Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Интерпретация вероятностей и их p -адические расширения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 311–325

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:05:50

© 2001 г.

ХРЕННИКОВ А. Ю.*

ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИХ p -АДИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ¹⁾

Эта статья посвящена основаниям теории вероятностей, точнее интерпретации вероятности. Мы покажем, что вероятностная модель Колмогорова на основе теоретико-множественного подхода (1933) является лишь одной из возможных моделей, которые могут быть построены на основе стандартной интерпретации понятия вероятности. В этой статье основное внимание уделено так называемой относительной или комбинаторной интерпретации вероятностей: $P(A) = |A|/|\Omega|$, где A — подмножество конечной популяции Ω , $|A|$ означает количество элементов A . Мы покажем, что, используя p -адические числа, комбинаторное определение вероятностей можно расширить до бесконечной популяции Ω . Такие обобщенные p -адические вероятности имеют свойства обычных колмогоровских вероятностных мер. Однако множество событий не может рассматриваться как σ -алгебра или даже как алгебра. Кроме того, p -адические вероятности позволяют по-новому взглянуть на нулевые условные вероятности и их отношение к отрицательным вероятностям.

Ключевые слова и фразы: p -адические числа, основания теории вероятностей, вероятностная модель, неравенство Белла.

1. Введение

А. Н. Колмогоров интерпретирует вероятность следующим образом: «... можно предположить, что некоторым событиям A , которые могут наступить или же не наступить после осуществления условий $\mathfrak{S}$, поставлены в соответствие определенные действительные числа $P(A)$, обладающие следующими свойствами:

А) Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий $\mathfrak{S}$ будет повторен большое число n раз и если при этом через m

Khrennikov A. Yu. Interpretations of probability and their p -adic extensions.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

*School of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Växjö University, 35195 Växjö, Sweden.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Alexander von Humboldt и Rikkyo University Fellowships, SFB-237, Ruhr University и Volkswagen Foundation.

обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться от $P(A)$.

В) Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий $\mathfrak{S}$ событие A не будет иметь места.» (См. [1].)

В действительности, такая интерпретация²⁾ представляет собой смесь двух совершенно различных интерпретаций понятия вероятности. Часть А) есть не что иное как частотная интерпретация, по которой вероятности определяются относительными частотами в случайных последовательностях («коллективах») (см. [2], [3] и замечания в книге Колмогорова [1]). Часть В) — это теоретико-множественная формализация комбинаторного подхода определения вероятности. Действительно, последнее определение вероятности события A , $A \subset \Omega$, где Ω — конечная популяция, определяется отношением

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad (1)$$

где $|A|$ обозначает число элементов множества A .

Важно заметить, что на основе действительного анализа нельзя предложить никакого обобщения комбинаторного определения вероятностей для бесконечной популяции, отличного от колмогоровского. Конечно теоретико-множественный подход Колмогорова дает лишь опосредованное расширение комбинаторного определения вероятностей для бесконечных популяций. Основная формула (1) не сохраняется в колмогоровском определении для бесконечных популяций. Решающим моментом здесь является то обстоятельство, что множество действительных чисел $\mathbf{R}$ не содержит *актуальных бесконечностей*. Таким образом, $|\Omega|$ не имеет смысла в $\mathbf{R}$ в случае бесконечной популяции Ω .

Наша основная идея опирается на комбинаторное определение вероятности. На ее основе мы предложим новые математические модели теории вероятностей, отличные от колмогоровской, а именно, неколмогоровские модели.³⁾ В [5]–[7] это было сделано для частотной теории вероятностей посредством изучения поведения относительных частот в топологиях отличных от топологии действительных чисел, в частности, для p -адических топологий (см. § 2 этой статьи и [8]). В этой работе мы сделаем то же и для комбинаторных (относительных) вероятностей. Мы расширим определение (1) для бесконечных популяций с помощью поля p -адических чисел. Использование p -адических чисел имеет следующую

²⁾ Конечно, здесь А. Н. Колмогоров следовал исторической традиции. Кажется, что теорема Бернулли была первым математическим утверждением, интерпретированным таким образом.

³⁾ Другая возможность состоит в изменении (только формально) колмогоровской аксиоматики (1933) теории вероятностей (см. [4]).

мотивацию. Все отношения в (1) являются рациональными числами. Таким образом, чтобы расширить определение (1) на бесконечные популяции Ω необходимо использовать некоторую систему чисел, которая, с одной стороны, содержит поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а с другой — содержит актуальные бесконечности. Должно быть также естественным минимальное расширение $\mathbb{Q}$. Системы p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ являются минимальными (в смысле пополнения $\mathbb{Q}$) расширениями $\mathbb{Q}$, которые содержат бесконечно большие натуральные числа, называемые p -адическими целыми. Различным p -адическим полям соответствуют различные классы бесконечно больших натуральных чисел. Таким образом, они могут быть использованы для математического описания комбинаторных (относительных) вероятностей для различных бесконечных популяций Ω .

Комбинаторные вероятности как p -адические числа обладают теми же свойствами, что и обычные. Однако система событий не может рассматриваться как σ -алгебра или даже как алгебра.

Наша p -адическая модель дает возможность расщепить нулевые условные вероятности. События A и B , имеющие вероятности нуль в обычном смысле, могут иметь различные p -адические вероятности $P_p(A) \neq P_p(B)$. Более того, бесконечно малые вероятности $P_p(A)$ и $P_p(B)$ можно сравнивать. Такое p -адическое расщепление условных нулевых вероятностей может быть использовано для лучшего понимания роли нулевых вероятностей в стандартной колмогоровской модели. Интересно, что бесконечно малые p -адические вероятности соответствуют бесконечной последовательности отрицательных чисел: $\dots > P = -100 > P = -99 > \dots > P = -1 > P = 0$. Эта связь между бесконечно малыми p -адическими вероятностями и отрицательными вероятностями может быть полезна для лучшего понимания отрицательных вероятностей. Заметим, что отрицательные вероятности часто возникают в квантовой теории, см., например, [9]–[11]. Однако отсутствие естественной интерпретации таких вероятностей ограничивает их применение, по крайней мере, на математическом уровне строгости.

2. p -адические числа и бесконечно большие натуральные числа

Вспомним некоторые факты из теории p -адических чисел. Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ строится как пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$, где $|\cdot|$ — обычная норма разности, заданная абсолютным значением. Поля p -адических чисел $\mathbb{Q}$ строятся таким же образом, но с использованием других норм. Для произвольного простого числа $p > 1$, p -адическая норма (метрика) задается следующим образом. Вначале она определяется для натураль-

ных чисел. Каждое натуральное число n можно представить в виде произведения простых чисел $n = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_r}$. Положим $|n|_p = p^{-r}$, $|0|_p = 0$ и $|-n|_p = |n|_p$. В этом случае легко расширить определение p -адической нормы $|\cdot|_p$ на множество всех рациональных чисел, полагая $|n/m|_p = |n|_p/|m|_p$ для $m \neq 0$. Пополнение поля $\mathbf{Q}$ относительно метрики $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ есть локально компактное поле p -адических чисел $\mathbf{Q}_p$. В некотором смысле, поля $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_p$ являются единственными полями, так как согласно теореме Островского [8] нормы $|\cdot|$ и $|\cdot|_p$ являются единственно возможными нормами в поле $\mathbf{Q}$, но обладают совершенно разными свойствами. Так p -адическая норма удовлетворяет неравенству $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, $x, y \in \mathbf{Q}_p$. Положим $U_r(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p: |x - a|_p \leq r\}$, где $r = p^{-n}$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $S_r(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p: |x - a|_p = r\}$. Множество $U_r(a)$ — замкнутый шар, а множество $S_r(a)$ — сфера радиуса r . Всякий p -адический шар $U_r(0)$ есть аддитивная подгруппа в $\mathbf{Q}_p$, а шар $U_1(0)$ является кольцом, которое называется *кольцом целых p -адических чисел* и обозначается $\mathbf{Z}_p$.

Любому $x \in \mathbf{Q}_p$ соответствует единственное каноническое разложение (сходящееся в $|\cdot|_p$ -норме).

$$x = \frac{a_{-n}}{p^n} + \dots + a_0 + \dots + a_k p^k + \dots, \quad (2)$$

где $a_j = \{0, 1, \dots, p-1\}$ называются «разрядами или коэффициентами» p -адического разложения. Элемент $x \in \mathbf{Z}_p$ имеет разложение $x = a_0 + \dots + a_k p^k + \dots$ и, таким образом, однозначно соответствует последовательности

$$x = a_0 \dots a_k \dots \quad (3)$$

Заметим, что множество натуральных чисел $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}_p$. Поэтому каждое таким образом представленное натуральное число имеет конечное число ненулевых коэффициентов. Каждый элемент $x \in \mathbf{Z}_p$, имеющий бесконечное число ненулевых разрядов в представлении (3) мы будем интерпретировать как *бесконечно большое натуральное число*.

3. p -адические относительные вероятности

Интерпретация p -адических чисел

$$N = l_0 + l_1 p + \dots + l_s p^s + \dots, \quad l_s = 0, 1, \dots, p-1, \quad (4)$$

с бесконечным числом ненулевых разрядов l_s как бесконечно больших чисел, позволяет рассматривать бесчисленные актуальные бесконечности. Поэтому мы можем изучать относительные вероятности для бесконечных популяций.

3.1. Бесконечные популяции. Рассмотрим некоторые популяции $\Omega \equiv \Omega(N)$, имеющие p -адический «объем» N , где N есть p -адическое целое (4). Если N конечно, то Ω — обычная конечная популяция. Если N

бесконечно, то Ω имеет некоторую p -адическую структуру. Рассмотрим последовательность конечных популяций $\Omega^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, имеющих $m_j = |\Omega^{(j)}| = l_j p^j$ элементов. Положим

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Omega^{(j)}. \quad (5)$$

Мы определим число элементов в Ω как $|\Omega| = \sum_{j=0}^{\infty} m_j = N$. Представление (5) для всей популяции Ω как объединение подпопуляций $\Omega^{(j)}$ (с числом элементов $m_j = l_j p^j$) будет играть решающую роль в наших вероятностных рассмотрениях. Таким образом, Ω — это не только произвольная популяция объема N , но она также представляет собой иерархическую структуру, соответствующую представлению (5). Популяцию Ω можно представить в виде башни $T = T_\Omega$ с бесконечным числом этажей, причем на j -м этаже находится популяция $\Omega^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Положим $N_k = l_0 + l_1 p + \dots + l_k p^k$ и $\Omega_k = \bigcup_{j=0}^k \Omega^{(j)}$ — популяция первых $k+1$ этажей. Здесь $|\Omega_k| = \sum_{j=0}^k m_j = N_k$.

p -адическая топология в башне T создает иерархию среди жителей башни: наибольшими преимуществами обладают жители нулевого этажа, жители первого этажа имеют меньшие преимущества и т.д.

3.2. p -адические относительные вероятности. Для всякого подмножества $A \subset \Omega$ положим $n_k(A) \equiv n_k^\Omega(A) = |A \cap \Omega_k|$. То есть $n_k(A)$ есть число жителей первых $k+1$ этажей башни T , которые принадлежат множеству A . Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k(A) = n^\Omega(A) = n(A). \quad (6)$$

Величину $n(A)$ назовем p -адическим объемом множества A . Мы определим вероятность множества A с помощью стандартного отношения

$$\mathbf{P}(A) \equiv \mathbf{P}_\Omega(A) = \frac{n(A)}{N}. \quad (7)$$

Обозначим семейство всех $A \subset \Omega$, для которых существует (6), через $\mathcal{G}_\Omega$. Множества $A \subset \mathcal{G}_\Omega$ будем называть *событиями*.

Пример 3.1. Пусть все разряды $l_j > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, т.е. в башне T не существует пустых этажей. Предположим, что популяция включает в себя представителей обоих полов. Проведем некоторое демографическое исследование.

(А) Предположим, что на 0-м этаже живет только один мужчина, на 1-м этаже — p мужчин, ..., на s -м этаже — p^s мужчин, Множество A_m всех мужчин башни T имеет p -адический объем

$$n(A_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^k p^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p} = \frac{1}{1 - p}.$$

Таким образом, p -адическая относительная вероятность события A_m (на s -м этаже находится ровно p^s мужчин) корректно определена $\mathbf{P}(A_m) = (N(1 - p))^{-1}$.

Пусть $p > 2$, и пусть $N = 2 + 2p + \dots + 2p^s + \dots = 2/(1-p)$, т.е. на 0-м этаже — 2 жителя, на 1-м этаже — $2p$ жителя, ..., на s -м этаже — $2p^s$ жителей и так далее. Тогда $P(A_m) = \frac{1}{2}$. Пусть A_f — число женщин в башне, тогда $P(A_f) = \frac{1}{2}$. Для этой популяции Ω p -адическая вероятность наблюдать мужчину в башне T равна p -адической вероятности наблюдать женщину в башне T . Таким образом не возникает противоречий с нашей стандартной вероятностной интуицией.

Пусть $p > 3$ и $N = 3 + 3p + \dots + 3p^s + \dots = 3/(1-p)$. Здесь $P(A_m) = \frac{1}{3}$ и $P(A_f) = \frac{2}{3}$. Для этой популяции Ω p -адическая вероятность наблюдать женщину в башне T в два раза больше, чем p -адическая вероятность наблюдать мужчину. Таким образом, снова нет противоречий с нашей обычной интуицией.

(В) Предположим, что мужчины живут только на 0-м этаже, а на остальных этажах живут женщины. Тогда, конечно, p -адические объемы A_m и A_f соответственно равны l_0 и $N - l_0$. Таким образом, наблюдения мужчин (также как и женщин) являются событиями в нашей p -адической модели.

Пусть $N = 1 + p + \dots + p^s + \dots = 1/(1-p)$. Тогда $P(A_m) = l_0(1-p)$ — отрицательное целое и $P(A_f) = 1 + l_0(p-1)$ — натуральное число большее 1! Здесь наша стандартная интуиция не работает. Поэтому мы должны (см. § 4) развить новую p -адическую вероятностную интуицию.

(С) Предположим, что на каждом этаже башни T находится только один мужчина. Тогда $P(A_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)$ не существует в $\mathbb{Q}_p$, т.е. наблюдение мужчин в башне T в этом случае не является событием в нашей p -адической вероятностной модели.

3.3. Структура множества событий. Мы изучим некоторые свойства семейства событий. Вначале мы рассмотрим алгебру множеств $F \equiv F_\Omega$, состоящую из всех конечных подмножеств Ω и их дополнений. Как обычно, $\bar{A}$ обозначает дополнение множества A .

Предложение 3.1. *Имеет место $F \subset \mathcal{G}_\Omega$.*

Доказательство. Пусть A — произвольное конечное множество. Тогда $n(A) = |A|$ и (7) имеет вид $P(A) = |A|/|\Omega|$. Теперь пусть $B = \bar{A}$. Тогда $|B \cap \Omega_k| = |\Omega_k| - |A \cap \Omega_k|$. Следовательно, существует $\lim_{k \rightarrow \infty} |B \cap \Omega_k| = N - |A|$. Из этого неравенства вытекает стандартная формула $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ и, в частности, $P(\Omega) = 1$.

Предложение 3.2. *Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Тогда $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$ и $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.*

Предложение 3.3. *Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$, 2) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$,
- 3) $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$, 4) $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{G}_\Omega$,

и имеют место стандартные формулы:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2), \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(A_1 \setminus A_2) = \mathbf{P}(A_1) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2). \quad (9)$$

Доказательство. Очевидно, что $n_k(A_1 \cup A_2) = n_k(A_1) + n_k(A_2) - n_k(A_1 \cap A_2)$. Поэтому, если, например, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$, то существует предел правой части последнего равенства при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$ и справедливо (8). Подобным образом доказываются и другие утверждения.

В общем случае из того, что $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$ не следует, что $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$. Покажем это с помощью предложения 3.3. Для этого достаточно найти $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$ такие, что $A_1 \cap A_2 \notin \mathcal{G}_\Omega$. Это легко сделать. Пусть, например, $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_\Omega$ таковы, что $|A_1 \cap A_2 \cap \Omega^{(i)}| = 1$ для непустых этажей, т.е. на каждом непустом этаже существует только один элемент $x \in A_1 \cap A_2$. Если N бесконечно, то $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k(A_1 \cap A_2)$ не существует.

Таким образом, $\mathcal{G}_\Omega$ не является алгеброй множеств.

Более того, $\mathcal{G}_\Omega$ замкнута только относительно конечного объединения множеств, имеющих пустое пересечение.

Таким образом, $\mathcal{G}_\Omega$ незамкнута относительно счетного объединения таких множеств, так как в общем случае из того, что $A_j \in \mathcal{G}_\Omega$, $j = 1, 2, \dots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ не вытекает, что $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}_\Omega$.

Естественные дополнительные допущения: а) сумма $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j)$ сходится в $\mathbf{Q}_p$ и (более строгое) в) $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{P}(A_j)|_p < \infty$ также не обеспечивают включение $A \in \mathcal{G}_\Omega$.

Пример 3.2. Пусть $p = 2$, $N = -1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + \dots$. Предположим, что множества A_j имеют следующую структуру: $|A_j \cap \Omega^{(3(j-1))}| = 1$, $|A_j \cap \Omega^{(3j-1)}| = 2^{3j-1} - 1$ и $A_j \cap \Omega^{(i)} = \emptyset$, $i \neq 3(j-1), 3j-1$, т.е. множество A_j сосредоточено на двух этажах башни T . В частности, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Если $A_j \in F$, то $A_j \in \mathcal{G}_\Omega$ и $\mathbf{P}(A_j) = -2^{3j-1}$, $j = 1, 2, \dots$. Поэтому $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{P}(A_j)|_2 < \infty$. Покажем, что $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \notin \mathcal{G}_\Omega$. Действительно,

$$n_{3(j-1)}(A) = |A_j \cap \Omega_{3(j-1)}| + \left| \bigcup_{s=1}^{j-1} A_s \cap \Omega_{3(j-1)} \right| = 1 + \gamma,$$

где $|\gamma|_2 < 1$. Таким образом, $|n_{3(j-1)}(A)|_2 = 1$, но $|n_{3j-1}(A)|_2 < 1$.

Отметим следующую полезную формулу для вычисления вероятностей: $\mathbf{P}(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(A \cap \Omega^{(j)})$, т.е. вероятность того, что в башне T найдется житель со свойством A равна сумме вероятностей того, что житель со свойством A найдется на каждом этаже.

Предложение 3.4. Вероятности $\mathbf{P}$ отображают $\mathcal{G}_\Omega$ в шар $U_{r_\Omega}(0)$, где $r_\Omega = 1/|N|_p$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Система $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{G}_\Omega, \mathbf{P}_\Omega)$ называется *пространством p -адических относительных вероятностей* для множества Ω .

Если N — натуральное число, то мы получим колмогоровское пространство вероятностей с дискретными вероятностными мерами соответствующих (относительным) вероятностям, определенным в (1).

3.4. Аппроксимация конечными популяциями. Всякое пространство относительных вероятностей $\mathcal{P}$ можно аппроксимировать пространствами относительных вероятностей $\mathcal{P}_k$ с конечными популяциями. Пусть, как обычно, $N_k = l_0 + l_1 p + \dots + l_k p^k$ для N , заданного разложением (4). Пусть l_s — первый ненулевой разряд в (4). Рассмотрим конечные популяции $\Omega_k = \cup_{j=0}^k \Omega^{(j)}$, $k = s, s+1, \dots$, $|\Omega_k| = N_k$ и пространство относительных вероятностей $\mathcal{P}_k = (\Omega_k, \mathcal{G}_{\Omega_k}, \mathbf{P}_{\Omega_k})$. Тогда $\mathcal{G}_{\Omega_k}$ совпадает с алгеброй F_{Ω_k} всех подмножеств конечной популяции Ω_k и определение (7) относительной вероятности совпадает с определением (1): $\mathbf{P}_{\Omega_k}(A) = |A|/|\Omega_k|$, $A \in \mathcal{F}_{\Omega_k}$.

Предложение 3.5. Пусть $A \in \mathcal{G}_\Omega$. Тогда

$$\mathbf{P}_\Omega(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\Omega_k}(A \cap \Omega_k). \quad (10)$$

Для доказательства (10) нужно использовать тот факт, что $\mathbf{Q}_p$ — топологическая группа.

3.5. Условные вероятности. Для изучения условных вероятностей мы расширим понятие p -адической относительной вероятности, чтобы рассматривать более общие популяции.

Пусть Ω — популяция башни T_Ω с конечными популяциями $\Omega^{(j)}$ на каждом этаже. Пусть $m_j = |\Omega^{(j)}|$, причем m_j необязательно пропорционально p^j . Допустим, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} m_j$ сходится в $\mathbf{Z}_p$ к ненулевому числу $N \equiv |\Omega|$. Определим p -адическую относительную вероятность множества $A \subset \Omega$ формулами (6) и (7). Тогда $\mathcal{G}_\Omega$ есть соответствующее семейство событий. Легко проверить, что предложения 3.1–3.5 верны и для этих более общих относительных вероятностей.

Пусть $A \in \mathcal{G}_\Omega$ и $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Мы можем рассматривать A как новую популяцию с p -адической иерархической структурой $A = \cup_{j=0}^{\infty} A^{(j)}$, где $A^{(j)} = A \cap \Omega^{(j)}$. Введем соответствующее семейство событий $\mathcal{G}_A$. Как обычно, $A_k = \cup_{j=0}^k A^{(j)}$, $|A_k| = \sum_{j=0}^k m_j$.

Предложение 3.6. Пусть $A \in \mathcal{G}_\Omega$, $\mathbf{P}(A) \neq 0$ и $B \in \mathcal{G}_A$. Тогда $B \in \mathcal{G}_\Omega$ и справедлива формула Байеса: $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_\Omega(B)/\mathbf{P}_\Omega(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В башне T_A на каждом j -м этаже находится m_j элементов. Далее, $A_k = \Omega_k \cap A$. Тогда для каждого $B \subset A$

$$n_k^A(B) = |B \cap A_k| = |B \cap \Omega_k| = n_k^\Omega(B). \quad (11)$$

Следовательно, из существования $n^A(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k^A(B)$ вытекает существование $n^\Omega(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k^\Omega(B)$. Более того, $n^\Omega(B) = n^A(B)$.

Поэтому,

$$P_A(B) = \frac{n^A(B)}{n^\Omega(B)} = \frac{n^A(B)/|\Omega|}{n^\Omega(B)/|\Omega|}.$$

Из (11) мы получаем следующее

Следствие 3.1. Пусть $A, B \in \mathcal{G}_\Omega$, $P(A) \neq 0$ и $B \subset A$. Тогда $B \in \mathcal{G}_\Omega$.

Таким образом, $\mathcal{G}_A = \{B \in \mathcal{G}_\Omega: B \subset A\}$. Пусть $A, B, A \cap B \in \mathcal{G}_\Omega$, $P(A) \neq 0$. Определим $P_A(B) = P_A(A \cap B)$. Тогда $P_A(B) = P_\Omega(B \cap A)/P_\Omega(A)$. Если положить $P_A(B) = P(B/A)$ и опустить индекс Ω , то мы получим формулу Байеса.

З а м е ч а н и е 3.1. Формулу Байеса для событий A и B можно использовать тогда и только тогда, когда $A \cap B \in \mathcal{G}_\Omega$.

4. Правила обращения с p -адическими вероятностями

Один из главных инструментов обычной теории вероятности основан на линейной упорядоченности поля действительных чисел $\mathbf{R}$. Это дает возможность сравнивать вероятности различных событий: события E с вероятностями $P(E) \ll 1$ рассматриваются как пренебрежимые, а события E с вероятностями $P(E) \approx 1$ рассматриваются как практически достоверные. Однако использование этих соотношений в конкретных приложениях базируется в основном на нашей обычной вероятностной интуиции.

Что такое большая вероятность? Что такое малая вероятность? Более того, нелегко сравнить две произвольные вероятности. Например, предпочтете ли вы выигрыш с вероятностью $P(E_1) = \frac{11}{17}$ или $P(E_2) = \frac{13}{19}$. Так как $P(E_1) < P(E_2)$, то лучше было бы выбрать E_2 . Но на практике этот выбор не даст большой выгоды. Таким образом, вероятностная интуиция в большей степени опирается на многовековой человеческий опыт, чем на точную математическую теорию.

Поэтому, если мы хотим работать с p -адическими вероятностями, мы также должны развить некоторую « p -адическую вероятностную интуицию». Однако при этом возникает одна математическая проблема, не позволяющая непосредственно обобщить классическую схему. Эта проблема состоит в отсутствии упорядоченности $\mathbf{Q}_p$. Конечно кое-что можно сделать и без наличия упорядоченности. Например, мы можем классифицировать различные события с помощью их p -адических вероятностей. Разные p -адические вероятности $P_\Omega(E_1) \neq P_\Omega(E_2)$ означают, что события E_1 и E_2 имеют различные p -адические объемы.

Однако мы могли бы использовать p -адические вероятности гораздо шире, применяя частично упорядоченную структуру в кольце p -адических целых чисел.

(О) Пусть $x = x_0x_1x_2\dots$ и $y = y_0y_1y_2\dots$ — канонические разложения двух p -адических целых чисел $x, y \in \mathbb{Z}_p$. Будем считать, что $x < y$, если существует такое n , что $x_n < y_n$ и $x_k \leq y_k$ для всех $k > n$. Этот частичный порядок в $\mathbb{Z}_p$ является естественным расширением стандартного порядка на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Легко видеть, что $x < y$ для всяких $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$, т.е. любое конечное натуральное число меньше любого бесконечного числа. Но мы не можем сравнить два произвольных бесконечных числа.

Пример 4.1. Пусть $p = 2$, и пусть $x = -\frac{1}{3} = 10101\dots 1010\dots$, $z = -\frac{2}{3} = 0101\dots 0101\dots$ и $y = -16 = 0001\dots 1111\dots$. Тогда $x < y$ и $z < y$, но числа x и z несравнимы.

Важно заметить, что существует максимальное число $N_{\max} \in \mathbb{Z}_p$. Легко видеть, что $N_{\max} = -1 = (p-1) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^n + \dots$. Таким образом, популяция $\Omega(-1)$ — это наибольшая популяция, которая может быть рассмотрена в рамках p -адической концепции.

Предложение 4.1. Пусть $N \in \mathbb{Z}_p$, $N \neq 0$. Тогда $\Omega(N) \in \mathcal{G}_{\Omega(-1)}$ и $\mathbf{P}_{\Omega(-1)}(\Omega(N)) = |\Omega(N)|/|\Omega(-1)| = -N$.

Следствие 4.1. Пусть $N \in \mathbb{Z}_p$, $N \neq 0$. Тогда $\mathcal{G}_{\Omega(N)} \subset \mathcal{G}_{\Omega(-1)}$ и вероятности $\mathbf{P}_{\Omega(N)}(A)$ вычисляются как условные вероятности относительно подпопуляции $\Omega(N)$ популяции $\Omega(-1)$:

$$\mathbf{P}_{\Omega(N)}(A) = \mathbf{P}_{\Omega(-1)}(A/\Omega_N) = \frac{\mathbf{P}_{\Omega(-1)}(A)}{\mathbf{P}_{\Omega(-1)}(\Omega(N))}, \quad A \in \mathcal{G}_{\Omega(N)}. \quad (12)$$

Однако из того, что $A \in \mathcal{G}_{\Omega(-1)}$ не вытекает, что $A \cap \Omega(N) \in \mathcal{G}_{\Omega(N)}$. В силу следствия 1.1, фактически можно ограничиться случаем максимальной популяции $\Omega(-1)$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только случай $\Omega \equiv \Omega(-1)$.

Частичный порядок $\mathcal{O}$ на множестве p -адических целых $\mathbb{Z}_p$ дает возможность сравнения p -адических объемов $n(A)$ множеств $A \in \mathcal{G}_{\Omega}$. В этом случае естественно говорить, что вероятность $\mathbf{P}(B)$ больше вероятности $\mathbf{P}(A)$, если p -адический объем $n(B)$ множества B больше, чем p -адический объем $n(A)$ множества A . Таким образом, мы получаем следующий частичный порядок на множестве вероятностей:

($\tilde{\mathcal{O}}$) $\mathbf{P}(B) > \mathbf{P}(A)$ тогда и только тогда, когда $n(B) > n(A)$.

Для обозначения нового порядка на $\mathbb{Z}_p$ мы воспользуемся теми же символами $>$, $<$ и надеемся, что читатель не будет смешивать эти два порядка в $\mathbb{Z}_p$: порядок $(\mathcal{O})$, сравнивающий p -адические объемы, и порядок $(\tilde{\mathcal{O}})$, сравнивающий p -адические вероятности. Для примера, пусть $p = 2$ и пусть $n(B) = -2$ ($= 011\dots 1\dots$), $n(A) = -3$ ($= 1011\dots 1\dots$). Тогда $n(B) > n(A)$ относительно $(\mathcal{O})$ и, следовательно, $\mathbf{P}(B) = 2 > \mathbf{P}(A) = 3$ относительно $(\tilde{\mathcal{O}})$.

Рассмотрим некоторые свойства вероятностей.

(1) Так как мы имеем только частичный порядок, то не всегда возможно сравнивать вероятности событий A и B .

(2) Так как $x \leq -1$ относительно $(\mathcal{O})$ для всякого $x \in \mathbf{Z}_p$, то $\mathbf{P}(A) \leq 1 = \mathbf{P}(\Omega)$ для всякого $A \in \mathcal{G}_\Omega$.

(3) Для всех $x \in \mathbf{Z}_p$ относительно порядка $(\mathcal{O})$ имеем $x \geq 0$. Поэтому $\mathbf{P}(A) \geq 0$ для всякого $A \in \mathcal{G}_\Omega$.

Для иллюстрации дальнейших свойств p -адических вероятностей, рассмотрим еще один порядок, а именно, обычный порядок на множестве $\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Q}$. В этом случае мы используем термины « r -возрастающий» или « r -убывающий». Такой r -порядок в $\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Q}$ не имеет вероятностного смысла. Мы рассматриваем его, чтобы использовать «обычную интуицию», чтобы представить местоположение рациональных вероятностей $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{G}_\Omega$, на действительной прямой. Для обозначения соответствующих интервалов на действительной прямой воспользуемся записями $[a, b], \dots, (a, b)$. Например, пусть $p = 2$ и пусть $\mathbf{P}(B) = 2$, $\mathbf{P}(A) = 3$. Тогда $\mathbf{P}(B) > \mathbf{P}(A)$, но с точки зрения r -порядка $\mathbf{P}(B)$ меньше $\mathbf{P}(A)$.

(4) Положим $F^f = \{A \in \mathcal{G}_\Omega: n(A) \in N\}^4$.

Ограничение порядка $(\mathcal{O})$ на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ совпадает с обычным порядком на $\mathbf{N}$. Таким образом, $n(A) < n(B)$, где $A, B \in F^f$, тогда и только тогда, когда натуральное число $n(A)$ меньше натурального числа $n(B)$. Отсюда следует (по определению порядка $(\tilde{\mathcal{O}})$), что вероятности $\mathbf{P}(\cdot)$ отображают F^f в $(-\infty, 0) \cap \mathbf{Z}$ и вероятности $\mathbf{P}(A)$ увеличиваются, если $\mathbf{P}(A)$ r -уменьшаются. Например, вероятности $\mathbf{P}(A) = -1$ и -3 достаточно малы по сравнению с вероятностями $\mathbf{P}(B) = -100$ и -300 .

(5) Положим $\tilde{F}^f = \{B = \bar{A}: \bar{A} \in F^f\}$ (в частности, $\tilde{F}^f$ содержит дополнения всех конечных подмножеств Ω). Тогда $\mathbf{P}(\cdot)$ отображает $\tilde{F}^f$ в N и $\mathbf{P}(B)$ уменьшается, если $\mathbf{P}(B)$ r -увеличивается. Например, вероятности $\mathbf{P}(E) = 100$ и 200 являются достаточно малыми по сравнению с $\mathbf{P}(C) = 1$ и 2 .

Эти правила сравнения можно использовать и для условных вероятностей. Например, пусть $\mathbf{P}(B) = 100$, $\mathbf{P}(B') = 200$, $\mathbf{P}(A) = 2$ и $B, B' \subset A$. Тогда $\mathbf{P}(B/A) = 50 > \mathbf{P}(B'/A) = 100$.

В силу (4) и (5) мы можем работать с вероятностями множеств, принадлежащих $F^f \cup \tilde{F}^f$.

(6) Теперь рассмотрим события $A \notin F^f \cup \tilde{F}^f$. Мы можем развивать нашу интуицию только с помощью примеров.

⁴⁾ В частности, F^f содержит все конечные подмножества Ω и все бесконечные подмножества $A \in \mathcal{G}_\Omega$ с конечным p -адическим объемом. Например, пусть $|A \cap \Omega_k| = 1 + p^k$, $k = 1, 2, \dots$ ($(1 + p^k)$ жителей первых $(k + 1)$ этажей обладают свойством A). Тогда $n(A) = 1$ и, поэтому, $A \in F^f$.

Пример 4.2. Пусть $p = 2$. Положим $|A \cap \Omega^{(2k)}| = 2^{2k}$ и $A \cap \Omega^{(2k+1)} = \emptyset$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $n(A) = -\frac{1}{3}$ ($= 1010 \dots 10 \dots$) и $P(A) = \frac{1}{3}$. Пусть $B \subset A$ и $B \cap \Omega^{(4k)} = A \cap \Omega^{(4k)}$, $B \cap \Omega^{(j)} = \emptyset$, $j \neq 4k$. Тогда $n(B) = -\frac{1}{15}$ ($= 100010001 \dots 10001 \dots$) и $P(B) = \frac{1}{15}$. Очевидно, что $-\frac{1}{15} < -\frac{1}{3}$ в $\mathbb{Z}_2$. Откуда $P(B) = \frac{1}{15} < P(A) = \frac{1}{3}$.

Таким образом, кажется, что вероятностная упорядоченность на $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ совпадает со стандартным действительным порядком. Более того, оправдано использовать эту упорядоченность также в случае, когда числа $n(A)$ и $n(B)$ несравнимы в $\mathbb{Z}_2$ ⁵⁾.

Пример 4.3. Пусть p и A те же, что и выше. Пусть $|C \cap M_{2k+1}| = 2^{2k+1}$, $C \cap M_{2k} = \emptyset$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $n(C) = -\frac{2}{3}$ и $P(C) = \frac{2}{3}$. Числа $n(A) = -\frac{1}{3}$ и $n(C) = -\frac{2}{3}$ несравнимы в $\mathbb{Z}_2$. Но эвристически кажется, что мы можем использовать r -упорядоченную структуру на $[0, 1]$, чтобы сравнить вероятности событий A и C . Таким образом, вероятность того, что $\omega \in C$ в два раза больше вероятности того, что $\omega \in A$.

Далее отметим, что вероятность $x \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Z}$ практически пренебрежима по отношению к любой вероятности $y \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Интуитивное обоснование этого следующее. Вероятность $P(A) \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Z}$ есть вероятность события A с конечным p -адическим объемом в бесконечно большой популяции Ω . Вероятность $P(A) \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ есть вероятность события A с бесконечным p -адическим объемом в бесконечно большой популяции Ω .

Таким образом, p -адический подход дает возможность расщеплять нулевую вероятность на множество вероятностей D_0^+ . В частности, $(-\infty, 0) \cap \mathbb{Z} \subset D_0^+$.

Замечание 4.1. Вероятность $P(\cdot)$ на булевой алгебре $\mathcal{A}$ невырождена, так как $P(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$. p -адическое расщепление нулевой вероятности можно рассматривать как шаг в направлении к булевым вероятностям. Множество D_0^+ дает возможность расщепить многие вероятности, которые должны быть равны нулю с точки зрения обычного анализа. Однако мы еще не получили булевых вероятностей. Существуют многочисленные события $A \in \mathcal{G}_\Omega$, $A \neq \emptyset$, имеющие вероятность нуль. Например, пусть $|A \cap \Omega_k| = p^k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $P(A) = 0$.

Можно использовать те же самые правила и для условных вероятностей. Например, пусть $P(B) = \frac{1}{15} < P(B') = \frac{2}{15}$, $P(A) = \frac{1}{5}$ и $B, B' \subset A$. Тогда $P(B/A) = \frac{1}{3} < P(B'/A) = \frac{2}{3}$. Более того, например, пусть $P(B) = -1 < P(B') = -5$, $P(A) = -100$ и $B, B' \subset A$. Тогда $P(B/A) = \frac{1}{100} < P(B'/A) = \frac{1}{20}$. Таким образом, r -упорядоченная структура на $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ снова дает правило (4).

⁵⁾ Однако такая экстраполяция вероятно ошибочна и мы должны допускать существование событий с несравнимыми вероятностями.

Предложение 4.2. Если $\mathbf{P}(B) \in \mathbf{N}$, то $n(\overline{B}) \in \{0\} \cup \mathbf{N}$. Если $\mathbf{P}(B) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$, то $n(B) \in \mathbf{Z}_p \setminus \mathbf{N}$.

Доказательство. Если $k = \mathbf{P}(B) \in \mathbf{N}$, то $n(B) = -k$, $k = 1, 2, \dots$, и $n(\overline{B}) = -1 + k$. Если $a = \mathbf{P}(B) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$, то $n(B) = -a$ и $n(\overline{B}) = a - 1 \notin \mathbf{N}$.

Таким образом, если $\mathbf{P}(B) \in \mathbf{N}$, то множество $\overline{B}$ имеет конечный p -адический объем $n(\overline{B})$. С другой стороны, если $\mathbf{P}(B) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$, то множество $\overline{B}$ имеет бесконечный p -адический объем $n(\overline{B})$. Естественно допустить, что вероятность $\mathbf{P}(B) \in \mathbf{N}$ больше любой вероятности $\mathbf{P}(C) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$.

Следовательно, p -адический подход позволяет расщеплять вероятность 1 на множество вероятностей D_1^- . В частности, $\mathbf{N} \subset D_1^-$. Однако вероятность 1 расщеплена еще неполностью. Существуют многочисленные примеры событий $\overline{A} \neq \emptyset$ с $\mathbf{P}(A) = 1$. Например, пусть $|A \cap \Omega_k| = p^{[(k+1)/2]} - 1$, $k = 1, 2, \dots$, где $[x]$ обозначает целую часть x . Тогда $n(A) = -1$ и $\mathbf{P}(A) = 1$. Но $\overline{A} \neq \emptyset$.

Можно так же расщепить вероятности $x = \mathbf{P}(A) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$. Пусть $A \in \mathcal{G}_\Omega$, $x = \mathbf{P}(A) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$, $C \in F^f$, $A \cap C = \emptyset$, и пусть $B = A \cup C$. Тогда $\lambda = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) = x - k$, где $\mathbf{P}(C) = -k$, $k \in \mathbf{N}$. Так как p -адический объем множества C конечен, а популяция Ω бесконечна, то вероятность $\mathbf{P}(C) = -k$ является бесконечно малой. Следовательно, вероятность x можно расщепить на множество вероятностей D_x^+ . Каждая вероятность $\lambda \in D_x^+$ больше вероятности x , а вероятность $\Delta = \lambda - x = -k$ является бесконечно малой.

Пусть $B \in \mathcal{G}_\Omega$, $C \in F^f$, $B \cap C = \emptyset$, и пусть $A = B \cup C$, $x = \mathbf{P}(A) \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$. Тогда $\lambda = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(C) = x + k$, где $\mathbf{P}(C) = -k$, $k \in \mathbf{N}$, есть бесконечно малая вероятность. Следовательно, вероятность x можно расщепить на множество вероятностей D_x^- . Каждая вероятность $\lambda \in D_x^-$ меньше вероятности x и вероятность $\Delta = x - \lambda = -k$ бесконечно мала.

Таким образом, вероятность x расщепляется на множество вероятностей $D_x = D_x^- \cup D_x^+$.

Рассмотрим теперь вероятности относительно популяции $\Omega(N)$ при произвольном $N \in \mathbf{Z}_p$, $N \neq 0$. Используя формулу (11), можно обобщить результаты, полученные для $\Omega = \Omega(-1)$. В общем случае нулевая вероятность расщепляется на множество D_0^+ , содержащее множество $\{\lambda = k/N; k \in \mathbf{N}\}$. Вероятность 1 расщепляется на множество D_1^- , которое содержит множество $\{\lambda = 1 - k/N; k \in \mathbf{N}\}$. Вероятность $x \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$ расщепляется на множество $D_x = D_x^- \cup D_x^+$, где D_x^- , в частности, содержит множество $\{\lambda = x - k/N; k \in \mathbf{N}\}$ и D_x^+ содержит, в частности, множество $\{\lambda = x + k/N; k \in \mathbf{N}\}$.

5. Неравенство Белла и p -адические вероятности

Использование неколмогоровских вероятностных моделей, в частности, p -адической, может помочь решению проблемы вероятностной интерпретации квантовой физики. Давно стало ясно, что квантовые преобразования вероятностей не могут быть объяснены на основании колмогоровской модели (см., например, [12]). Парадокс Эйнштейна–Подольски–Розена (ЭПР) [13] лишний раз показывает, что есть что-то ошибочное в вероятностных основаниях квантовой механики. Вероятностные аспекты парадокса ЭПР стали более очевидны, когда Дж. Белл [14] указал на простое неравенство для ковариаций трех дискретных квантовых наблюдений $A, B, C = \pm 1$, которые математически описываются как случайные величины,

$$|\langle A, B \rangle - \langle C, B \rangle| \leq 1 - \langle A, C \rangle. \quad (13)$$

Здесь, как обычно, ковариация двух случайных величин U и V определяется выражением $\langle U, V \rangle = \int_{\Omega} U(\omega) V(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$. Доказательство (13) мы оставим в качестве упражнения читателю.

Однако физики не обратили внимания на вероятностные аспекты проблемы, а именно, что исследования Белла опираются на вероятностную модель Колмогорова. Экспериментальные нарушения неравенства Белла рассматриваются как свидетельство того, что

1) реальность нелокальна: измерение одного физического наблюдения, например, в Москве, будет менять результат измерения другого физического наблюдения, например, во Владивостоке;

2) не существует реальности вообще (так называемая «смерть реальности»), когда все физические свойства квантовых частиц зависят от субъективного акта наблюдения.

Однако, как мы уже упомянули, имеется третья возможность:

3) нарушения неравенства Белла как раз показывают невозможность использования колмогоровской модели для описания некоторых квантовых экспериментов.

Последняя точка зрения была поддержана Аккарди [15] (нет формулы Байеса), Питовски [16] и Гуддером [17] (события представлены неизмеримыми множествами) и Хренниковым [18]–[20] (p -адические частотные вероятности). В рассмотренной здесь модели p -адических относительных вероятностей неравенство Белла неверно. В этой модели одной из причин нарушений неравенства (13) является наличие отрицательных вероятностей. Однако даже если все вероятности представлены положительными рациональными числами, неравенство (13) можно получить, только используя структуру алгебры множеств событий.

Я благодарен Ю. В. Прохорову, В. М. Максимова, С. Альбеверию, Е. Нельсону, Дж. Брикмонту, Д. Дюрру, Е. Белтраметти, Дж. Баттерфилду, С. Гольдштайну, М. Галавотти, Т. Модлину за плодотворные

обсуждения. Я надеюсь, что эта статья стимулирует новые дискуссии по теории вероятностей и возможностям неколмогоровских построений теории вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974, 119 с.
2. von Mises R. The mathematical theory of probability and statistics, London: Academic Press, 1964.
3. von Mises R. Probability, Statistics and Truth, London: Macmillan, 1957.
4. Fine T. L. Theories of Probabilities, an Examination of Foundations. New York: Academic Press, 1973.
5. Khrennikov A. Yu. p -adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
6. Хренников А. Ю. p -адическая теория вероятностей и ее применения. Принцип статической стабилизации частот. — Теория матем. физ., 1993, т. 93, в. 3, с. 348–363.
7. Хренников А. Ю. О расширении частичного подхода Р. фон Мизеса и асимптотического подхода А. Н. Колмогорова на p -адическую теорию вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 458–464.
8. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, ВО «Наука», 1994, 352 с.
9. Feynman R. P. Negative probability. Quantum Implications. Essays in Honour of David Bohm, B. J. Hiley and F. D. Peat, eds, London: Routledge and Kegan Paul, 1987, p. 235–246.
10. Muckenheim W. A review on extended probabilities. — Phys. Reports, 1986, v. 133, p. 338–401.
11. Dirac P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics. — Proc. Roy. Soc. London A, 1942, v. 180, p. 1–39.
12. d'Espagnat B. Veiled Reality. An analysis of present-day quantum mechanical concepts. New York: Addison-Wesley, 1995.
13. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? — Phys. Rev., 1935, v. 47, p. 777–780.
14. Bell J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. — Rev. Mod. Phys., 1966, v. 38, p. 447–452.
15. Accardi L. The probabilistic roots of the quantum mechanical paradoxes. The wave-particle dualism. A tribute to Louis de Broglie on his 90th Birthday. S. Diner, D. Fargue, G. Lochak and F. Selleri, eds., Dordrecht: D. Reidel Publ. Company, 1970, p. 47–55.
16. Pitowsky I. Deterministic model of spin and statistics. — Phys. Rev. D, 1983, v. 27, № 10, p. 2316–2326.
17. Gudder S. P. Probability manifolds. — J. Math. Phys., 1984, v. 25, p. 2397–2401.
18. Khrennikov A. Yu. p -adic probability interpretation of Bell's inequality paradoxes. — Physics Letters A, 1995, v. 200, p. 119–223.
19. Khrennikov A. Yu. p -adic probability distribution of hidden variables. Physica A, 1995, v. 215, p. 577–587.
20. Khrennikov A. Yu. p -adic stochastic hidden variable model. — J. Math. Phys., 1998, v. 39, № 3, p. 1388–1402.

Поступила в редакцию
26.II.1998