Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Чистяков, Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 326–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:25:31

© 2001 г.

ЧИСТЯКОВ Г. П.*

НОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ ПОСТОЯННЫЕ В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА. I ¹⁾

В центральной предельной теореме Ляпунова получено новое асимптотическое разложение для функций распределения центрированных и нормированных сумм независимых случайных величин, необязательно одинаково распределенных. Полученное разложение используется для нахождения асимптотически наилучших постоянных в неравенстве Берри–Эссеена. Тем самым решена задача, поставленная Колмогоровым и Золотаревым.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, теорема Ляпунова, оценки Берри–Эссеена, асимптотическое разложение, характеристические функции.

1. Введение

Главным результатом настоящей статьи является новое асимптотическое разложение в центральной предельной теореме (далее ЦПТ) для функций распределения сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные моменты третьего порядка (см. теорему 2.1). Этот результат отличается от ранее известных тем, что мы не накладываем никаких дополнительных ограничений на распределения слагаемых (таких как, скажем, условие Крамера (C), см. [13], [14]). Теорема 2.1 является новой даже в частном случае одинаково распределенных слагаемых, поскольку остаточный член оценивается равномерно в классе распределений слагаемых с фиксированным отношением Ляпунова L . В качестве приложения теоремы 2.1 мы получим асимптотически наилучшие постоянные в неравенстве Берри–Эссеена (теорема 2.2 и следствие 2.3).

Chistyakov G. P. A new asymptotic expansion and asymptotically best constants in Lyapunov's theorem. I.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

* Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, пр. Ленина, 47, Харьков, 61164 Украина; e-mail: chistyakov@ilt.kharkov.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке SFB 343, Билефельд, Германия.

Обозначим через $\mathfrak{X}_3$ множество всех случайных величин (с.в.) с нулевым средним и конечным третьим абсолютным моментом, не равных тождественно нулю. Обозначим множество функций распределения (ф.р.) этих с.в. через $\mathfrak{F}_3$. В случае симметричных с.в. обозначим соответствующие множества через $\mathfrak{X}_{3s}$ и $\mathfrak{F}_{3s}$. Рассмотрим конечную последовательность независимых с.в. $X_1, \dots, X_n$ из класса $\mathfrak{X}_3$, считая, что X_j имеет ф.р. F_j , характеристическую функцию (х.ф.) f_j , дисперсию σ_j^2 , третий момент α_j и третий абсолютный момент β_j . Введем

$$s = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}, \quad B = \beta_1 + \dots + \beta_n, \\ L = \frac{B}{s^3}, \quad Z = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{s}.$$

Обозначим ф.р. Z через F и соответствующую х.ф. через f .

Согласно теореме Ляпунова, ф.р. F сходится к стандартной нормальной ф.р. Φ в метрике Колмогорова $\rho(F, \Phi) = \sup_x |F(x) - \Phi(x)|$, если отношение Ляпунова $L \rightarrow 0$. Более того (см. [3], [5]), найдется абсолютная постоянная c , такая, что

$$\rho(F, \Phi) \leq cL. \quad (1.1)$$

Колмогоров в [9] поставил задачу нахождения наименьшего значения c_e постоянной c в (1.1). Он предположил, что $c_e = 1/\sqrt{2\pi}$. Эсseen в [7] показал, что $c_e \geq (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) = 1/\sqrt{2\pi} + 0.0107899 \dots$

Теорема А (см. [7]). *Предположим, что $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены (н.о.р.) и $F_1 \in \mathfrak{F}_3$. Тогда*

$$\frac{\sigma_1^3}{\beta_1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \rho(F, \Phi) \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}.$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда распределение $F_1(x)$ является решетчатым со скачками $(\sqrt{10} - 2)/2$ и $(4 - \sqrt{10})/2$ в точках $x_1 = -h(4 - \sqrt{10})/2$ и $x_2 = h(\sqrt{10} - 2)/2$ соответственно для некоторого $h > 0$.

Рогозин в [15] улучшил результат Эсseenа. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех нормальных ф.р., и пусть $\rho(F, \mathcal{N}) = \inf_{Q \in \mathcal{N}} \rho(F, Q)$.

Теорема В (см. [15]). *Предположим, что $X_1, \dots, X_n$ — независимы и одинаково распределены и $F_1 \in \mathfrak{F}_3$. Тогда*

$$\frac{\sigma_1^3}{\beta_1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \rho(F, \mathcal{N}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Это неравенство обращается в равенство, если $F_1(x)$ — симметричное распределение Бернулли со скачками $\frac{1}{2}$ в $x = \pm 1$.

Точное значение постоянной c_e неизвестно до сих пор. Эта задача обсуждалась в монографиях Ибрагимова и Линника [8], Петрова [13], [14] и Золотарева [16]. Эта задача там также обсуждалась и в других метриках (в частности, в метрике пространства L_p , $1 \leq p < \infty$).

Начиная с Эссеена, многие пользуются асимптотическими разложениями для ф.р. F . Введем следующие обозначения. Через $\text{Fr}\{y\}$ обозначим дробную часть произвольного вещественного числа y , и пусть

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2} - \text{Fr} \left\{ \left(x\sqrt{n} - \frac{an}{\sigma_1} \right) \frac{\sigma_1}{h} \right\}.$$

Если $F_1(x)$ — решетчатая ф.р., то параметры a и $h > 0$ характеризуют максимальную решетку $x_m = a + mh$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, содержащую точки скачков ф.р. F_1 . Если F_1 не является решетчатой, то положим $h = \psi_n(x) = 0$.

Теорема С (см. [6]). *Предположим, что $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены и $F_1 \in \mathfrak{F}_3$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$ справедливо разложение*

$$\begin{aligned} F(x) = & \Phi(x) + \frac{\alpha_1}{6\sigma_1^3\sqrt{2\pi n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2} \\ & + \frac{h}{\sigma_1\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2} \psi_n(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

К сожалению, известные оценки остаточного члена в (1.2) не являются равномерными по $F_1 \in \mathfrak{F}_3$. В случае неодинаково распределенных с.в. разложения вида (1.2) известны только при некоторых дополнительных ограничениях (см., например, [13]).

Введем

$$r(l, x) = \sup |F(x) - \Phi(x)|, \quad r(l) = \sup \rho(F, \Phi), \quad (1.3)$$

где супремумы берутся по всем $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{F}_3$ с отношением Ляпунова $L = l$, и

$$c^* = \limsup_{l \rightarrow 0} \frac{r(l)}{l}, \quad c^*(x) = \limsup_{l \rightarrow 0} \frac{r(l, x)}{l}. \quad (1.4)$$

В симметричном случае определим $r_s(l, x)$, $r_s(l)$ и c_s^* , $c_s^*(x)$ так же, как и в (1.3) и (1.4), лишь заменив $\mathfrak{F}_3$ на $\mathfrak{F}_{3s}$. Колмогоров в [9] поставил задачу нахождения определенных выше величин (см. также [8], [16]). Рассмотрим функцию $r_*(l) = \sup \inf_{Q \in \mathcal{N}} \rho(F, Q)$, где супремум берется по всем $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{F}_3$ с $L = l$, и положим $c_* = \limsup_{l \rightarrow 0} r_*(l)/l$. Задача вычисления c_* была поставлена Золотаревым [16]. Для решения этих задач недостаточно доказать справедливость асимптотического разложения (1.2). В действительности необходимо доказать аналог (1.2) для случая неодинаково распределенных с.в. с равномерным остаточным членом вида $O(L^{1+\delta})$, $\delta > 0$.

2. Формулировка основных результатов

В дальнейшем $c, c_1, c_2, \dots$ обозначают абсолютные положительные постоянные; c — различные (может быть, даже в одной формуле) постоянные, в то время как символы $c_1, c_2, \dots$ относятся к конкретным постоянным, например, $c_1 = \frac{1}{39}$. Обозначим через Θ различные величины с $|\Theta| \leq 1$. Без ограничения общности полагаем, что отношение Ляпунова L удовлетворяет неравенству $L \leq e^{-1}$. Для $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ пусть F_J — ф.р. $s^{-1} \sum_{j \in J} X_j$. Тогда х.ф. f_J имеет вид $f_J(t) = \prod_{j \in J} f_j(t/s)$. Через $\bar{J}$ обозначим множество $\{1, 2, \dots, n\} \setminus J$. Если $J = \emptyset$, то ф.р. $F_\emptyset(x)$ вырождена в нуле и х.ф. $f_\emptyset(t) \equiv 1$. Определим меру m подмножеств $\{1, 2, \dots, n\}$, полагая $m(J) = s^{-2} \sum_{j \in J} \sigma_j^2$, $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

В качестве аналога второго слагаемого в правой части (1.2), положим

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi\left(x - \frac{u}{s}\right) - \Phi(x) + \Phi'(x) \frac{u}{s} - \Phi^{(2)}(x) \frac{u^2}{2s^2} \right) dF_j(u).$$

Чтобы ввести аналог третьего слагаемого, рассмотрим замкнутое множество

$$S = \left\{ t \in \Gamma: |f(t)| \geq L^2, \frac{d}{dt} |f(t)| = 0 \right\},$$

где $\Gamma = [\frac{1}{4} L^{-1}, L^{-1-c_1}]$. Предположим, что $S \neq \emptyset$. В этом случае определим по индукции конечную последовательность $t_1, \dots, t_r$ элементов множества S следующим образом. Обозначим через t_1 наименьшую точку множества S . Предположим, что уже построены точки $t_1, \dots, t_k$. Пусть $\Gamma^{(m)}$ — $(10^{-3} L^{-1+c_1})$ -окрестность t_m , $m = 1, \dots, k$ (рассматриваем только открытые окрестности). Если множество $\Lambda_k = S \setminus (\Gamma^{(1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(k)})$ непусто, выберем в качестве t_{k+1} наименьшую точку этого множества, и повторяем эту процедуру до тех пор, пока множества Λ_k , $k = 1, \dots, r-1$, остаются непустыми.

Получим оценку

$$|f(t_q)| \geq L^2, \quad q = 1, \dots, r. \quad (2.1)$$

Зафиксируем какое-либо из $t_1, \dots, t_r$, скажем t_q , и рассмотрим х.ф. f_j , удовлетворяющие соотношению

$$\left| f_j\left(\frac{t_q}{s}\right) \right| \geq \exp \left\{ \frac{2\sigma_j^2 \ln L}{L^{9c_1} s^2} \right\}. \quad (2.2)$$

Обозначим через J_q множество индексов j , соответствующих этим х.ф. В силу (2.1),

$$m(J_q) \geq 1 - L^{9c_1}, \quad q = 1, \dots, r. \quad (2.3)$$

Рассмотрим множество J^* таких индексов j , что

$$\frac{\beta_j}{B} \leq L^{-8c_1} \frac{\sigma_j^2}{s^2}. \quad (2.4)$$

Легко видеть, что

$$m(J^*) \geq 1 - L^{8c_1}. \quad (2.5)$$

Действительно,

$$m(\bar{J}^*) \leq L^{8c_1} \sum_{j \in J^*} \frac{\beta_j}{B} \leq L^{8c_1}.$$

Таким образом, меры множеств J_q , $q = 1, \dots, r$, и J^* близки к единице при достаточно малых L . Заметим, что $J_1 = J_2 = \dots = J_r = J^* = \{1, 2, \dots, n\}$, если все с.в. X_j одинаково распределены.

Введем множества индексов

$$J_* = J^* \cap \bigcap_{q=1}^r J_q, \quad \bar{J}_* = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J_* \quad (2.6)$$

и положим

$$S_* = \{t_1, \dots, t_r\} \cap \{t \in \Gamma: |f_{\bar{J}_*}(t)| \geq L^{c_1}\}.$$

Пусть $S_* \neq \emptyset$. В этом случае определим t_* как наименьшую из точек $t \in S_*$. Далее $\mathbf{N}$ обозначает множество натуральных чисел. Выберем наименьшее $d_* \in \mathbf{N}$, такое, что каждая из точек $t_1, \dots, t_r$ содержится в $(-10^6 L^{-2c_1} \ln L)$ -окрестности некоторой точки вида mt_*/d_* , где $m \in \mathbf{N}$. Введем параметр

$$h = \frac{2\pi d_* s}{t_*} \quad (2.7)$$

и ф.р. $H_\varepsilon(x; h)$ с точками роста на отрезке $[-h/2s, h/2s]$:

$$H_\varepsilon(x; h) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left((F * \Phi_\varepsilon) \left(x + \frac{mh}{s} \right) - (F * \Phi_\varepsilon) \left(\frac{(m-1/2)h}{s} \right) \right),$$

$$x \in \left[-\frac{h}{2s}, \frac{h}{2s} \right].$$

Здесь и далее $\mathbf{Z}$ обозначает множество всех целых чисел, $\varepsilon = 8L^{1+c_1} \sqrt{|\ln L|}$ и $\Phi_\sigma(x) = \Phi(x/\sigma)$ при $\sigma > 0$. Очевидно, что $H_\varepsilon(-h/2s; h) = 0$ и $H_\varepsilon(h/2s; h) = 1$. В качестве аналога третьего слагаемого суммы (1.2) введем

$$\frac{h}{s\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Psi(x; h),$$

где

$$\Psi(x; h) = \int_{-h/2s}^{h/2s} \left(\frac{1}{2} - \text{Fr} \left\{ \frac{s}{h}(x-u) \right\} \right) dH_\varepsilon(u; h).$$

Положим $M_f = \max_{t \in \Gamma} |f(t)|$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $M_f > L^2$. Если $S_* \neq \emptyset$, то представление

$$(F * \Phi_\varepsilon)(x) = \Phi(x) + \alpha(x) + \frac{h}{s\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Psi(x; h) + c \Theta L^{1+c_1} |\ln L|^{7/6} \quad (2.8)$$

справедливо для всех вещественных x . Более того, параметр h оценивается следующим образом:

$$h \leq 2(1 + cL^{2c_1}) Ls, \quad (2.9)$$

а мера множества J_* ограничена снизу величиной

$$m(J_*) \geq 1 - cL^{8c_1}. \quad (2.10)$$

Для $j \in J_*$ справедлива оценка

$$\left| f_j \left(\frac{2\pi}{h} \right) \right| \geq 1 + c \frac{\ln L}{L^{12c_1}} \frac{\sigma_j^2}{s^2}. \quad (2.11)$$

В случаях, когда $S_* = \emptyset$ или $M_f \leq L^2$, в представлении (2.8) опускается третье слагаемое.

Представление (2.8) позволяет изучать поведение функций $c^*(x)$ и $c_s^*(x)$. Впервые эти функции начал изучать Линник [11]. Его исследования были продолжены Петровым [12], Чистяковым [4] и Бенткусом [2].

Следующий результат непосредственно следует из теоремы 2.1.

Следствие 2.1. Для любого фиксированного вещественного x справедливо равенство

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \sup \frac{1}{L} |F(x) - \Phi(x) - \alpha(x)| = \Phi'(x), \quad (2.12)$$

где супремум берется по всем $F_1, \dots, F_n$, таким, что $L = l$.

Это равенство принадлежит Чистякову [4]. Более того, в упомянутой статье с помощью равенства (2.12) изучено асимптотическое поведение функций $c^*(x)$ и $c_s^*(x)$ и показано, что $c^*(x) |x|^3 \rightarrow 1$ и $c_s^*(x) |x|^3 \rightarrow \frac{1}{2}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_{3s}^*$ подмножество таких ф.р. из $\mathfrak{F}_{3s}$, что

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \sup \frac{1}{B} \sum_{j=1}^n \int_{|u| > \gamma s} |u|^3 dF_j(u) = 0 \quad (2.13)$$

для произвольного $\gamma > 0$. Здесь супремум берется по всем $F_1, \dots, F_n$ из $\mathfrak{F}_{3s}^*$ с $L = l$. В качестве примера $\mathfrak{F}_{3s}^*$ можно взять множество симметричных ф.р., соответствующих с.в., ограниченным по модулю одной и той же величиной, с одной и той же дисперсией.

В [4] Чистяков показал, что из (2.13) следует, что $c^*(x, \mathfrak{F}_{3s}^*) = \Phi'(x)$. Величина $c^*(x, \mathfrak{F}_{3s}^*)$ определяется так же, как и $c_s^*(x)$ с той лишь разницей, что в ее определении супремум берется по всем таким $F_1, \dots, F_n$ из множества $\mathfrak{F}_{3s}^*$, что $L = l$, вместо ф.р. $F_1, \dots, F_n$ из $\mathfrak{F}_{3s}$. Также показано, что условие (2.13) является в некотором смысле существенным.

Следствие 2.2. *Предположим, что с.в. $X_1, \dots, X_n$ н.о.р. Тогда представление (1.2) следует из (2.8).*

Таким образом, теорема 2.1 обобщает теорему С. Более того, остаточный член равномерно оценивается отношением Ляпунова в степени, большей единицы.

З а м е ч а н и е. В случае, когда с.в. X_j одинаково распределены, утверждение теоремы 2.1 остается справедливым для $J_* = \{1, 2, \dots, n\}$.

Используя теорему 2.1 и некоторые идеи Эссеена [7] и Рогозина [15], мы вычислим постоянные c^* и c_* . Более того, мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Справедливы оценки:*

$$r(l) \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} l + cl^{1+c_1} |\ln l|^{7/6}, \quad (2.14)$$

$$r_*(l) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l + cl^{1+c_1} |\ln l|^{7/6}. \quad (2.15)$$

Ответ на сформулированный выше вопрос дается следующим утверждением.

Следствие 2.3. *Постоянные c^* и c_* выражаются следующим образом:*

$$c^* = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}, \quad c_* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Теорема 2.2 и следствие 2.3 уточняют теоремы А и В и дают ответы на задачи, поставленные Колмогоровым и Золотаревым.

В симметричном случае из теоремы 2.1 следуют соотношения:

$$r_s(l) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l + cl^{1+c_1} |\ln l|^{7/6}, \quad c_s^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.16)$$

Неравенство (2.16) несколько слабее, чем результат Бенткуса [2]

$$r_s(l) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l + cl^{4/3}$$

в отношении второго слагаемого в правой части.

В § 4 мы докажем (2.16) для того, чтобы предложить другой способ вычисления постоянной c_s^* .

В § 3 доказываются вспомогательные результаты. В § 4 доказываются теорема 2.2, следствие 2.3 и (2.16); в § 5 доказываются теорема 2.1 и следствия 2.1 и 2.2. Подчеркнем, что в доказательстве теоремы 2.1 используются идеи Эссеена [6] и Линника [11].

3. Вспомогательные результаты

Пусть P_1 и P_2 — вероятностные распределения (в.р.) и $\rho(P_1, P_2)$ — расстояние Колмогорова между их ф.р.

Лемма 3.1 (см. [10], [1]). Пусть P_1, P_2 и H — в.р. Тогда для любого $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} & \left(2H \left(\left\{ x: |x| \leq \frac{\tau}{2} \right\} \right) - 1 \right) \rho(P_1, P_2) \\ & \leq \rho(P_1 * H, P_2 * H) + \gamma(\tau) H \left(\left\{ x: |x| \leq \frac{\tau}{2} \right\} \right), \end{aligned}$$

где $\gamma(\tau) = \min\{Q(P_1, \tau), Q(P_2, \tau)\}$, $Q(P_j, \tau) = \sup_x P_j([x, x + \tau])$.

Сформулируем две вспомогательных леммы, уточняющие соответствующие результаты Эссеена [7]. Положим $\kappa \in (0, \frac{1}{10}]$ и введем множество ф.р. $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$ следующим образом. Скажем, что ф.р. G с конечным третьим абсолютным моментом принадлежит $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$, если найдется вещественное число $\alpha = \alpha(G)$, такое, что

(а) спектр G содержится в множестве вида $\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} (\alpha + m - \kappa, \alpha + m + \kappa)$;

(б) по крайней мере два интервала $(\alpha + m - \kappa, \alpha + m + \kappa)$, $m \in \mathbf{Z}$, содержат точки роста ф.р. G .

Обозначим через d_G наименьшее расстояние между точками вида $\alpha + m$, $m \in \mathbf{Z}$, содержащими точки роста ф.р. G в своих κ -окрестностях.

Лемма 3.2. Пусть X — с.в. с ф.р. G из $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$. Тогда

$$\frac{1}{2} (d_G - 8\kappa) \mathbf{D}X \leq \inf_b \mathbf{E}|X - b|^3.$$

Лемма 3.3. Пусть X — с.в. с ф.р. из $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$. Тогда

$$\frac{1}{2} (1 - 8\kappa) \mathbf{D}X + \frac{1}{6} |\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3| \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6} \mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^3.$$

Эти леммы могут быть доказаны повторением рассуждений, использованных при доказательстве соответствующих результатов Эссеена [7], [8], поэтому их доказательства мы опускаем.

Лемма 3.4. Пусть X — с.в. с х.ф. $g(t)$, удовлетворяющей соотношению

$$|g(2\pi)| \geq 1 - \nu \quad (3.1)$$

для некоторого $\nu \in [0, 1)$. Тогда найдется такое θ , что $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и для любого $b \in (0, \frac{1}{2}]$ справедлива оценка

$$\mathbf{P} \left\{ X \in \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \left(\left\{ x: b \leq |x - m - \theta| \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus \left\{ m + \theta - \frac{1}{2} \right\} \right) \right\} \leq \frac{1}{8b^2} \nu.$$

Если $g(2\pi)$ положительно, то неравенство выполняется с $\theta = 0$.

Доказательство. Положим $g(2\pi) = |g(2\pi)|e^{ia}$, где $a \in [-\pi, \pi)$. Из (3.1) следует оценка

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \pi x dG\left(x + \frac{a}{2} \pi\right) \leq \nu,$$

где G — ф.р. X . Используя неравенство $\sin^2 \pi x \geq 4x^2$, верное при $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, из последней оценки получаем, что

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{-1/2 < x \leq 1/2} x^2 dG(m + x + \theta) \leq \frac{1}{8} \nu, \quad \theta = \frac{a}{2\pi}. \quad (3.2)$$

Из этого неравенства непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 3.5. Пусть X — с.в. с ф.р. G из класса $\mathfrak{F}_3$, причем

$$\mathbf{D}X \leq \eta^{-2K}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}|X|^3 \leq \eta^{-K} \mathbf{D}X \quad (3.4)$$

для некоторых $K \in (0, \frac{1}{6})$ и $\eta \in (0, 10^{-3/K})$. Пусть ее х.ф. $g(t)$ удовлетворяет соотношению

$$|g(2\pi)| \geq 1 - \eta \mathbf{D}X. \quad (3.5)$$

Тогда найдется с.в. X^* с ф.р. из класса $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$, где $\kappa = \eta^{K_1/8}$ и $K_1 = 13K/8$, такая, что

$$|\mathbf{D}X - \mathbf{D}X^*| \leq 13\eta^{5K/8} \mathbf{D}X, \quad (3.6)$$

$$\left| \int_{|x| \leq \eta^{-K_1}} x^3 dG(x) - \mathbf{E}(X^* - \mathbf{E}X^*)^3 \right| \leq 73\eta^{K/4} \mathbf{D}X, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{E}|X^* - \mathbf{E}X^*|^3 \leq \int_{|x| \leq \eta^{-K_1}} |x|^3 dG(x) + 100 \eta^{K/4} \mathbf{D}X. \quad (3.8)$$

Доказательство. Вначале заметим, что, в силу (3.5), с.в. X удовлетворяет условиям леммы 3.4 с $\nu = \eta \mathbf{D}X$. По этой лемме найдется такое $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, что

$$\mathbf{P}\{X \in S_{\theta, \eta}\} \leq \frac{1}{8} \eta^{1-K_1/4} \mathbf{D}X, \quad (3.9)$$

где $S_{\theta, \eta}$ — множество вида

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^1: |x| \leq \eta^{-K_1} \right\} \cap \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \left(\left\{ x \in \mathbf{R}^1: \eta^{K_1/8} \leq |x - m - \theta| \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus \left\{ m + \theta - \frac{1}{2} \right\} \right).$$

Введем с.в. X^* следующим образом:

$$X^* = \begin{cases} X, & X \notin S_{\theta, \eta}, \\ \theta, & X \in S_{\theta, \eta} \text{ или } |X| > \eta^{-K_1}. \end{cases}$$

Теперь проверим справедливость соотношений (3.6)–(3.8). Вначале докажем (3.6). Нам потребуется следующее соотношение, которое может быть получено с помощью неравенств Чебышева и (3.4):

$$W_G(x) = G(-x) + 1 - G(x) \leq \frac{\mathbf{E}|X|^3}{x^3} \leq \eta^{-K} \frac{\mathbf{D}X}{x^3}, \quad x > 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \eta^{-K_1}} |x| dG(x) &\leq \eta^{-K_1} W_G(\eta^{-K_1}) + \int_{x > \eta^{-K_1}} W_G(x) dx \\ &\leq \eta^{2K_1-K} \mathbf{D}X + \eta^{-K} \mathbf{D}X \int_{x > \eta^{-K_1}} \frac{1}{x^3} dx \leq \frac{3}{2} \eta^{9K/4} \mathbf{D}X. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя (3.9) и предыдущую оценку $W_G(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| \leq \eta^{-K_1}} x dG(x) - \mathbf{E}X^* \right| \\ \leq \frac{1}{8} \left(\eta^{1-5K_1/4} + \eta^{1-K_1/4} + 4\eta^{3K_1-K} \right) \mathbf{D}X \leq \eta^{9K/4} \mathbf{D}X. \end{aligned}$$

Учитывая, что по предположению $\mathbf{E}X = 0$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\left| \int_{|x| > \eta^{-K_1}} x dG(x) + \mathbf{E}X^* \right| \leq \eta^{9K/4} \mathbf{D}X.$$

Чтобы оценить интеграл в левой части, применим (3.10) и получим

$$|\mathbf{E}X^*| \leq 3\eta^{9K/4} \mathbf{D}X. \quad (3.11)$$

Аналогично получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| \leq \eta^{-K_1}} x^2 dG(x) - \mathbf{E}(X^*)^2 \right| &\leq \frac{1}{8} \left(\eta^{1-9K_1/4} + \eta^{1-K_1/4} + 2\eta^{3K_1-K} \right) \mathbf{D}X, \\ \int_{|x| > \eta^{-K_1}} x^2 dG(x) &\leq 3\eta^{5K/8} \mathbf{D}X. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}X^2 - \mathbf{E}(X^*)^2| &\leq \left(\frac{1}{4} \eta^{1-9K_1/4} + \frac{1}{4} \eta^{3K_1-K} + 3\eta^{5K/8} \right) \mathbf{D}X \\ &\leq 4\eta^{5K/8} \mathbf{D}X. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из неравенств (3.11) и (3.12) следует оценка

$$|\mathbf{D}X - \mathbf{D}X^*| \leq \left(4\eta^{5K/8} + 9\eta^{5K/2} \right) \mathbf{D}X \leq 13\eta^{5K/8} \mathbf{D}X, \quad (3.13)$$

доказывающая (3.6).

Теперь проверим (3.7). Получим

$$\mathbf{E}(X^* - \mathbf{E}X^*)^3 = \mathbf{E}(X^*)^3 - 3\mathbf{E}(X^*)^2 \mathbf{E}X^* + 2(\mathbf{E}X^*)^3$$

и оценим второе и третье слагаемые в правой части. В силу (3.12),

$$(\mathbf{E}|X^*|)^2 \leq \mathbf{E}(X^*)^2 \leq (1 + 4\eta^{5K/8}) \mathbf{D}X. \quad (3.14)$$

Согласно (3.14), (3.11) и (3.3),

$$3\mathbf{E}(X^*)^2|\mathbf{E}X^*| + 2|\mathbf{E}X^*|^3 \leq 18\eta^{9K/4}(\mathbf{D}X)^2 + 54\eta^{27K/4}(\mathbf{D}X)^3 \leq 72\eta^{K/4}\mathbf{D}X.$$

Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x| \leq \eta^{-K_1}} x^3 dG(x) - \mathbf{E}(X^*)^3 \right| \\ & \leq \frac{1}{8} \left(\eta^{1-13K_1/4} + \eta^{1-K_1/4} + \eta^{3K_1-K} \right) \mathbf{D}X \leq \eta^{K/4} \mathbf{D}X. \end{aligned}$$

Как и ранее, здесь использована оценка (3.9). Сравнивая две последних оценки, получаем (3.7).

Остается проверить (3.8). Легко видеть, что

$$\mathbf{E}|X^* - \mathbf{E}X^*|^3 \leq \mathbf{E}|X^*|^3 + 3\mathbf{E}(X^*)^2|\mathbf{E}X^*| + 3\mathbf{E}|X^*|(\mathbf{E}X^*)^2 + |\mathbf{E}X^*|^3.$$

Покажем, что (3.8) следует из этого неравенства. Действительно,

$$\mathbf{E}|X^*|^3 \leq \left| \int_{|x| \leq \eta^{-K_1}} |x|^3 dG(x) \right| + (\eta^{1-K_1/4} + \eta^{3K_1-K}) \mathbf{D}X,$$

и используя (3.14), (3.11) и (3.3), получаем (3.8).

Наконец, покажем, что ф.р. X^* принадлежит $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$, где $\kappa = \eta^{K_1/8}$. Предположим противное. Тогда найдется такое целое m , что все точки роста ф.р. X^* лежат в κ -окрестности точки $m + \theta$. Вдобавок, в силу (3.2),

$$\mathbf{E}(X^* - m - \theta)^2 \leq \frac{1}{8}\eta \mathbf{D}X.$$

С другой стороны, неравенство (3.13) можно переписать как

$$|\mathbf{D}X - \mathbf{D}(X^* - m - \theta)| \leq 13\eta^{5K/8}\mathbf{D}X.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\mathbf{D}X \leq \left(\frac{1}{8}\eta + 13\eta^{5K/8} \right) \mathbf{D}X < \mathbf{D}X,$$

что невозможно.

Пусть c_2 — абсолютная положительная постоянная, которая будет выбрана позднее в § 5. Ниже постоянные c зависят от c_2 , но становятся абсолютными постоянными, если значение c_2 фиксированно.

Лемма 3.6. Пусть X — с.в. с ф.р. $H(x)$ из класса F_3 и с х.ф. $\varphi(t)$, дисперсией σ^2 и третьим абсолютным моментом β . Пусть точка $a \geq c_2$ удовлетворяет соотношению

$$|\varphi(a)| \geq 1 - \eta\sigma^2, \quad (3.15)$$

где $\eta \in (0, (4 + 2\pi/c_2)^{-3})$. Предположим также, что

$$\beta \leq \eta^{-1/3} \sigma^2 \leq \eta^{-2/3}. \quad (3.16)$$

Тогда х.ф. $\varphi(t)$ допускает представление

$$\varphi(t) = \varphi(qa) \exp \left\{ \operatorname{Re} \frac{\varphi'(qa)}{\varphi(qa)} (t - qa) - \frac{1}{2} \sigma^2 (t - qa)^2 + r_q(t) \right\} \quad (3.17)$$

в $(8\sigma)^{-1}$ -окрестности каждой точки qa , $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$, где функции $r_q(t)$ имеют вид

$$r_q(t) = iC_{1q}(t - qa) + C_{2q}(t - qa)^2 + C_{3q}(t - qa)^3.$$

Здесь вещественные C_{1q} и комплексные C_{2q} , C_{3q} удовлетворяют соотношениям

$$|C_{1q}| \leq c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{2/3}, \quad (3.18)$$

$$|C_{2q}| \leq c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{1/3}, \quad (3.19)$$

$$|C_{3q}| \leq c\beta. \quad (3.20)$$

Далее,

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'(qa)}{\varphi(qa)} - q \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)} \right| \leq c(q^3 \sigma^2 + q\beta) \eta^{2/3}, \quad (3.21)$$

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'(qa)}{\varphi(qa)} \right| \leq cq \eta^{1/2} \sigma^2. \quad (3.22)$$

З а м е ч а н и е. Символ $[\eta^{-1/9}]$ означает наибольшее целое, не превосходящее $\eta^{-1/9}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем $\varphi(a) = e^{i\theta} |\varphi(a)|$, где $\theta \in [-\pi, \pi]$. Введем ф.р. G с х.ф. вида $g(t) = e^{-i\theta t/a} \varphi(t)$. Очевидно, что $G(x) = H(x + \theta/a)$. Теперь изучим поведение х.ф. $g(t)$ и ее производных.

Лемма 3.7. Для всех $q = 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$1 - \operatorname{Re} g(qa) \leq q^2 \eta \sigma^2, \quad (3.23)$$

$$|\operatorname{Im} g(qa)| \leq 2q^3 \eta \sigma^2. \quad (3.24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя хорошо известное неравенство

$$\sin^2 \frac{qax}{2} \leq q^2 \sin^2 \frac{ax}{2},$$

справедливое для любого вещественного x , мы легко получаем оценку $1 - \operatorname{Re} g(qa) \leq q^2(1 - g(a))$. Вспоминая (3.15), приходим к соотношению (3.23).

Равенство

$$\begin{aligned} \sin(qax) &= \sin(ax) \cos((q-1)ax) + \cos(ax) \sin((q-1)ax) \\ &= \sin(ax) - 2 \sin(ax) \sin^2 \frac{(q-1)ax}{2} + \sin((q-1)ax) \\ &\quad - 2 \sin((q-1)ax) \sin^2 \frac{ax}{2} \end{aligned}$$

позволяет установить справедливость соотношения

$$\operatorname{Im} g(qa) = \operatorname{Im} g(a) + \operatorname{Im} g((q-1)a) + A_1 + A_{q-1}, \quad q = 2, 3, \dots,$$

где A_q , $q = 1, 2, \dots$, допускают оценку $|A_q| \leq 1 - \operatorname{Re} g(qa)$. Из последнего соотношения мы, наконец, получаем

$$\operatorname{Im} g(qa) = q \operatorname{Im} g(a) + q A_1 + \sum_{m=2}^{q-1} A_m. \quad (3.25)$$

Поскольку $\operatorname{Im} g(a) = 0$, с учетом (3.23) получаем

$$|\operatorname{Im} g(qa)| \leq q \eta \sigma^2 + \eta \sigma^2 \sum_{m=2}^{q-1} m^2 \leq 2q^3 \eta \sigma^2,$$

что доказывает (3.24).

Лемма 3.8. Для всех $q = 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$|\operatorname{Re} g'(qa) - q \operatorname{Re} g'(a)| \leq c(q^3 \sigma^2 + q\beta) \eta^{2/3}, \quad (3.26)$$

$$\left| \operatorname{Im} g'(qa) + \frac{\theta}{a} \right| \leq c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{2/3}. \quad (3.27)$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве формулы (3.25), получаем

$$\operatorname{Re} g'(qa) = q \operatorname{Re} g'(a) + q B_1 + \sum_{m=2}^{q-1} B_m, \quad q = 2, 3, \dots, \quad (3.28)$$

где B_m допускают оценку

$$|B_m| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| \sin^2 \frac{max}{2} dG(x) \quad (3.29)$$

для $m = 1, 2, \dots, q-1$. Оценим интегралы в правой части этих неравенств. Запишем их как суммы двух интегралов I_{m1} и I_{m2} , где

$$I_{m1} = \int_{|x| \leq \eta^{-1/3}} |x| \sin^2 \frac{max}{2} dG(x),$$

$$I_{m2} = \int_{|x| > \eta^{-1/3}} |x| \sin^2 \frac{max}{2} dG(x).$$

В силу (3.23), для интегралов I_{m1} , $m = 1, 2, \dots, q-1$, получаем оценку

$$I_{m1} \leq \eta^{-1/3} (1 - \operatorname{Re} g(ma)) \leq m^2 \eta^{2/3} \sigma^2. \quad (3.30)$$

Оценим интегралы I_{m2} , $m = 1, 2, \dots, q-1$, следующим образом:

$$I_{m2} \leq \int_{|x| > \eta^{-1/3}} |x| dG(x) \leq \int_{|x| > \eta^{-1/3} - |\theta/a|} \left(|x| + \left| \frac{\theta}{a} \right| \right) dH(x).$$

В силу неравенства Чебышева, для всех $x > 0$

$$W_H(x) = H(-x) + 1 - H(x) \leq \frac{\beta}{x^3}.$$

Интегрируя по частям, приходим к неравенству

$$\int_{|x| > \eta^{-1/3} - \pi/c_2} \left(|x| + \frac{\pi}{c_2} \right) dH(x) \leq \frac{2\beta}{(\eta^{-1/3} - \pi/c_2)^2} \leq c\eta^{2/3}\beta. \quad (3.31)$$

Из (3.30) и (3.31) следует верхняя оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \sin^2 \frac{max}{2} dG(x) \leq m^2 \eta^{2/3} \sigma^2 + c\beta \eta^{2/3} \leq c(m^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{2/3} \quad (3.32)$$

для $m = 1, 2, \dots, q-1$, что позволяет получить (3.26) из (3.28) и (3.29).

Запишем формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g'(qa) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cos(qax) dG(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x \sin^2 \frac{qax}{2} dG(x) \\ &= -\frac{\theta}{a} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x \sin^2 \frac{qax}{2} dG(x). \end{aligned}$$

Согласно этому равенству, неравенство (3.27) следует непосредственно из (3.32).

Лемма 3.9. Для всех $q = 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) + \operatorname{Re} g^{(2)}(qa) \right| \leq c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{1/3}, \quad (3.33)$$

$$|\operatorname{Im} g^{(2)}(qa)| \leq c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{1/3}. \quad (3.34)$$

Доказательство. Запишем формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) + \operatorname{Re} g^{(2)}(qa) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sin^2 \frac{qax}{2} dG(x)$$

и оценим интеграл в правой части этого равенства так же, как это было сделано для интеграла в (3.29). Используя верхние оценки, аналогичные (3.30) и (3.31), получаем (3.33).

Для того, чтобы получить (3.34), представим $-\operatorname{Im} g^{(2)}(qa)$ в виде

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} g^{(2)}(qa) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sin(qax) dG(x) = \int_{|x| \leq 3\pi/2a} x^2 \sin(qax) dG(x) \\ &\quad + \int_{|x| > 3\pi/2a} x^2 \sin(qax) dG(x) = I_{q1}^* + I_{q2}^*. \end{aligned}$$

Поскольку $|\sin(ax/2)| \geq \sqrt{2}a|x|/3\pi$ для $x \in [-3\pi/2a, 3\pi/2a]$, получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{q1}^*| &\leq \int_{|x| \leq 3\pi/2a} x^2 dG(x) = \left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}a} \right)^2 \int_{|x| \leq 3\pi/2a} \left(\frac{\sqrt{2}ax}{3\pi} \right)^2 dG(x) \\ &\leq \left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}a} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{ax}{2} dG(x) \leq \left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}c_2} \right)^2 (1 - g(a)). \end{aligned}$$

Это неравенство вместе с (3.23) дает

$$|I_{q1}^*| \leq c\eta\sigma^2. \quad (3.35)$$

Оценим интеграл I_{q2}^* с помощью неравенства Коши–Буняковского. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} |I_{q2}^*| &\leq \int_{|x|>3\pi/2a} |x|^{3/2}|x|^{1/2} |\sin(qax)| dG(x) \\ &\leq \left(\int_{|x|>3\pi/2a} |x|^3 dG(x) \int_{|x|>3\pi/2a} |x| \sin^2(qax) dG(x) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Заметив, что оценка $|x - \theta/a| \leq 2|x|$ справедлива для $|x| > 3\pi/2a$, получаем верхнюю оценку

$$\int_{|x|>3\pi/2a} |x|^3 dG(x) = \int_{|x|>3\pi/2a} \left| x - \frac{\theta}{a} \right|^3 dH(x) \leq 8\beta.$$

Следовательно, из оценки (3.32) следует соотношение

$$|I_{q2}^*| \leq c\beta^{1/2}(q^2\sigma^2 + \beta)^{1/2}\eta^{1/3} \leq c(q\sigma\sqrt{\beta} + \beta)\eta^{1/3} \leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3}.$$

Объединяя это соотношение с (3.35), получаем (3.34).

Лемма 3.10. *Представление*

$$\begin{aligned} g(t) = g(qa) \exp \left\{ \frac{g'(qa)}{g(qa)}(t - qa) + \frac{1}{2} \left(\frac{g^{(2)}(qa)}{g(qa)} - \left(\frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)^2 \right) \right. \\ \left. \times (t - qa)^2 + r_q(t - qa)^3 \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

справедливо в $(8\sigma)^{-1}$ -окрестности каждой точки qa , $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$, где r_q допускает оценку

$$|r_q| \leq 10\beta. \quad (3.37)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что

$$|g(t)| \geq \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

в $(8\sigma)^{-1}$ -окрестности точек qa , $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$. Действительно, по формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(qa) + \left\{ \operatorname{Re} \varphi'(qa + \kappa_1(t - qa)) + i \operatorname{Im} \varphi'(qa + \kappa_2(t - qa)) \right\} (t - qa), \quad (3.39)$$

где $0 < \kappa_p < 1$, $p = 1, 2$. В силу неравенства $\mathbf{E}|X| \leq \sqrt{\mathbf{E}X^2}$,

$$\left| \varphi'(2\pi q + \kappa_p(t - qa)) \right| |t - qa| \leq \mathbf{E}|X| |t - qa| \leq \sigma \frac{1}{8\sigma} = \frac{1}{8},$$

что позволяет получить нижнюю оценку (3.38) из (3.39), (3.23) и (3.16).

Рассмотрим функции $\ln g(t)$ в $(8\sigma)^{-1}$ -окрестности точек qa , $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$. Через $\ln g(t)$ обозначим главную ветвь логарифма х.ф. $g(t)$. Легко видеть, что, если потенцировать формулу Тейлора для $\ln g(t)$, получим соотношение, совпадающее с (3.36) с

$$r_q = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3}{dt^3} \operatorname{Re} \ln g(t) \Big|_{t=qa+\kappa_3(t-qa)} + i \frac{d^3}{dt^3} \operatorname{Im} \ln g(t) \Big|_{t=qa+\kappa_4(t-qa)} \right) (t-qa)^3, \quad (3.40)$$

где $0 < \kappa_p < 1$, $p = 3, 4$. Теперь нам нужна простая формула

$$\frac{d^3}{dt^3} \ln g(t) = \frac{d^3}{dt^3} \ln \varphi(t) = \frac{\varphi^{(3)}(t)}{\varphi(t)} - 3 \frac{\varphi^{(2)}(t)}{\varphi(t)} \frac{\varphi^{(1)}(t)}{\varphi(t)} + 2 \left(\frac{\varphi^{(1)}(t)}{\varphi(t)} \right)^3.$$

Используя оценки $|\varphi^{(m)}(t)| \leq \mathbf{E}|X|^m$, справедливые для всех $m = 1, 2, \dots$ и $t \in \mathbf{R}^1$, неравенство $\mathbf{E}|X| \leq \sqrt{\mathbf{E}X^2} \leq \sqrt[3]{\mathbf{E}|X|^3}$, и вспоминая (3.38), получаем, что

$$\left| \frac{d^3}{dt^3} \ln g(t) \right| = \left| \frac{d^3}{dt^3} \ln \varphi(t) \right| \leq 30\beta$$

для всех t из $(8\sigma)^{-1}$ -окрестности каждой точки qa , где $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$. Применяя эту оценку к (3.40), получаем неравенство (3.37).

Нам также необходимы некоторые утверждения, касающиеся коэффициентов, соответствующих $t - qa$ и $(t - qa)^2$ в (3.36). Для этого нам нужны формулы

$$\operatorname{Re} \frac{g^{(p)}(qa)}{g(qa)} = \operatorname{Re} g^{(p)}(qa) \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} + \operatorname{Im} g^{(p)}(qa) \frac{\operatorname{Im} g(qa)}{|g(qa)|^2}, \quad (3.41)$$

$$\operatorname{Im} \frac{g^{(p)}(qa)}{g(qa)} = \operatorname{Im} g^{(p)}(qa) \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} - \operatorname{Re} g^{(p)}(qa) \frac{\operatorname{Im} g(qa)}{|g(qa)|^2}, \quad (3.42)$$

справедливые для $p = 1, 2$.

Лемма 3.11. Для $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$ справедливы оценки

$$\left| \operatorname{Re} \frac{g'(qa)}{g(qa)} - q \operatorname{Re} \frac{g'(a)}{g(a)} \right| \leq c(q^3 \sigma^2 + q\beta) \eta^{2/3}, \quad (3.43)$$

$$\left| \operatorname{Re} \frac{g'(qa)}{g(qa)} \right| \leq cq \eta^{1/2} \sigma^2, \quad (3.44)$$

$$\left| \operatorname{Im} \frac{g'(qa)}{g(qa)} + \frac{\theta}{a} \right| \leq c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{2/3}. \quad (3.45)$$

Доказательство. Вначале докажем неравенство (3.43). Согласно (3.23) и (3.38),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} - 1 \right| &\leq \frac{1 - \operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} + \frac{1}{|g(qa)|^2} - 1 \\ &\leq 12(1 - \operatorname{Re} g(qa)) \leq 12q^2 \eta \sigma^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

В силу (3.24) и (3.38),

$$\frac{|\operatorname{Im} g(qa)|}{|g(qa)|^2} \leq 8q^3 \eta \sigma^2. \quad (3.47)$$

Из равенства (3.41) с $p = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \frac{g'(qa)}{g(qa)} - q \operatorname{Re} \frac{g'(a)}{g(a)} \right| &\leq \left| \operatorname{Re} g'(qa) \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} - q \operatorname{Re} \frac{g'(a)}{g(a)} \right| \\ &+ |\operatorname{Im} g'(qa)| \frac{|\operatorname{Im} g(qa)|}{|g(qa)|^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Из (3.27), (3.47) и (3.16) следует, что

$$|\operatorname{Im} g'(qa)| \frac{|\operatorname{Im} g(qa)|}{|g(qa)|^2} \leq \left(c(q^2 \sigma^2 + \beta) \eta^{2/3} + \frac{\pi}{c_2} \right) 8q^3 \eta \sigma^2 \leq cq^3 \eta \sigma^2. \quad (3.49)$$

С другой стороны, из (3.26), (3.38), (3.46) и (3.49) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} g'(qa) \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} - q \operatorname{Re} \frac{g'(a)}{g(a)} \right| &\leq \left| (\operatorname{Re} g'(qa) - q \operatorname{Re} g'(a)) \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} \right| \\ &+ q |\operatorname{Re} g'(a)| \left(\left| \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} - 1 \right| + \left| \frac{\operatorname{Re} g(a)}{|g(a)|^2} - 1 \right| \right) + q |\operatorname{Im} g'(a)| \frac{|\operatorname{Im} g(a)|}{|g(a)|^2} \\ &\leq c(q^3 \sigma^2 + q\beta) \eta^{2/3} + q \int_{-\infty}^{\infty} |x \sin(ax)| dG(x) 12(q^2 + 1) \eta \sigma^2 + cq \eta \sigma^2. \end{aligned}$$

Оценим интеграл в правой части этого неравенства так же, как при оценивании $\operatorname{Im} g^{(2)}(qa)$ (см. доказательство леммы 3.9). В силу (3.23),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x \sin(ax)| dG(x) &\leq \frac{6\pi}{\sqrt{2}a} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{ax}{2} dG(x) \\ &+ 2 \left(\int_{|x| > 3\pi/2a} x^2 dG(x) \int_{|x| > 3\pi/2a} \sin^2 \frac{ax}{2} dG(x) \right)^{1/2} \\ &\leq c\eta \sigma^2 + 4\sigma \eta^{1/2} \sigma \leq c\eta^{1/2} \sigma^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Применяя эту оценку к предыдущему неравенству и учитывая (3.49) и (3.16), из (3.48) получаем неравенство (3.43).

Теперь докажем неравенство (3.45). Из равенства (3.42) с $p = 1$ легко получить

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \frac{g'(qa)}{g(qa)} + \frac{\theta}{a} \right| &\leq \left| \operatorname{Im} g'(qa) + \frac{\theta}{a} \right| \frac{|\operatorname{Re} g(qa)|}{|g(qa)|^2} \\ &+ \left| \frac{\theta}{a} \right| \left| \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} - 1 \right| + |\operatorname{Re} g'(qa)| \frac{|\operatorname{Im} g(qa)|}{|g(qa)|^2}. \end{aligned}$$

Поскольку, в силу (3.50),

$$|\operatorname{Re} g'(qa)| \leq q \int_{-\infty}^{\infty} |x \sin(ax)| dG(x) \leq cq \eta^{1/2} \sigma^2,$$

из (3.27), (3.38), (3.46), (3.47) и (3.16) следует, что правая часть предыдущего неравенства не превосходит

$$c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{2/3} + cq^2\eta\sigma^2 + q\eta^{1/2}\sigma^2q^3\eta\sigma^2 \leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{2/3},$$

что доказывает (3.45).

Неравенство (3.44) доказывается аналогично.

Лемма 3.12. Для всех $q = 1, \dots, [\eta^{-1/9}]$ справедлива оценка:

$$\left| \frac{g^{(2)}(qa)}{g(qa)} - \left(\frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)^2 + \sigma^2 \right| \leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (3.41) при $p = 2$ и оценим второе слагаемое в правой части. Используя (3.34), (3.47), (3.38) и (3.16), получим

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} g^{(2)}(qa) \frac{\operatorname{Im} g(qa)}{|g(qa)|^2} \right| &\leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3}q^3\eta\sigma^2 \\ &\leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{2/3}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Изучим поведение первого слагаемого в правой части (3.41) с помощью оценок (3.33), (3.46), (3.38) и (3.16). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} g^{(2)}(qa) \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) + \operatorname{Re} g^{(2)}(qa) \right) \right) \\ &\quad \times \frac{\operatorname{Re} g(qa)}{|g(qa)|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) + r_q^*, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где r_q^* оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |r_q^*| &\leq cq^2\eta\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) + c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3} \\ &\leq cq^2\eta\sigma^2(\sigma^2 + 1) + c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3} \leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Рассмотрим теперь равенство (3.42) при $p = 2$. Рассуждая, как и выше, получаем

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \frac{g^{(2)}(qa)}{g(qa)} \right| &\leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3} + c(\sigma^2 + 1)q^3\eta\sigma^2 \\ &\leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

При помощи простой формулы

$$\left(\frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)^2 = \left(\operatorname{Re} \frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)^2 - \left(\operatorname{Im} \frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)^2 + 2i \left(\operatorname{Re} \frac{g'(qa)}{g(qa)} \right) \left(\operatorname{Im} \frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)$$

и соотношений (3.44), (3.45) и (3.16), получаем

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{g'(qa)}{g(qa)} \right)^2 + \left(\frac{\theta}{a} \right)^2 \right| &\leq cq^2\eta\sigma^4 + c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{2/3}((q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{2/3} + 1) \\ &\quad + cq\eta^{1/2}\sigma^2((q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{2/3} + 1) \leq c(q^2\sigma^2 + \beta)\eta^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Легко видеть, что утверждение леммы 3.12 следует из соотношений (3.51)–(3.55).

Утверждение леммы 3.6 вытекает из представления (3.36) и лемм 3.11 и 3.12.

Часть настоящих исследований была осуществлена в Университете Билефельда. Я благодарен проф. Ф. Гётце за его гостеприимство во время моего пребывания в Билефельде. Я также благодарен В. Бенткусу, Ф. Гётце и А. Ю. Зайцеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арак Т. В., Зайцев А. Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1986, т. 174.
2. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theor. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
3. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
4. Чистяков Г. П. Об одной задаче Колмогорова. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1990, т. 184, с. 289–319.
5. Esseen C.-G. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
6. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
7. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
8. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
9. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Московского унив., 1953, № 10, с. 29–38.
10. Le Cam L. A note on the distribution of sums of independent random variables. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1963, v. 50, p. 601–603.
11. Линник Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, т. 11, № 2, с. 111–138.
12. Петров В. В., О точных оценках в предельных теоремах. — Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 2, с. 180–182.
13. Петров В. В., Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
14. Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
15. Рогозин Б. А. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
16. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
30.VI.1998