 1988, 419 p.
32. *Shiga T.* A stochastic equation based on a Poisson system for a class of measure-valued diffusion processes. — *J. Math. Kyoto Univ.*, 1990, v. 30, p. 245–279.
33. *Shiga T., Watanabe S.* Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1973, B. 27, S. 37–46.
34. *Silverstein M. L.* Continuous state branching semigroups. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1969, B. 9, S. 235–257.
35. *Watanabe S.* A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes. — *J. Math. Kyoto Univ.*, 1968, v. 8, p. 141–167.

Поступила в редакцию
24.III.1999