Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Беломестный, К вопросу о восстановлении
распределения слагаемых по распределению сум-
мы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46,
выпуск 2, 366–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3923>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:12:16

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2001 г.

БЕЛОМЕСТНЫЙ Д. В.*

К ВОПРОСУ О ВОССТАНОВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛАГАЕМЫХ
ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СУММЫ¹⁾

Рассматривается проблема восстановления распределения независимых одинаково распределенных случайных величин по распределению их суммы, в которую каждое слагаемое входит с некоторой вероятностью $1 - p$. Показана неоднозначность восстановления в случае произвольного, в том числе нечетного, числа слагаемых при $0 \leq p < \frac{1}{2}$.

Ключевые слова и фразы: восстановление распределения слагаемых по распределению суммы, неоднозначность разложения свертки на компоненты.

Введение. В данной работе исследуется возможность восстановления распределения одинаково распределенных случайных величин X_i по распределению статистики

$$S = \gamma_1 X_1 + \dots + \gamma_m X_m,$$

где $X_1, \dots, X_m, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ независимы в совокупности, а каждое γ_j принимает значения 0 и 1 с вероятностями p и $1 - p$ соответственно.

При $p = 0$ эта задача является классической задачей единственности разложения данного распределения на независимые одинаково распределенные компоненты. Известны некоторые общие достаточные условия единственности такого разложения (см. [3]). С другой стороны, известны примеры (см. [1], [2]), показывающие неоднозначность разложения в случае четного числа слагаемых. В данной работе приводится некоторое достаточное условие неоднозначности разложения, из которого, в частности, следует наличие неоднозначности в случае нечетного числа слагаемых. Также рассматривается вопрос об однозначности восстановления для случая, когда $p > 0$.

1. Рассмотрим вначале случай $p = 0$. Обозначим через $\mathfrak{S}_a$ совокупность целых трансцендентных функций экспоненциального типа с показателем, меньшим или равным a , удовлетворяющих на действительной оси следующим условиям:

- 1) $\varphi(x) \geq 0$;
- 2) $\sup_{-\infty < x < \infty} \varphi(x) < \infty$;
- 3) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx < \infty$.

Согласно теореме Пели-Винера, носители преобразований Фурье функций из $\mathfrak{S}_a$ сосредоточены на $[-a, a]$.

Теорема 1. Пусть вероятностная плотность $p(x)$ имеет представление

$$p(x) = \sum_{i=0}^N p_i(x) q_i(hx), \quad (1)$$

где $p_0(x), \dots, p_N(x)$ — функции из $\mathfrak{S}_a$, $q_0(x), \dots, q_N(x)$ — непрерывные, неотрицательные, 2π -периодические функции и h — действительное число, большее или

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00-01-00661 и № 00-15-96149).

равное 2а. Тогда если для данного натурального числа $n \geq 2$ существуют такое действительное число x_0 и такое натуральное число $k \leq N$, что

$$q_k(x_0) \neq q_k\left(x_0 + \frac{2\pi}{n}\right), \quad (2)$$

то существует вероятностная плотность $\tilde{p}(x)$ такая, что

$$\underbrace{p(x) * \dots * p(x)}_n = \underbrace{\tilde{p}(x) * \dots * \tilde{p}(x)}_n,$$

но распределения, определяемые $p(x)$ и $\tilde{p}(x)$, различны.

Доказательство. Обозначим через c_{kj} k -й коэффициент Фурье функции $q_j(x)$, тогда в соответствии с известной теоремой Фейера

$$q_j(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_{kj} e^{ikx}, \quad j = 1, \dots, N,$$

причем сходимость равномерная на всей числовой оси. Определим функции $\tilde{q}_0(x), \dots, \tilde{q}_N(x)$ следующим образом:

$$\tilde{q}_j(x) = q_j\left(x + \frac{2\pi}{n}\right), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

тогда снова по теореме Фейера $\tilde{q}_j(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n [1 - |k|/(n+1)] d_{kj} e^{ikx}$, $j = 1, \dots, N$, где коэффициенты d_{kj} определяются из соотношения

$$d_{kj} = e^{i2\pi k/n} c_{kj}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Положим теперь $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^N p_i(x) \tilde{q}_i(hx)$.

Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \sum_{j=0}^N p_j(x) c_{kj} e^{ikhx} \right] dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \sum_{j=0}^N c_{kj} f_j(t + kh) \end{aligned}$$

и аналогично

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \tilde{p}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \sum_{j=0}^N d_{kj} f_j(t + kh), \quad (5)$$

где $f_j(t)$ — преобразования Фурье функции $p_j(x)$. Согласно известной теореме Пели-Винера, носители всех функций $f_j(t)$, $j = 0, \dots, N$, сосредоточены на отрезке $[-a, a]$, и поэтому для любого действительного числа t_0 существует не более одного $k_0 \in \mathbb{N}$ (очевидно, что k_0 определяется из неравенства $-a < t_0 + k_0 h < a$) такого, что $f_j(t_0 + k_0 h) \neq 0$, $j = 0, \dots, N$. Отсюда и из (4) выводим, что либо

$$f^n(t_0) = \left(\sum_{j=0}^N c_{k_0 j} f_j(t_0 + k_0 h) \right)^n = \left(\sum_{j=0}^N d_{k_0 j} f_j(t_0 + k_0 h) \right)^n = g^n(t_0), \quad (6)$$

либо $f^n(t_0) = g^n(t_0) = 0$. Аналогично при $t_0 = 0$ имеем

$$1 = f(0) = \sum_{j=0}^N c_{0j} f_j(0) = \sum_{j=0}^N d_{0j} f_j(0) = g(0). \quad (7)$$

Таким образом, $\tilde{p}(x)$ — плотность вероятности.

Осталось показать, что распределения, соответствующие $p(x)$ и $\tilde{p}(x)$, различны. Предположим противное, тогда в силу теоремы единственности это эквивалентно равенству

$$g(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj} f_j(t + kh) \equiv \sum_{j=0}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kj} f_j(t + kh) = f(t),$$

откуда при $t = t_0 + lh$, $l \in \mathbb{Z}$, $|t_0| \leq a$, имеем $\sum_{j=0}^N d_{lj} f_j(t_0) = \sum_{j=0}^N c_{lj} f_j(t_0)$. Из этих равенств, рассматриваемых при любом $|t_0| \leq a$, следует, что либо $d_{lj} = c_{lj}$ для всех l и j , либо $f_j(t) \equiv 0$ для всех j при $|t| \leq a$. Первое невозможно в силу (2) и (3), а из второго в силу формулы обращения и определения класса $\mathfrak{S}_a$ следовало бы, что $p_j(t) \equiv 0$ для всех j .

Следствие 1. В условиях теоремы, для данного n , $\tilde{p}(x)$ может быть задана по формуле

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^N p_i(x) q_i \left(hx + \frac{2\pi}{n} \right). \quad (8)$$

Следствие 2. Существует такая функция распределения $F(x)$, что распределение суммы любого числа независимых случайных величин, распределенных по закону $F(x)$, не определяет однозначно $F(x)$.

Достаточно, например, положить $F'(x) = p(x) = [(1 - \cos(x))/(\pi x^2)](1 - \cos(2x))$.

Нетрудно видеть, что $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $N = 0$, $h = 2$, $p_0(x) = (1 - \cos(x))/(\pi x^2) \in \mathfrak{S}_1$ и $q_0(x) = 1 + e^{ix}/2 + e^{-ix}/2$.

Положим для любого натурального $n \geq 2$

$$G'_n(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\pi x^2} \left(1 - \cos \left(2x + \frac{2\pi}{n} \right) \right),$$

тогда из теоремы 1 и следствия 1 вытекает, что

$$\underbrace{F(x) * \dots * F(x)}_n = \underbrace{G_n(x) * \dots * G_n(x)}_n.$$

2. Перейдем теперь к случаю $p > 0$. При $p > \frac{1}{2}$, как показано в [3], имеет место случай однозначного восстановления. Здесь рассматривается случай $p \leq \frac{1}{2}$.

Лемма 1. Пусть вероятностная плотность $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 для данного n и сама принадлежит классу $\mathfrak{S}_a$ для некоторого $a > 0$. Рассмотрим функцию распределения $F(x)$, соответствующую арифметическому распределению, сосредоточенному в точках $k\pi/\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$, с вероятностями $p_k = (\pi/\lambda)p(k\pi/\lambda)$, $k \in \mathbb{Z}$, при $\lambda \geq a$ (назовем $F(x)$ индуцированным распределением по отношению к $p(x)$). Тогда для $F(x)$ существует отличная от нее функция распределения $\tilde{F}(x)$, соответствующая арифметическому распределению, сосредоточенному в тех же точках, что и $F(x)$, такая, что

$$\underbrace{F(x) * \dots * F(x)}_n = \underbrace{\tilde{F}(x) * \dots * \tilde{F}(x)}_n.$$

Доказательство. То, что указанное в теореме арифметическое распределение действительно является распределением, т.е. то, что $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$, следует из формулы суммирования Пуассона (см. [4]).

Аналогично строится индуцированное арифметическое распределение, сосредоточенное в точках $k\pi/\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$, с вероятностями $\tilde{p}_k = (\pi\lambda)/\tilde{p}(k\pi/\lambda)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\tilde{p}(x)$ — плотность из теоремы 1, которая, как нетрудно видеть, будет также принадлежать $\mathfrak{S}_a$. $\tilde{F}(x)$ будет функцией распределения, соответствующей этому арифметическому распределению. Утверждение леммы следует теперь из того факта, что характеристические функции F и $\tilde{F}$ суть 2λ -периодические продолжения характеристических функций, соответствующих плотностям p и $\tilde{p}$.

Лемма 2. Пусть $p(x)$ и $\tilde{p}(x)$ — плотности из теоремы 1, принадлежащие $\mathfrak{S}_a$, а $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ — соответствующие им индуцированные арифметические распределения при некотором $\lambda \geq a$ (лемма 1). Пусть также неотрицательное число p удовлетворяет неравенству

$$p \leq \min \left\{ \frac{\pi}{\lambda} p(0), \frac{\pi}{\lambda} \tilde{p}(0) \right\}, \quad (9)$$

тогда существуют такие функции распределения $G_p(x)$ и $\tilde{G}_p(x)$, что

$$pE(x) + (1-p)G_p(x) = F(x), \quad pE(x) + (1-p)\tilde{G}_p(x) = \tilde{F}(x),$$

где $E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристические функции $f(t)$ и $\tilde{f}(t)$, соответствующие $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$, имеют вид

$$f(t) = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p \left(\frac{k\pi}{\lambda} \right) e^{(ik\pi/\lambda)t}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{p} \left(\frac{k\pi}{\lambda} \right) e^{(ik\pi/\lambda)t}.$$

Рассмотрим функции

$$g_p(t) = \frac{1}{1-p} f(t) - \frac{p}{1-p} = \frac{1}{1-p} \frac{\pi}{\lambda} p(0) - \frac{p}{1-p} + \frac{1}{1-p} \frac{\pi}{\lambda} \sum_{k \neq 0} p \left(\frac{k\pi}{\lambda} \right) e^{(ik\pi/\lambda)t},$$

$$\tilde{g}_p(t) = \frac{1}{1-p} \tilde{f}(t) - \frac{p}{1-p} = \frac{1}{1-p} \frac{\pi}{\lambda} \tilde{p}(0) - \frac{p}{1-p} + \frac{1}{1-p} \frac{\pi}{\lambda} \sum_{k \neq 0} \tilde{p} \left(\frac{k\pi}{\lambda} \right) e^{(ik\pi/\lambda)t}.$$

При выполнении условия (9) они будут снова характеристическими функциями некоторых арифметических распределений с функциями распределения $G_p(x)$ и $\tilde{G}_p(x)$ соответственно.

Теорема 2. Для любого натурального $m > 1$ и действительного $0 < p < \frac{1}{2}$ существуют две такие различные функции распределения $G(x)$ и $\tilde{G}(x)$, что

$$[pE(x) + (1-p)G(x)]^{*m} = [pE(x) + (1-p)\tilde{G}(x)]^{*m},$$

где $E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$p(x) = (1-\alpha)Mp_0(Mx) + \alpha p_0(x) + \varepsilon \cos((M+1)x)p_0(x),$$

где $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ — действительные числа, M — натуральное, а $p_0(x)$ — некоторая вероятностная плотность из $\mathfrak{S}_1$. Функция $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $N=1$, $h=M$ с $q_0(x) \equiv 1$, $q_1(x) = \alpha + \varepsilon e^{ix}/2 + \varepsilon e^{-ix}/2 > 0$ и $p_1(x) = Mp_0(Mx)$. Нетрудно показать, что $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$ и $p(x)$ принадлежит $\mathfrak{S}_{M+2}$. Согласно теореме 1, для любого натурального $m > 1$ существует вероятностная плотность $\tilde{p}_m(x)$ такая, что

$$\underbrace{p(x) * \dots * p(x)}_m = \underbrace{\tilde{p}_m(x) * \dots * \tilde{p}_m(x)}_m.$$

Из (8) следует, что $\tilde{p}_m(x)$ имеет вид

$$\tilde{p}_m(x) = (1-\alpha)p_0(Mx) + \alpha p_0(x) + \varepsilon \cos\left((M+1)x + \frac{2\pi}{m}\right)p_0(x).$$

Из лемм же 1 и 2 следует, что утверждения теоремы верны при

$$p \leq \min \left\{ \frac{\pi}{M+2} p(0), \frac{\pi}{M+2} \tilde{p}_m(0) \right\} \leq \pi p_0(0) \frac{(1-\alpha)M + \alpha - \varepsilon}{M+2}.$$

Возьмем в качестве $p_0(x)$ функцию $(1 - \cos(x))/(\pi x^2)$, тогда $p_0(0) = 1/(2\pi)$. Выбирая M большим, а α и ε достаточно малыми, получим, что для любого $p \leq p_0 < \frac{1}{2}$ теорема остается верной.

Теорема 3. При $p = \frac{1}{2}$ имеет место случай однозначного восстановления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть существуют такие две различные функции распределения $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ и такое натуральное число $m > 1$, что

$$\left[\frac{1}{2} E(x) + \frac{1}{2} F(x) \right]^{*m} = \left[\frac{1}{2} E(x) + \frac{1}{2} \tilde{F}(x) \right]^{*m}, \quad (10)$$

где $E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения. Если обозначить через $f(t)$ и $\tilde{f}(t)$ характеристические функции, соответствующие $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$, то (10) перепишется в эквивалентной форме

$$[g(t)]^m = [\tilde{g}(t)]^m, \quad (11)$$

где $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ — характеристические функции, равные соответственно $\frac{1}{2} + f(t)/2$ и $\frac{1}{2} + \tilde{f}(t)/2$. Положим $T = \min\{t: g(t) = 0\}$. Сразу отметим, что $T < \infty$, так как в противном случае равенство (11) было бы невозможно в силу теоремы 1 из [3]. Далее имеем, что $f(T) = \tilde{f}(T) = -1$. Используя известные свойства характеристических функций, легко показать, что $f(t)$ и $\tilde{f}(t)$ имеют вид

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{i\pi(2k+1)/T}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_k e^{i\pi(2k+1)/T}.$$

Из этих равенств и определения $g(t)$ следует, что $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ являются $2T$ -периодическими. Докажем, что на периоде они не имеют других нулей кроме T . Предположим противное, и пусть s — корень $g(t)$ (а значит, и $\tilde{g}(t)$), лежащий на $(T, 2T)$ (s не может принадлежать $(0, T)$ в силу определения T). Тогда $s - T$ принадлежит $(0, T)$, но $g(s - T) = \frac{1}{2} + f(s - T)/2 = \frac{1}{2} - f(s)/2 = 1$. Таким образом, мы получили, что $g(t)$ является периодической с периодом $s - T < T$ и, тем более, не обращается в нуль на своем периоде.

Используя необращение в нуль $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ на $[0, T) \cup (T, 2T]$, можно показать, что для выполнения (11) необходимо, чтобы $g(t) = \tilde{g}(t) e^{2k\pi/m}$ на отрезке $[T, 2T]$ для некоторого натурального $k \leq m$. Но $g(2T) = \tilde{g}(2T) = 1$, поэтому $k = m$ и $g(t) \equiv \tilde{g}(t)$.

В заключение выражаю благодарность А. В. Прохорову и Н. Г. Ушакову за постановку задачи и ценные замечания в процессе ее решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stoyanov J. Counterexamples in Probability. Chichester: Wiley, 1987, 313 p.
2. Ushakov N. G. Selected Topics in Characteristic Functions. Utrecht: VSP, 1999, 355 p.
3. Прохоров А. В., Ушаков Н. Г. О задаче восстановления распределения слагаемых по распределению суммы. (В печати.)
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
25.X.2000

© 2001 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ К ЗАДАЧЕ ОБ ε -УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

Для средних арифметических стационарных процессов второго порядка даются оценки вероятностей ε -уклонов. Приводятся примеры, подтверждающие точность этих оценок.

* Московский государственный университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, ГСП-4, ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке внебюджетного фонда НИОКР МПС РФ.