Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Рузанкин, Построение оптимального совместного распределения двух случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 275–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3918>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:42:09

© 2001 г.

РУЗАНКИН П. С.*

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Настоящая работа посвящена решению задачи Монжа–Канторовича для одного класса функционалов на вещественной оси. В качестве приложения получено усиление известного результата П. Майора, касающегося точности пуассоновской аппроксимации биномиального распределения.

Ключевые слова и фразы: задача Монжа–Канторовича, пуассоновская аппроксимация биномиального распределения.

1. Введение и формулировка основных результатов. Пусть на полном сепарабельном метрическом пространстве (U, r) заданы две вероятностные борелевские меры P и Q и M — пространство всех вероятностных борелевских мер μ на $U \times U$ с фиксированными маргиналами $\mu(\cdot \times U) = P(\cdot)$, $\mu(U \times \cdot) = Q(\cdot)$. Задача Монжа–Канторовича (см. [1], [2] и обзор результатов в [3]) заключается в определении значения

$$\kappa(P, Q) = \inf \left\{ \int_{U \times U} f(v, w) \mu(dv, dw) : \mu \in M \right\}, \quad (1)$$

где f — заданная вещественнозначная функция, и в нахождении меры $\mu \in M$ (если таковая существует), на которой достигается эта нижняя грань. Частичное решение этой задачи дают так называемые теоремы двойственности, выражающие $\kappa(P, Q)$ в виде супремума некоторого функционала более простой структуры, определяемой только распределениями P и Q (см. [3]). Однако при этом не всегда ясен алгоритм вычисления этого супремума. Полное решение задачи Монжа–Канторовича удается получить лишь в некоторых специальных случаях. Так, например, если $U = \mathbf{R}$ — вещественная прямая с естественной метрикой и $f(v, w) = g(v - w)$, где g — выпуклая неотрицательная функция (см. [3]), то $\kappa(P, Q) = \int_{\mathbf{R}^2} g(v - w) dH(v, w) =$

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: ruzankin@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, коды проектов 00-01-00802, 00-15-96178, и INTAS, код проекта 99-01317.

$\int_0^1 g(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)) du$, где F и G — функции распределения, соответствующие мерам P и Q , F^{-1} и G^{-1} — квантильные преобразования F и G , $H(v, w) = \min\{F(v), G(w)\}$. Для некоторых специальных классов распределений в $\mathbf{R}^n$ также получены полные решения этой задачи (см. [3]).

Мы будем рассматривать функционал $\kappa(P, Q)$ для ядер вида $f(v, w) = I(r(v, w) > z)$, где через I обозначена индикаторная функция и z — произвольная неотрицательная постоянная. В этом случае выражение (1) тождественно совпадает с величиной

$$\rho(z, P, Q) = \inf_{\xi, \eta} \left\{ \mathbf{P}\{r(\xi, \eta) > z\} \right\}, \quad (2)$$

где инфимум берется по всем случайным величинам ξ и η , заданным на одном вероятностном пространстве, с распределениями P и Q соответственно. Определим также функционал

$$\beta(z, P, Q) = \sup \left\{ P(H) - Q(H^z) : H \text{ замкнуто в } U \right\}, \quad (3)$$

где $H^z = \{y \in U : r(H, y) \leq z\}$. Р. М. Дадли в [4] доказал теорему двойственности, связывающую введенные расстояния:

$$\rho(z, P, Q) = \beta(z, P, Q). \quad (4)$$

Отметим, что при $z = 0$ это соотношение при меньших ограничениях независимо доказал Р. Л. Добрушин в [5]. Напомним, что $\beta(0, P, Q)$ — это расстояние полной вариации между P и Q , а $\inf\{z : \beta(z, P, Q) \leq z\}$ — расстояние Прохорова, метризирующее слабую сходимость мер (см. [6]).

В [4] Р. М. Дадли также доказал, что нижняя грань в (2) всегда достигается, и построил оптимальное совместное распределение с помощью дискретной аппроксимации. Для случая $U = \mathbf{R}$ более конструктивное построение указанного распределения изложено в п. 4. В отличие от (2), верхняя грань в (3) достигается не всегда.

З а м е ч а н и е 1. На самом деле равенство (4) доказано в [4] для внутренне регулярных (например, полных) сепарабельных метрических пространств U . Другое доказательство (4) было предложено Г. Шэем в [7]. Однако в его доказательстве по существу используется не имеющая места непрерывность в топологии слабой сходимости функционала $\rho(z, P, Q)$ по аргументам P и Q (см. замечание 2). Так что предложенное в [7] доказательство соотношения (4) неверно.

В работе [5] равенство (4) при $z = 0$ доказано для произвольных сепарабельных (необязательно внутренне регулярных) метрических пространств U . Хотя в [5] отсутствует требование сепарабельности U , в несепарабельных метрических пространствах приведенное доказательство некорректно (см. замечание в [8]).

Соотношение (4) является полезным для обоснования таких свойств функционала ρ , как непрерывность справа по z (см. предложение 2), однако оно не дает нам способа вычисления значения этого функционала для конкретных распределений P и Q . В случае, когда $U = \mathbf{R}$ — вещественная прямая с естественной метрикой и $z > 0$, для вычисления значений функционала ρ может быть полезна следующая

Теорема 1. Пусть $z > 0$. Тогда

$$\rho(z, P, Q) = \lim_{y \rightarrow \infty} S(y) - 1 = \lim_{y \rightarrow \infty} T(y) - 1,$$

где функции S и T задаются соотношениями

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} S(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} T(y) = 0, \quad (5)$$

$$dS(y) = \max \{dF(y), T(y + dy - z) - S(y)\}, \quad (6)$$

$$dT(y) = \max \{dG(y), S(y + dy - z) - T(y)\} \quad (7)$$

при всех y и требованием непрерывности функций S и T слева. Функции S и T , удовлетворяющие перечисленным условиям, существуют и задаются этими условиями единственным образом.

Существование и единственность функций S и T устанавливаются в доказательстве предложения 1. Выполнение (6), (7) и условия непрерывности слева означает следующее:

$$S(y + w) = S(y) + P([y, y + w]) + \sup_{0 < v \leq w} \left(T(y + v - z) - S(y) - P([y, y + v]) \right)^+, \quad (8)$$

$$T(y + w) = T(y) + Q([y, y + w]) + \sup_{0 < v \leq w} \left(S(y + v - z) - T(y) - Q([y, y + v]) \right)^+ \quad (9)$$

при всех y и $w > 0$. Символом $(\cdot)^+$ обозначена положительная часть числа, т.е. $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$. Так как функционал $\rho(z, P, Q)$ непрерывен справа по z (см. предложение 2), то с помощью теоремы 1 можно доопределить значение этого функционала и при $z = 0$.

Предложение 1. Определенные в теореме 1 функции S и T могут быть заданы следующим образом:

$$S(y) = \lim_{L \rightarrow -\infty} S_L(y), \quad T(y) = \lim_{L \rightarrow -\infty} T_L(y) \quad \text{при всех } y, \quad (10)$$

где функции S_L и T_L определяются единственным образом следующими соотношениями:

$$S_L(y) = T_L(y) = 0 \quad \text{при } y \leq L; \quad (11)$$

$$S_L(y+w) = S_L(y) + P([y, y+w)) + \sup_{0 < v \leq w} (T_L(y+v-z) - S_L(y) - P([y, y+v)))^+, \quad (12)$$

$$T_L(y+w) = T_L(y) + Q([y, y+w)) + \sup_{0 < v \leq w} (S_L(y+v-z) - T_L(y) - Q([y, y+v)))^+ \quad (13)$$

при любых вещественных $y \geq L$ и $w > 0$. При этом выполнено

$$\lim_{L \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} S_L(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} S(y) = \lim_{L \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} T_L(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(y). \quad (14)$$

Соотношения (11)–(13) дают нам возможность вычислить значения функций S_L и T_L . Действительно, при $y \leq L$ значения $S_L(y)$ и $T_L(y)$ заданы. Из соотношений (12), (13) получим значения $S_L(y)$ и $T_L(y)$ при $L < y \leq L+z$. Теперь можно вычислить значения $S_L(y)$ и $T_L(y)$ при $L+z < y \leq L+2z$, $L+2z < y \leq L+3z, \dots$. Таким образом можно вычислить $S_L(y)$ и $T_L(y)$ при всех y .

Заметим, что если для некоторого K выполнено $F(K) = G(K) = 0$, то $S_L(y) \equiv S_K(y)$ и $T_L(y) \equiv T_K(y)$ при всех $L \leq K$. А значит, выполнено следующее

Следствие. Пусть $z > 0$ и $F(K) = G(K) = 0$ для некоторого K . Тогда функции S и T в теореме 1 можно задать следующим образом:

$$S(y) = T(y) = 0 \quad \text{при } y \leq K; \quad (15)$$

$$S(y+w) = S(y) + P([y, y+w)) + \sup_{0 < v \leq w} (T(y+v-z) - S(y) - P([y, y+v)))^+, \quad (16)$$

$$T(y+w) = T(y) + Q([y, y+w)) + \sup_{0 < v \leq w} (S(y+v-z) - T(y) - Q([y, y+v)))^+ \quad (17)$$

при любых вещественных $y \geq K$ и $w > 0$.

Некоторые примеры применения теоремы 1 помещены в п. 3. Важным приложением этой теоремы является получение оценки близости биномиального и соответствующего пуассоновского законов. Эта оценка без доказательства помещена в п. 5. Ее доказательство будет опубликовано в отдельной статье.

Следующая теорема позволяет применить следствие для симметричных распределений.

Теорема 2. Пусть распределения P и Q симметричны. Зададим также распределения $\check{P}$ и $\check{Q}$ равенствами

$$\check{P}(A) = P(A \cap \{0\}) + 2P(A \cap (0, \infty)), \quad \check{Q}(A) = Q(A \cap \{0\}) + 2Q(A \cap (0, \infty))$$

для всех борелевских $A \subset \mathbf{R}$. Тогда $\rho(z, P, Q) = \rho(z, \check{P}, \check{Q})$ при всех $z \geq 0$.

Для распределений на множестве неотрицательных целых чисел следствие можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3. Пусть P и Q — произвольные распределения на множестве неотрицательных целых чисел и $z \geq 0$ целое. Тогда

$$\rho(z, P, Q) = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j - 1 = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j - 1 \quad (18)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (S_j - T_{j+z})^+ = \sum_{j=0}^{\infty} (T_j - S_{j+z})^+, \quad (19)$$

где

$$S_j = T_j = 0 \quad \text{при всех } j < 0, \quad (20)$$

$$S_j = P(\{j\}) + \max\{S_{j-1}, T_{j-1-z}\}, \quad (21)$$

$$T_j = Q(\{j\}) + \max\{T_{j-1}, S_{j-1-z}\} \quad (22)$$

при всех $j \geq 0$.

Автор выражает искреннюю благодарность И. С. Борисову за постановку задачи и полезные замечания.

2. Доказательство результатов. Всюду в дальнейшем для любого вещественного числа y символом $\lfloor y \rfloor$ будем обозначать наибольшее целое число, не превосходящее y , а символом $\lceil y \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее y . Очевидно, $\lceil y \rceil = -\lfloor -y \rfloor$.

Предложение 2. Для любых борелевских вероятностных мер P и Q на польском пространстве U функционал $\rho(z, P, Q)$ непрерывен справа по z .

Доказательство. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу равенства (4) существует такое замкнутое $H \subset U$, что $P(H) - Q(H^z) > \rho(z, P, Q) - \varepsilon/2$. Выберем такое $\delta > 0$, что $Q(H^{z+\delta}) - Q(H^z) < \varepsilon/2$. Тогда для каждого u , $0 < u < \delta$, выполнено

$$\rho(z+u, P, Q) \geq P(H) - Q(H^{z+u}) > P(H) - Q(H^z) - \frac{\varepsilon}{2} > \rho(z, P, Q) - \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех u , $0 \leq u < \delta$, выполнено $\rho(z+u, P, Q) > \rho(z, P, Q) - \varepsilon$.

Доказательство теоремы 3. Фиксируем целое $z \geq 0$. Обозначим $p_j = P(\{j\})$, $q_j = Q(\{j\})$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Пусть заданы неотрицательные числа $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$. Обозначим через $H(\bar{a}, \bar{b})$ множество всех наборов чисел $\bar{x} = \{x_{ij}\}_{ij}$, удовлетворяющих следующим условиям: $x_{ij} \geq 0$ для всех i и j , $\sum_{j=i-z}^{i+z} x_{ij} \leq a_i$ для всех $i \geq 0$, $\sum_{i=j-z}^{j+z} x_{ij} \leq b_j$ для всех $j \geq 0$, $x_{ij} = 0$, если $i < 0$ или $j < 0$.

Для набора чисел $\bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b})$ обозначим $\delta(\bar{x}, \bar{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - \sum_{j=i-z}^{i+z} x_{ij})$.
Имеем

$$\rho(z, P, Q) = R_z(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots), \quad (23)$$

где

$$R_z(a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots) = \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}) \}. \quad (24)$$

Далее нам потребуются следующие легко проверяемые тождества, имеющие место при всех неотрицательных u, v, w :

$$(u - v)^+ = u - \min\{u, v\}, \quad (25)$$

$$(u - (v + w))^+ = ((u - v)^+ - w)^+, \quad (26)$$

$$(u - (v - w)^+)^+ = (u + w - \max\{v, w\})^+, \quad (27)$$

$$((u - w)^+ - (v - w)^+)^+ = (u - \max\{v, w\})^+. \quad (28)$$

Далее мы покажем, что

$$\begin{aligned} & \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}) \} \\ &= \inf \left\{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, x_{01} = s_{01}, \dots, \right. \\ & \quad \left. x_{0z} = s_{0z}, x_{10} = s_{10}, x_{20} = s_{20}, \dots, x_{z0} = s_{z0} \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} s_{00} &= \min\{a_0, b_0\}, \\ s_{01} &= \min\{b_1, a_0 - s_{00}\} = \min\{b_1, (a_0 - b_0)^+\}, \\ s_{02} &= \min\{b_2, a_0 - s_{00} - s_{01}\} = \min\{b_2, (a_0 - (b_0 + b_1))^+\}, \\ &\dots \\ s_{0z} &= \min\{b_z, a_0 - s_{00} - s_{01} - \dots - s_{0,z-1}\} \\ &= \min\{b_z, (a_0 - (b_0 + b_1 + \dots + b_{z-1}))^+\}, \\ s_{10} &= \min\{a_1, b_0 - s_{00}\} = \min\{a_1, (b_0 - a_0)^+\}, \\ &\dots \\ s_{z0} &= \min\{a_z, b_0 - s_{00} - s_{10} - \dots - s_{z-1,0}\} \\ &= \min\{a_z, (b_0 - (a_0 + a_1 + \dots + a_{z-1}))^+\}. \end{aligned}$$

Имея равенство (29), можно выделить первое слагаемое из каждой суммы $\delta(\bar{x}, \bar{a})$, стоящей в выражении $\inf\{\delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b})\}$. Получим

$$\begin{aligned} R_z(a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots) &= \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}) \} \\ &= \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, \dots, \\ & \quad x_{0z} = s_{0z}, x_{10} = s_{10}, \dots, x_{z0} = s_{z0} \} \\ &= (a_0 - s_{00} - s_{01} - \dots - s_{0z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R_z(a_1 - s_{10}, a_2 - s_{20}, \dots, a_z - s_{z0}, a_{z+1}, a_{z+2}, a_{z+3}, \dots; \\
 & \quad b_1 - s_{01}, b_2 - s_{02}, \dots, b_z - s_{0z}, b_{z+1}, b_{z+2}, b_{z+3}, \dots) \\
 & = (a_0 - (b_0 + b_1 + \dots + b_z))^+ \\
 & + R_z\left((a_1 - (b_0 - a_0))^+, (a_2 - (b_0 - (a_0 + a_1)))^+, \dots, \right. \\
 & \quad \left. (a_z - (b_0 - (a_0 + a_1 + \dots + a_{z-1})))^+, a_{z+1}, a_{z+2}, a_{z+3}, \dots; \right. \\
 & \quad \left. (b_1 - (a_0 - b_0))^+, (b_2 - (a_0 - (b_0 + b_1)))^+, \dots, \right. \\
 & \quad \left. (b_z - (a_0 - (b_0 + b_1 + \dots + b_{z-1})))^+, b_{z+1}, b_{z+2}, b_{z+3}, \dots\right).
 \end{aligned}$$

В силу равенства

$$\begin{aligned}
 R_z(a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots) & = (a_0 - (b_0 + b_1 + \dots + b_z))^+ \\
 & + R_z\left((a_1 - (b_0 - a_0))^+, (a_2 - (b_0 - (a_0 + a_1)))^+, \dots, \right. \\
 & \quad \left. (a_z - (b_0 - (a_0 + a_1 + \dots + a_{z-1})))^+, a_{z+1}, a_{z+2}, a_{z+3}, \dots; \right. \\
 & \quad \left. (b_1 - (a_0 - b_0))^+, (b_2 - (a_0 - (b_0 + b_1)))^+, \dots, \right. \\
 & \quad \left. (b_z - (a_0 - (b_0 + b_1 + \dots + b_{z-1})))^+, b_{z+1}, b_{z+2}, b_{z+3}, \dots\right),
 \end{aligned}$$

тождеств (25)–(28) и неравенств $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$, $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ несложно показать по индукции, что для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
 R_z(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots) & = \sum_{j=0}^{k-1} (S_j - T_{j+z})^+ \\
 & + R_z\left((S_k - \max\{S_{k-1}, T_{k-1}\})^+, (S_{k+1} - \max\{S_k, T_{k-1}\})^+, \dots, \right. \\
 & \quad \left. (S_{k+z-1} - \max\{S_{k+z-2}, T_{k-1}\})^+, p_{k+z}, p_{k+z+1}, p_{k+z+2}, \dots; \right. \\
 & \quad \left. (T_k - \max\{T_{k-1}, S_{k-1}\})^+, (T_{k+1} - \max\{T_k, S_{k-1}\})^+, \dots, \right. \\
 & \quad \left. (T_{k+z-1} - \max\{T_{k+z-2}, S_{k-1}\})^+, q_{k+z}, q_{k+z+1}, q_{k+z+2}, \dots\right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_z(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots) = \sum_{j=0}^{k-1} (S_j - T_{j+z})^+ + h(k),$$

где $0 \leq h(k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} p_j$. Устремляя $k \rightarrow \infty$, получим равенство

$$R_z(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} (S_j - T_{j+z})^+.$$

Теперь перепишем последнее равенство в другом виде: $R_z(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} (S_j - T_{j+z})^+ = \sum_{j=z}^{\infty} (T_{j+1} - (T_j + q_j)) = \sum_{j=0}^{\infty} (T_{j+1} -$

$(T_j + q_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j - \sum_{j=0}^{\infty} q_j = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j - 1$. Очевидно также, что $R_z(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots) = R_z(q_0, q_1, \dots; p_0, p_1, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} (T_j - S_{j+z})^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j - 1$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось установить справедливость равенства (29). Для этого сначала покажем, что при каждом $l, 0 \leq l \leq z$, выполнено

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, x_{01} = s_{01}, \dots, x_{0,l-1} = s_{0,l-1} \right\} \\ = \inf \left\{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, x_{01} = s_{01}, \dots, \right. \\ \left. x_{0,l-1} = s_{0,l-1}, x_{0l} = s_{0l} \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в последнем, по любому набору $\bar{x} = \{x_{ij}\}_{ij}$ из $H(\bar{a}, \bar{b})$, удовлетворяющему условиям $x_{00} = s_{00}, x_{01} = s_{01}, \dots, x_{0,l-1} = s_{0,l-1}$, построим набор $\bar{y} = \{y_{ij}\}_{ij}$ из класса $H(\bar{a}, \bar{b})$, для которого $y_{00} = s_{00}, \dots, y_{0,l-1} = s_{0,l-1}, y_{0l} = s_{0l}$ и $\delta(\bar{x}, \bar{a}) \geq \delta(\bar{y}, \bar{a})$. Пусть задан такой набор $\{x_{ij}\}_{ij}$. Из определения $s_{00}, s_{01}, \dots, s_{0,l-1}$ и из принадлежности $\bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b})$ следует, что $x_{0l} \leq s_{0l}$. Положим $y_{ij} = x_{ij}$ при выполнении одного из четырех условий: $i < 0, i > l + z, j < l, j > z$. Зададим $y_{0l} = s_{0l}$. Подберем $y_{0,l+1}, y_{0,l+2}, \dots, y_{0z}$ так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 \leq y_{0,l+1} \leq x_{0,l+1}, \dots, 0 \leq y_{0z} \leq x_{0z}, \\ (x_{0,l+1} + \dots + x_{0z}) - (y_{0,l+1} + \dots + y_{0z}) \leq y_{0l} - x_{0l}, \quad y_{01} + \dots + y_{0z} \leq a_0. \end{aligned}$$

Также подберем такие $y_{1,l}, y_{2,l}, \dots, y_{l+z,l}$, что

$$\begin{aligned} 0 \leq y_{1,l} \leq x_{1,l}, \dots, 0 \leq y_{l+z,l} \leq x_{l+z,l}, \\ (x_{1,l} + \dots + x_{l+z,l}) - (y_{1,l} + \dots + y_{l+z,l}) \leq y_{0l} - x_{0l}, \quad y_{0l} + \dots + y_{l+z,l} \leq b_l. \end{aligned}$$

Затем для $1 \leq i \leq l + z, l + 1 \leq j \leq z$ подберем $y_{ij} \geq x_{ij}$ так, чтобы набор $\bar{y}$ принадлежал $H(\bar{a}, \bar{b})$ и

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq l+z, l+1 \leq j \leq z} (y_{ij} - x_{ij}) = \min \left\{ (x_{0,l+1} + \dots + x_{0z}) - (y_{0,l+1} + \dots + y_{0z}), \right. \\ \left. (x_{1,l} + \dots + x_{l+z,l}) - (y_{1,l} + \dots + y_{l+z,l}) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда для построенного так набора $\{y_{ij}\}_{ij}$ получим

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}, \bar{a}) - \delta(\bar{y}, \bar{a}) &= (x_{0,l+1} + \dots + x_{0z}) - (y_{0,l+1} + \dots + y_{0z}) \\ &+ (x_{1,l} + \dots + x_{l+z,l}) - (y_{1,l} + \dots + y_{l+z,l}) - (y_{0l} - x_{0l}) \\ &- \min \left\{ (x_{0,l+1} + \dots + x_{0z}) - (y_{0,l+1} + \dots + y_{0z}), \right. \\ &\left. (x_{1,l} + \dots + x_{l+z,l}) - (y_{1,l} + \dots + y_{l+z,l}) \right\} \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Тогда

$$\inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}) \} = \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00} \} \\ = \dots = \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, x_{01} = s_{01}, \dots, x_{0z} = s_{0z} \}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$$\inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, \dots, x_{0z} = s_{0z} \} \\ = \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, \dots, x_{0z} = s_{0z}, x_{10} = s_{10} \} \\ = \dots = \inf \{ \delta(\bar{x}, \bar{a}): \bar{x} \in H(\bar{a}, \bar{b}), x_{00} = s_{00}, \dots, x_{0z} = s_{0z}, \\ x_{10} = s_{10}, x_{20} = s_{20}, \dots, x_{z0} = s_{z0} \}.$$

Таким образом, соотношение (29), а вместе с ним и теорема 3 доказаны.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1. Для доказательства этого предложения необходимо также убедиться в существовании и единственности функций S и T , удовлетворяющих соотношениям (5), (8), (9), что и будет установлено в конце доказательства. Фиксируем $L > -\infty$ и построим функции S_L и T_L , удовлетворяющие соотношениям (11)–(13). Обозначим

$$\tilde{S}_L(y, w) = S_L(y) + P([y, y + w)) \\ + \sup_{0 < v \leq w} (T_L(y + v - z) - S_L(y) - P([y, y + v)))^+, \\ \tilde{T}_L(y, w) = T_L(y) + Q([y, y + w)) \\ + \sup_{0 < v \leq w} (S_L(y + v - z) - T_L(y) - Q([y, y + v)))^+.$$

Положим $S_L(y) = T_L(y) = 0$ для всех $y \leq L$. Далее, последовательно для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ будем полагать $S_L(jz + w) = \tilde{S}_L(jz, w)$, $T_L(jz + w) = \tilde{T}_L(jz, w)$ при всех w , $0 < w \leq z$. Таким образом, функции S_L и T_L будут однозначно определены, и равенства (11) будут выполнены.

Докажем, что эти функции будут удовлетворять соотношениям (12), (13). Возьмем произвольно $y \geq L$ и набор положительных чисел $w_1, w_2, \dots, w_n$. Несложно проверить, что если для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ выполнено

$$S_L(y + w_1 + w_2 + \dots + w_{j-1} + w) = \tilde{S}_L(y + w_1 + w_2 + \dots + w_{j-1}, w)$$

при всех w , $0 < w < w_j$, то

$$S_L(y + w) = \tilde{S}_L(y, w) \quad \text{при всех } 0 < w < w_1 + w_2 + \dots + w_n, \quad (30)$$

$$S_L(y + w_0 + w) = \tilde{S}_L(y + w_0, w) \\ \text{при всех } 0 < w_0 < w_1, 0 < w < w_1 + w_2 + \dots + w_n - w_0. \quad (31)$$

Соотношение (30) доказывает (12) при всех $y = L + jz$, $j = 1, 2, 3, \dots$, а соотношение (31) — при всех $y \neq L + jz$, $j = 1, 2, 3, \dots$ (нужно в (12) подставить $y + w_0$ вместо y). Аналогично доказывается и (13).

Пусть f и g — произвольные функции, удовлетворяющие условиям: $0 \leq f(y) \leq \varepsilon$, $0 \leq g(y) \leq \varepsilon$ при всех y . Определим функции S'_L и T'_L равенствами

$$S'_L(y) = f(y), \quad T'_L(y) = g(y) \quad \text{при всех } y \leq L$$

и соотношениями (12), (13). Аналогично, функции S'_L и T'_L существуют и определены единственным образом. Индукцией по j несложно показать, что для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$S_L(y) \leq S'_L(y) \leq S_L(y) + \varepsilon, \quad T_L(y) \leq T'_L(y) \leq T_L(y) + \varepsilon \quad (32)$$

при всех y , $jz < y \leq (j+1)z$. А значит, последние неравенства выполнены для всех y . Имеем также при всех $M \leq L$

$$\max\{S_M(y), T_M(y)\} \leq P((-\infty, L)) + Q((-\infty, L)) \quad \text{при всех } y \leq L.$$

Следовательно, при всех $M \leq L$ ввиду (32) будем иметь

$$\begin{aligned} \max\{|S_M(y) - S_L(y)|, |T_M(y) - T_L(y)|\} \\ \leq P((-\infty, L)) + Q((-\infty, L)) \quad \text{при всех } y. \end{aligned}$$

Значит, функции S_L и T_L равномерно сходятся при $L \rightarrow -\infty$ к некоторым предельным функциям S и T . В силу равномерной сходимости S и T будут удовлетворять соотношениям (5), (8), (9) и (10), (14).

Таким образом, доказано существование функций S и T , удовлетворяющих соотношениям (5)–(7). Докажем теперь, что эти соотношения задают функции S и T единственным образом. Предположим, что некоторые функции S' и T' также удовлетворяют соотношениям (5)–(7). Заметим, что ввиду (8) и (9) функции S' и T' возрастают. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем такое $L > -\infty$, что $S'(L) < \varepsilon/2$, $T'(L) < \varepsilon/2$, $P((-\infty, L)) + Q((-\infty, 0)) < \varepsilon/2$. Тогда при всех y будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |S'(y) - S_L(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S(y) - S_L(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |T'(y) - T_L(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |T(y) - T_L(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$|S'(y) - S(y)| < \varepsilon, \quad |T'(y) - T(y)| < \varepsilon \quad \text{при всех } y.$$

Это и доказывает единственность функций S и T , задаваемых соотношениями (5)–(7).

Доказательство следствия. Корректность определения функций $S(y)$ и $T(y)$ не вызывает сомнений. Без ограничения общности можно считать, что $K = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда распределения P и Q с целочисленными носителями, а $z \geq 1$ — целое. Преобразуем формулу (18) теоремы 3. Обозначим $S'_j = S_j - p_j$, $T'_j = T_j - q_j$. Понятно, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S'_j = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} T'_j = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j. \quad (33)$$

Подставив S'_j и T'_j в соотношения (20)–(22), получим

$$\begin{aligned} S'_j &= T'_j = 0 \quad \text{при } j \leq 0, \\ S'_j &= \max\{S'_{j-1} + p_{j-1}, T'_{j-z-1} + q_{j-z-1}\} \quad \text{при } j > 0, \\ T'_j &= \max\{T'_{j-1} + q_{j-1}, S'_{j-z-1} + p_{j-z-1}\} \quad \text{при } j > 0, \end{aligned}$$

где два последних равенства эквивалентны следующим соотношениям:

$$S'_j = \max\{S'_{j-1} + p_{j-1}, T'_{j-z}\}, \quad j > 0, \quad (34)$$

$$T'_j = \max\{T'_{j-1} + q_{j-1}, S'_{j-z}\}, \quad j > 0, \quad (35)$$

поскольку $S'_{j-1} \geq S'_{j-2z-1} + p_{j-2z-1}$, $T'_{j-1} \geq T'_{j-2z-1} + q_{j-2z-1}$.

Далее, непосредственно из (34), (35) получим для целых $t \geq 1$ и $j \geq 0$

$$S'_{j+t} = \max \left\{ S'_j + p_j + p_{j+1} + \dots + p_{j+t-1}, \max_{1 \leq l \leq t} \left\{ T'_{j+l-z} + \sum_{k=l}^{t-1} p_{j+k} \right\} \right\}.$$

Следовательно, при $j \geq 0$ и $t \geq 1$

$$S'_{j+t} = S'_j + \sum_{k=0}^{t-1} p_{j+k} + \max_{0 \leq l \leq t} \left(T'_{j+l-z} - S'_j - \sum_{k=0}^{l-1} p_{j+k} \right)^+. \quad (36)$$

В (36) максимум можно брать по $0 \leq l \leq t$ вместо $1 \leq l \leq t$, так как $S'_j \geq T'_{j-z}$ при всех j . Аналогично,

$$T'_{j+t} = T'_j + \sum_{k=0}^{t-1} q_{j+k} + \max_{0 \leq l \leq t} \left(S'_{j+l-z} - T'_j - \sum_{k=0}^{l-1} q_{j+k} \right)^+. \quad (37)$$

Сравнив последние два выражения с (16), (17), видим, что $S(j) = S'_j$, $T(j) = T'_j$ при всех целых j , что и доказывает ввиду (33) утверждение следствия для целочисленных, а значит, и для произвольных неотрицательных заданных на одной решетке случайных величин и z , не меньшего, чем шаг решетки.

Докажем теперь утверждение следствия для произвольных распределений P и Q на множестве неотрицательных чисел. Фиксируем $z > 0$.

Обозначим $\gamma_n = z \cdot 2^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Для произвольной случайной величины φ через $\hat{\varphi}_n$ обозначим

$$\hat{\varphi}_n = \left\lfloor \frac{\varphi}{\gamma_n} \right\rfloor \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Тогда для любых случайных величин φ, ψ имеем $\mathbf{P}\{|\hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n| > j\gamma_n\} \leq \mathbf{P}\{|\varphi - \psi| > j\gamma_n\}$ при всех целых j . А значит, выполнены неравенства

$$\mathbf{P}\{|\varphi - \psi| > z + \gamma_n\} \leq \mathbf{P}\{|\hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n| > z\} \leq \mathbf{P}\{|\varphi - \psi| > z\}. \quad (39)$$

Обозначим через $\hat{P}_n, \hat{Q}_n$ распределения, полученные преобразованием (38) из P и Q соответственно. Тогда в силу (39)

$$\rho(z + \gamma_n, P, Q) \leq \rho(z, \hat{P}_n, \hat{Q}_n) \leq \rho(z, P, Q). \quad (40)$$

Отсюда с помощью предложения 2 в соответствии с «правилом двух милиционеров» получим

$$\rho(z, \hat{P}_n, \hat{Q}_n) \rightarrow \rho(z, P, Q) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Для $\hat{P}_n$ и $\hat{Q}_n$ определим $\hat{S}_n$ и $\hat{T}_n$ в соответствии с (15)–(17). Как было доказано выше,

$$\rho(z, \hat{P}_n, \hat{Q}_n) = \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) - 1 = \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{T}_n(y) - 1.$$

При каждом $n \geq 1$ индукцией по j с помощью (34), (35) легко показать, что

$$\hat{S}_n(j\gamma_n) \leq S(j\gamma_n), \quad \hat{T}_n(j\gamma_n) \leq T(j\gamma_n) \quad \text{при всех целых } j \geq 0. \quad (42)$$

Следовательно,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} S(y), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{T}_n(y) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} T(y) \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (43)$$

Покажем теперь, что выполнено соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} S(y), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(y) \quad (44)$$

для всех $y \in Y = \{j\gamma_l: j \text{ и } l \geq 1 \text{ целые}\}$. Имеем $\hat{S}_n(y) = S(y) = \hat{T}_n(y) = T(y) = 0$ при $y \leq 0$. Предположим, что для всех $y \in Y$ таких, что $y \leq k\gamma_1$, выполняется (44), и докажем, что тогда (44) выполняется и для $y = k\gamma_1 + t\gamma_i$ при всех целых $i \geq 1$ и $0 < t \leq 2^i$.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $n_0 \geq i$, что при всех $n \geq n_0$

$$|\hat{S}_n(k\gamma_1 + t\gamma_i) - S(k\gamma_1 + t\gamma_i)| < \varepsilon.$$

В соответствии с (36) имеем

$$\begin{aligned}\hat{S}_n(k\gamma_1 + t\gamma_i) &= \hat{S}_n(k\gamma_1) + P([k\gamma_1, k\gamma_1 + t\gamma_i]) \\ &+ \max_{0 \leq l \leq 2^{n-i}t} \left(\hat{T}_n(k\gamma_1 - z + l\gamma_n) - \hat{S}_n(k\gamma_1) \right. \\ &\quad \left. - P([k\gamma_1, k\gamma_1 + l\gamma_n]) \right)^+. \quad (45)\end{aligned}$$

Заметим теперь, что $T(y)$ — неубывающая, непрерывная слева функция и $\lim_{y \rightarrow \infty} T(y) \leq 2$ (из-за того, что $T(y) \leq P([0, y]) + Q([0, y])$ и $S(y) \leq P([0, y]) + Q([0, y])$ при всех y). Значит, множество $\nu = \{y: T(y+0) - T(y) > \varepsilon/6 \text{ или } P(\{y\}) > \varepsilon/6\}$ конечно. Выберем такое целое n_1 , что

$$\gamma_{n_1} < \min \{|a - b|: a \in \nu, b \in \nu, a \neq b\}. \quad (46)$$

Выберем такое $m \geq n_1$, что

$$\begin{aligned}\sup_{y \in \mathbf{R}} \left\{ P([y, y + \gamma_m] \setminus \nu) + T(y + \gamma_m) - T(y) \right. \\ \left. - \sum_{a \in \nu \cap [y, y + \gamma_m]} (T(a+0) - T(a)) \right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (47)\end{aligned}$$

Теперь возьмем такое $n_0 \geq m$, что при всех $n \geq n_0$ выполняется

$$\begin{aligned}2|\hat{S}_n(k\gamma_1) - S(k\gamma_1)| \\ + \max_{0 \leq l \leq t \cdot 2^{m-i}} |\hat{T}_n(k\gamma_1 - z + l\gamma_m) - T(k\gamma_1 - z + l\gamma_m)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (48)\end{aligned}$$

Ввиду неравенств (47) и (46) при всех $n \geq n_0$, $0 < l \leq t \cdot 2^{m-i}$ имеем

$$\begin{aligned}\left| \sup_{(l-1)\gamma_m \leq v \leq l\gamma_m} \left(T(k\gamma_1 + v - z) - S(k\gamma_1) - P([k\gamma_1, k\gamma_1 + v]) \right)^+ \right. \\ \left. - \max_{v=(l-1)\gamma_m, l\gamma_m} \left(T(k\gamma_1 + v - z) - S(k\gamma_1) - P([k\gamma_1, k\gamma_1 + v]) \right)^+ \right| < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Значит, при всех $n \geq n_0$ выполнено

$$\begin{aligned}\left| \sup_{0 < v \leq t\gamma_i} \left(T(k\gamma_1 + v - z) - S(k\gamma_1) - P([k\gamma_1, k\gamma_1 + v]) \right)^+ \right. \\ \left. - \max_{0 \leq l \leq t \cdot 2^{m-i}} \left(T(k\gamma_1 + l\gamma_m) - S(k\gamma_1) \right. \right. \\ \left. \left. - P([k\gamma_1, k\gamma_1 + l\gamma_m]) \right)^+ \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (49)\end{aligned}$$

В последнем выражении интервал $[k\gamma_1, k\gamma_1]$ означает пустое множество; супремум по $0 < v \leq t\gamma_i$ равен супремуму по $0 \leq v \leq t\gamma_i$, так как

$S(y) \geq T(y-z)$ при всех y . Сравнивая выражения (45) и (16), в силу (48) и (49) получим

$$\hat{S}_n(k\gamma_1 + t\gamma_i) > S(k\gamma_1 + t\gamma_i) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } n \geq n_0$$

и, комбинируя последнюю оценку с (42),

$$\left| S(k\gamma_1 + t\gamma_i) - \hat{S}_n(k\gamma_1 + t\gamma_i) \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } n \geq n_0,$$

что и доказывает (44) при $y = k\gamma_1 + t\gamma_i$, поскольку для $\hat{T}_n$ можно провести аналогичные рассуждения. Следовательно, (44) выполняется при всех $y \in Y$.

Теперь мы можем доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} S(y),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{T}_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(y).$$

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Возьмем такое число a , что $S(a) > \lim_{y \rightarrow \infty} S(y) - \varepsilon/2$. Выберем n_0 такое, что $\hat{S}_n(a) > S(a) - \varepsilon/2$ при всех $n \geq n_0$. Тогда при всех $n \geq n_0$ выполнено $\lim_{y \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) > \lim_{y \rightarrow \infty} S(y) - \varepsilon$. Отсюда получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) \geq \lim_{y \rightarrow \infty} S(y)$, что совместно с (43) дает $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{S}_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} S(y)$. Аналогично $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{T}_n(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(y)$. Последние два равенства вместе с (41) и доказывают утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве следствия для обоснования сходимости $\rho(z, \hat{P}_n, \hat{Q}_n) \rightarrow \rho(z, P, Q)$ (41) используется непрерывность справа функционала ρ по z . Но сходимость (41) можно обосновать и другим способом, вполне аналогичным примененному в доказательстве теоремы 2 в [4]. Выберем такие борелевские вероятностные меры μ_n на $\mathbf{R}^2$ с маргиналами $\hat{P}_n$ и $\hat{Q}_n$, что $\mu_n\{(a, b): |a - b| > z\} < \rho(z, \hat{P}_n, \hat{Q}_n) + 1/n$. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$, слабо сходящуюся к некоторой борелевской вероятностной мере на $\mathbf{R}^2$ с маргиналами P и Q . По теореме 1.2 в [6] $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}\{(a, b): |a - b| > z\} \geq \mu\{(a, b): |a - b| > z\}$. Учитывая, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n\{(a, b): |a - b| > z\} \leq \rho(z, P, Q)$ в силу (40), получим $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}\{(a, b): |a - b| > z\} = \rho(z, P, Q)$, что и влечет $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(z, \hat{P}_{n_k}, \hat{Q}_{n_k}) = \rho(z, P, Q)$.

В доказательстве теоремы 2 в [7] используется аппроксимация распределений P и Q распределениями P_n и Q_n с конечными носителями. При обосновании сходимости $\rho(z, P_n, Q_n) \rightarrow \rho(z, P, Q)$ используются рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2 в [4] (а значит, и аналогичные рассуждениям предыдущего абзаца настоящей работы). Однако для того, чтобы эта сходимость имела место, не достаточно только слабой сходимости $P_n \rightarrow P$, $Q_n \rightarrow Q$. Необходимо, чтобы также выпол-

нялось $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(z, P_n, Q_n) \leq \rho(z, P, Q)$. Приведем пример, поясняющий важность последнего соотношения.

При построении P_n и Q_n естественно использовать конечные подмножества $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$ некоторой всюду плотной в U последовательности V и строить для каждого n P_n и Q_n с носителями, сосредоточенными на V_n . В [7] последовательность V выбирается произвольно. Но, хотя для получения слабой сходимости $P_n \rightarrow P$, $Q_n \rightarrow Q$ можно взять произвольную всюду плотную последовательность V , для обеспечения сходимости $\rho(z, P_n, Q_n) \rightarrow \rho(z, P, Q)$ последовательность V нельзя выбирать произвольно.

Рассмотрим пространство $U = \{0, z\} \times \mathbf{R}$ с метрикой $|a - b| = ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2)^{1/2}$. Пусть P — равномерное распределение на отрезке $\{0\} \times [0, 1]$ относительно меры Лебега на этом отрезке, а Q — равномерное распределение на отрезке $\{z\} \times [0, 1]$ также относительно меры Лебега на этом отрезке. Очевидно, что $\rho(z, P, Q) = 0$, однако если выбрать всюду плотную последовательность $V = \{(0, y): y \text{ рационально}\} \cup \{(z, y + \sqrt{2}): y \text{ рационально}\}$, то при любом n будем иметь $\rho(z, P_n, Q_n) = 1$. И хотя в приведенном примере построение всюду плотной последовательности, ее конечных подмножеств и аппроксимирующих мер P_n и Q_n таких, что $\rho(z, P_n, Q_n) \rightarrow \rho(z, P, Q)$, не вызывает затруднений, в случае произвольного польского пространства возможность построения аппроксимирующих мер P_n и Q_n с нужными свойствами, насколько нам известно, пока не доказана.

Доказательство теоремы 1. Существование и единственность функций S и T доказаны в доказательстве предложения 1. Определим вероятностные меры P'_L и Q'_L на $\mathbf{R}$ следующим образом. Положим для любого борелевского $A \subset \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} P'_L(A) &= P(A \cap [L, \infty)) + I(L - z \in A) \cdot P((-\infty, L)), \\ Q'_L(A) &= Q(A \cap [L, \infty)) + I(L - z \in A) \cdot Q((-\infty, L)), \end{aligned}$$

где через I обозначена индикаторная функция. Для распределений P'_L и Q'_L построим функции S'_L и T'_L в соответствии с (15)–(17), взяв константу $K = L - z$. Так как утверждение следствия уже доказано, то

$$\rho(z, P'_L, Q'_L) = \lim_{y \rightarrow \infty} S'_L(y) - 1 = \lim_{y \rightarrow \infty} T'_L(y) - 1. \quad (50)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} S'_L(y) &= T'_L(y) = 0 \quad \text{при } y \leq L - z, \\ S'_L(y) &= P((-\infty, L)), \quad T'_L(y) = Q((-\infty, L)) \quad \text{при } L - z < y \leq L. \end{aligned}$$

Следовательно, как было установлено в доказательстве предложения 1 (32), для всех y выполнено

$$\max \left\{ |S'_L(y) - S_L(y)|, |T'_L(y) - T_L(y)| \right\} \leq \max \left\{ P((-\infty, L)), Q((\infty, L)) \right\},$$

где функции S_L и T_L определены в (11)–(13). Так как при $L \rightarrow -\infty$ функции S_L и T_L равномерно сходятся к функциям S и T , то функции S'_L и T'_L также равномерно сходятся к этим функциям, а значит,

$$\lim_{L \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} S'_L(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} S(y) = \lim_{L \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} T'_L(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(y).$$

Из определения функционала ρ следует, что

$$\rho(z, P'_L, Q'_L) \rightarrow \rho(z, P, Q) \quad \text{при } L \rightarrow -\infty.$$

Отсюда ввиду (50) и следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Для произвольного замкнутого множества $H \subset \mathbb{R}$ будем обозначать $H^+ = H \cap [0, \infty)$, $H^- = \{-y: y \in H, y \leq 0\}$,

$$\check{H} = \begin{cases} H^+, & \text{если } \check{P}(H^+) - \check{Q}((H^+)^z) \geq \check{P}(H^-) - \check{Q}((H^-)^z), \\ H^-, & \text{если } \check{P}(H^+) - \check{Q}((H^+)^z) < \check{P}(H^-) - \check{Q}((H^-)^z), \end{cases}$$

$\check{H} = \{y, -y: y \in H^+\}$. Далее, для произвольного замкнутого H имеем $P(H) - Q(H^z) \leq \frac{1}{2}(\check{P}(H^+) + \check{P}(H^-)) - \frac{1}{2}(\check{Q}((H^+)^z) + \check{Q}((H^-)^z)) \leq \check{P}(\check{H}) - \check{Q}(\check{H}^z)$. Значит, $\sup\{P(H) - Q(H^z): H \text{ замкнутое}\} \leq \sup\{\check{P}(H) - \check{Q}(H^z): H \text{ замкнутое}\}$. Также для произвольного замкнутого H имеем $\check{P}(H) - \check{Q}(H^z) = P(\check{H}) - Q(\check{H}^z)$. А значит, $\sup\{P(H) - Q(H^z): H \text{ замкнутое}\} \geq \sup\{\check{P}(H) - \check{Q}(H^z): H \text{ замкнутое}\}$. Следовательно, ввиду (4) выполнено

$$\rho(z, P, Q) = \rho(z, \check{P}, \check{Q}).$$

3. Примеры. Для обоснования примеров нам потребуется следующее

З а м е ч а н и е 3. Если в теореме 1 распределения P и Q непрерывные, то соотношения (6) и (7) эквивалентны выполнению следующих двух условий: при всех y

$$dS(y) = \max \left\{ dF(y), I(T(y-z) \geq S(y)) dT(y-z) \right\}, \quad (51)$$

$$dT(y) = \max \left\{ dG(y), I(S(y-z) \geq T(y)) dS(y-z) \right\}. \quad (52)$$

П р и м е р 1. Пусть $0 < s < t$. Обозначим через P и Q показательные распределения с параметрами s и t соответственно. Тогда при всех $z \geq 0$

$$\rho(z, P, Q) = e^{-zst/(t-s)} \left(\left(\frac{s}{t} \right)^{s/(t-s)} - \left(\frac{s}{t} \right)^{t/(t-s)} \right). \quad (53)$$

Для вычисления последнего выражения воспользуемся следствием. Предположим сначала, что $z > 0$. Возьмем константу $K = 0$ и построим функции S и T в соответствии с (15) и (51)–(52). Обозначим через E_s и E_t функции распределения, соответствующие мерам P и Q . При всех $y > 0$ имеем $E_s(y) < E_t(y)$. Пусть $y_1 = \min\{y > 0: E_t(y - z) \geq E_s(y)\}$. Несложно вычислить, что $y_1 = tz/(t-s)$. Обозначим $y_2 = (tz + \ln(t/s))/(t-s)$. Несложно вычислить, что при всех y , $y_1 \leq y < y_2$, выполняется $\frac{d}{dy} E_t(y - z) > \frac{d}{dy} E_s(y)$, а при всех $y > y_2$ выполнено $\frac{d}{dy} E_t(y - z) < \frac{d}{dy} E_s(y)$. Определим функцию $S(y)$ следующим образом:

$$S(y) = \begin{cases} E_s(y) & \text{при } y \leq y_1, \\ E_t(y - z) & \text{при } y_1 \leq y \leq y_2, \\ E_s(y) + E_t(y_2 - z) - E_s(y_2) & \text{при } y \geq y_2. \end{cases}$$

Очевидно, что $E_t(y) \geq S(y - z)$ при $y \leq y_2$. Обозначим $y_3 = \inf\{y: S(y - z) > E_t(y)\}$ и определим функцию $T(y)$ следующим образом:

$$T(y) = \begin{cases} E_t(y) & \text{при } y \leq y_3, \\ S(y - z) & \text{при } y \geq y_3. \end{cases}$$

Несложно проверить, что для построенных так функций S и T выполняются условия (15) и (51)–(52). Очевидно, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} S(y) - 1 = E_t(y_2 - z) - E_s(y_2) = e^{-zst/(t-s)} \left(\left(\frac{s}{t} \right)^{s/(t-s)} - \left(\frac{s}{t} \right)^{t/(t-s)} \right).$$

Необходимо заметить, что последнее выражение мы вычислили при $z > 0$, но по предложению 2 равенство (53) выполняется и при $z = 0$.

Пример 2. Пусть $0 < \sigma < \tau$ и b — некоторые числа. Обозначим через P и Q нормальные распределения с дисперсиями σ^2 и τ^2 и математическими ожиданиями b и 0 соответственно. Тогда

$$\rho(z, P, Q) = \Phi\left(\frac{y_1 - z}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - b}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{y_2 - z - b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_2}{\tau}\right), \quad (54)$$

где

$$y_1 = \frac{b/\sigma^2 - z/\tau^2 - \sqrt{(z-b)^2/(\sigma^2\tau^2) + 2(\sigma^{-2} - \tau^{-2}) \ln(\tau/\sigma)}}{\sigma^{-2} - \tau^{-2}},$$

$$y_2 = \frac{(z+b)/\sigma^2 + \sqrt{(z+b)^2/(\sigma^2\tau^2) + 2(\sigma^{-2} - \tau^{-2}) \ln(\tau/\sigma)}}{\sigma^{-2} - \tau^{-2}}$$

и Φ — функция распределения стандартного нормального закона.

Предположим сначала, что $z > 0$, и воспользуемся теоремой 1. Как и в примере 1, мы явно построим функции S и T , удовлетворяющие

соотношениям (5) и (51)–(52). Известно, что $F(y) = \Phi((y-b)/\sigma)$, $G(y) = \Phi(y/\tau)$. Обозначим

$$y_1 = \min \left\{ y: \frac{d}{dy} G(y-z) \leq \frac{d}{dy} F(y) \right\}.$$

Ясно, что нужно положить $S(y) = G(y-z)$ и $T(y) = G(y)$ при $y \leq y_1$, $S(y) = F(y) + G(y_1-z) - F(y_1)$ при $y_1 \leq y \leq w$, где $w = \inf\{y > y_1: S(y) \neq F(y) + G(y_1-z) - F(y_1)\}$. Обозначим $y_3 = \min\{y: S(y-z) \geq G(y)\}$. Тогда $y_3 < w$ и при всех $y \leq y_3$ имеем $T(y) = G(y)$. Обозначим также $y_2 = \min\{y > y_3: \frac{d}{dy} S(y-z) \leq \frac{d}{dy} G(y)\}$. Тогда $y_2 < w$ и при всех y , $y_3 \leq y \leq y_2$, имеем $T(y) = S(y-z) = F(y-z) + G(y_1-z) - F(y_1)$, а при всех $y \geq y_2$ имеем $T(y) = G(y) + S(y_2-z) - G(y_2) = G(y) + F(y_2-z) - G(y_2) + G(y_1-z) - F(y_1)$. Значит, $w = \min\{y > y_2: T(y-z) \geq F(y) + G(y_1-z) - F(y_1)\}$ и при всех $y \geq w$ выполнено $S(y) = T(y-z)$. Таким образом, мы определили функции S и T на всей вещественной прямой. Несложно вычислить, что

$$y_1 = \frac{b/\sigma^2 - z/\tau^2 - \sqrt{(z-b)^2/(\sigma^2\tau^2) + 2(\sigma^{-2} - \tau^{-2}) \ln(\tau/\sigma)}}{\sigma^{-2} - \tau^{-2}},$$

$$y_2 = \frac{(z+b)/\sigma^2 + \sqrt{(z+b)^2/(\sigma^2\tau^2) + 2(\sigma^{-2} - \tau^{-2}) \ln(\tau/\sigma)}}{\sigma^{-2} - \tau^{-2}}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T(y) - 1 = F(y_2 - z) - G(y_2) + G(y_1 - z) - F(y_1),$$

что и доказывает (54) при $z > 0$. При $z = 0$ равенство (54) выполняется ввиду предложения 2.

4. Построение ближайших случайных величин. Решение задачи Монжа–Канторовича включает в себя также построение ближайших в смысле (2) случайных величин. Мы построим на одном вероятностном пространстве такие случайные величины φ и ψ с распределениями P и Q соответственно, для которых $\mathbf{P}\{|\varphi - \psi| > z\} = \rho(z, P, Q)$. Построение ближайших случайных величин при $z = 0$ описано в [5], поэтому всюду далее в этом пункте считаем, что $z > 0$.

Пусть θ — бернуллиевская случайная величина с вероятностью успеха $\rho = \rho(z, P, Q)$ и ω — равномерно распределенная на отрезке $(0, 1)$ случайная величина, не зависящая от θ . Рассмотрим сначала случай $0 < \rho < 1$. Положим

$$V(y) = F(y) - T(y+z) + G(y+z),$$

$$W(y) = G(y) - S(y+z) + F(y+z),$$

где функции S и T определены в теореме 1. Далее мы покажем, что $(1-\rho)^{-1}V(y)$, $(1-\rho)^{-1}W(y)$, $\rho^{-1}(F(y) - V(y))$, $\rho^{-1}(G(y) - W(y))$ — это

функции некоторых распределений. Зададим случайные величины φ_1 и ψ_1 квантильными преобразованиями

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{1-\rho} V \right)^{-1}(\omega), \quad \psi_1 = \left(\frac{1}{1-\rho} W \right)^{-1}(\omega).$$

Далее будет доказано, что

$$|\varphi_1 - \psi_1| \leq z \quad \text{п.н.} \quad (55)$$

Зададим теперь независимые от θ случайные величины φ_2 и ψ_2 с распределениями $\rho^{-1}(F - V)$ и $\rho^{-1}(G - W)$ соответственно. Возьмем $\varphi = (1 - \theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2$, $\psi = (1 - \theta)\psi_1 + \theta\psi_2$. Тогда φ и ψ имеют распределения P и Q соответственно, и $\mathbf{P}\{|\varphi - \psi| > z\} = \rho$. В случае $\rho = 1$ случайные величины φ и ψ , с распределениями P и Q соответственно, можно задать произвольно.

В случае $\rho = 0$ можно взять квантили $\varphi = F^{-1}(\omega)$, $\psi = G^{-1}(\omega)$. Действительно, в этом случае

$$S(y) \equiv F(y), \quad T(y) \equiv G(y).$$

А значит,

$$V(y) \equiv F(y), \quad W(y) \equiv G(y), \quad |F^{-1}(\omega) - G^{-1}(\omega)| \leq z \quad \text{п.н.}$$

Покажем теперь, что функции $(1 - \rho)^{-1}V(y)$, $(1 - \rho)^{-1}W(y)$, $\rho^{-1}(F(y) - V(y))$, $\rho^{-1}(G(y) - W(y))$ — это функции распределения. Непрерывность слева и совпадение предела на $+\infty$ с 1 (и на $-\infty$ с 0) не вызывает сомнений. Покажем, что эти функции не убывают. Возрастание функций $F(y) - V(y)$ и $G(y) - W(y)$ следует непосредственно из свойств (8) и (9) функций S и T .

Покажем, что для любого w , $0 < w < z$, выполнено $V(y + w) \geq V(y)$ при всех y . Имеем

$$\begin{aligned} V(y + w) - V(y) &= F(y + w) - F(y) \\ &- \sup_{0 < v \leq w} \left(S(y + v) - T(y + z) - Q([y + z, y + z + v]) \right)^+. \end{aligned}$$

(В последнем выражении величина $T(y + z + w)$ представлена через $T(y + z)$ по формуле (9).) Последнее выражение неотрицательно, если выполнено

$$F(y + w) - F(y) - S(y + w) + T(y + z) \geq 0.$$

Выразим теперь $S(y + w)$ через $S(y)$ по формуле (8). Имеем

$$-S(y) - \sup_{0 < v \leq w} \left(T(y - z + v) - S(y) - P([y, y + v]) \right)^+ + T(y + z) \geq 0.$$

Для справедливости последнего неравенства достаточно, чтобы выполнялось $-S(y) - T(y - z + w) + S(y) + T(y + z) \geq 0$. Последнее соотношение всегда верно при $0 < w < z$. Следовательно, функция $V(y)$ не убывает. Аналогично не убывает и $W(y)$.

Докажем теперь (55). Для этого достаточно показать, что

$$W(y - z) \leq V(y) \leq W(y + z) \quad \text{при всех } y. \quad (56)$$

Покажем, что при всех y выполнено $V(y) \geq W(y - z)$. Имеем

$$V(y) - W(y - z) = G(y + z) - G(y - z) - T(y + z) + S(y).$$

Выразим $T(y + z)$ через $T(y - z)$ по формуле (9):

$$\begin{aligned} V(y) - W(y - z) &\geq S(y) - T(y - z) - \sup_{0 < v \leq 2z} (S(y - 2z + v) - T(y - z))^+ \\ &\geq S(y) - T(y - z) - S(y) + T(y - z) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $V(y) \geq W(y - z)$ при всех y . Аналогично, $V(y) \leq W(y + z)$ при всех y . Следовательно, имеет место (56).

5. Пуассоновская аппроксимация биномиального распределения. Обозначим через Q биномиальное распределение с параметрами n, p , а через P — пуассоновское распределение с параметром $\lambda = np$. В этом пункте оценивается величина $\rho(z, P, Q)$.

Один из первых результатов, связанных с данной проблемой, был получен Ю. В. Прохоровым в 1953 г. (см. [9]). Им было доказано, что $\rho(0, P, Q) \leq cp$, где c — абсолютная постоянная. Позже Л. Ле Кам установил (см. [10]), что также выполнено $\rho(0, P, Q) \leq np^2$. Комбинируя эти два неравенства, получим

$$\rho(0, P, Q) \leq \min\{cp, np^2\}.$$

А. Барбур и П. Холл в [11] показали, что имеет место аналогичная оценка снизу.

В работах [12]–[15], [8] при исследовании потраекторной близости процесса частных сумм и соответствующего пуассоновского процесса были получены, как частные случаи, оценки расстояния $\rho(z, P, Q)$ для произвольного z . Наиболее сильные оценки потраекторной близости содержатся в работе И. С. Борисова [8]. В частности, для n -х сумм выполняется

$$\rho(z, P, Q) \leq \begin{cases} (np^2)^{\lfloor z \rfloor + 1} \exp\{-C_1 z \ln \ln(z + 2) + C_2\}, & \text{если } np \geq 1, \\ np^{\lfloor z \rfloor + 2} \exp\{-C_3 z + C_4\}, & \text{если } np \leq 1, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — абсолютные положительные постоянные.

Однако для n -х сумм эти оценки уже не являются оптимальными. Так, П. Майор в [12] доказал, что для $p \leq n^{-2/3}$ имеет место неравенство

$$\rho(C, P, Q) < K \exp \left(-\frac{1}{8} \sqrt{n} \ln n \right), \quad (57)$$

где C, K — некоторые абсолютные постоянные.

С помощью теоремы 1 в [16] доказан следующий результат.

Теорема 4. Пусть $p \leq 1/2$ и $z \geq 1$ — целое. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(z, P, Q) &< \frac{7}{3} \exp \left\{ -\frac{1}{27} \frac{z^2}{np^3} \right\} \quad \text{при } z \leq np^2, \\ \rho(z, P, Q) &< \exp \left\{ -\frac{1}{15} np \right\} \quad \text{при } z \geq np^2, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \rho(z, P, Q) &< \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sqrt{nz \left(\ln \frac{z}{np^2} - 2 \right)^3} \right\} \\ \text{при } e^4 np^2 &\leq z \leq \frac{n(1-p)}{\ln(1/p)}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \rho(z, P, Q) = P([n+z+1, \infty)) &< \exp \left\{ -(n+z) \ln \frac{n+z}{enp} \right\} \\ \text{при } z &\geq \frac{n(1-p)}{\ln(1/p)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \rho(z, P, Q) &> \exp \left\{ -4 \sqrt{nz \left(\ln \frac{z}{np^2} + 4 \right)^3} \right\}, \\ \text{если } p &\leq \frac{1}{10} \text{ и } np^2 \leq z \leq \frac{n}{10 \ln(1/p)}. \end{aligned} \quad (61)$$

З а м е ч а н и е 4. Неравенство (61) показывает, что в некотором диапазоне значений n, p, z оценки (58), (59) имеют неулучшаемый порядок логарифмической асимптотики. Оценка (60) также точна в этом смысле, так как

$$\begin{aligned} &P([n+z+1, \infty)) \\ &= \frac{\theta}{\sqrt{2\pi(n+z+1)}} \exp \left\{ -(n+z+1) \ln \frac{n+z+1}{enp} - np \right\}. \end{aligned}$$

где $e^{-1/12(n+z+2)} < \theta < (1-p)^{-1} e^{-1/12(n+z+1)}$ (см. [16]).

В заключение сравним утверждение теоремы с оценкой (57).

1. В отличие от результата П. Майора, теорема 4 содержит оценки расстояния $\rho(t, P, Q)$ для всех $t \geq 1$.

2. Для того чтобы применение теоремы 4 имело смысл, достаточно, чтобы $np^3 \rightarrow 0$, в то время как для выполнения неравенства (57) необходимо, чтобы $np^{3/2} \leq 1$.

3. Для фиксированного z равномерно по всем $p \leq n^{-2/3}$ в силу неравенств (59), (60) имеем

$$\rho(z, P, Q) < K_1 \exp \left\{ -K_2 \sqrt{n(\ln n)^3} \right\},$$

где K_1 и K_2 — легко вычисляемые абсолютные положительные постоянные. Следовательно, при фиксированном z и всех $p \leq n^{-2/3}$ оценка теоремы 4 имеет большую, чем в неравенстве (57), скорость убывания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л. В. О перемещении масс. — Докл. АН СССР, 1942, т. 37, № 7–8, с. 227–229.
2. Канторович Л. В. Об одной проблеме Монжа. — Успехи матем. наук, 1948, т. 3, в. 2, с. 225–226.
3. Рачев С. Т. Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 625–653.
4. Dudley R. M. Distances of probability measures and random variables. — Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, № 5, p. 1563–1572.
5. Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 469–497.
6. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
7. Schay G. Nearest random variables with given distributions. — Ann. Probab., 1974, v. 2, № 1, p. 163–166.
8. Борисов И. С. Пуассоновская аппроксимация процесса частных сумм в банаховых пространствах. — Сиб. матем. журн., 1996, т. 37, в. 4, с. 723–731.
9. Прохоров Ю. В. Асимптотическое поведение биномиального распределения. — Успехи матем. наук, 1953, в. 8, № 3, с. 135–142.
10. Le Cam L. Remarques sur le théorème limite central dans les espaces localement convexes. — Les Probabilités sur les Structures Algébriques (Actes Colloque Internat., v. 186). Paris: C.N.R.S., 1970, p. 233–249.
11. Barbour A. D., Hall P. On the rate of Poisson convergence. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1984, v. 95, p. 473–480.
12. Major P. A note on the approximation of the uniform empirical process. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 1, p. 129–139.
13. Horváth L. A note on the rate of Poisson approximation of empirical processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 2, p. 724–726.
14. Borisov I. S. Strong Poisson and mixed approximations of sums of independent random values in Banach spaces. — Siberian Adv. Math., 1993, v. 3, № 2, p. 1–13.
15. Adell J. A., de la Cal J. Coupling methods in Poisson approximation of binomial processes. Preprint. Zaragoza: Universidad de Zaragoza, 1994.
16. Рузанкин П. С. О пуассоновской аппроксимации биномиального распределения. — Сиб. матем. журн., 2001, т. 42, в. 2, с. 414–424.

Поступила в редакцию
18.I.2000