Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, Несколько примеров к задаче об ε -уклонениях для стационарных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 370–375

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:43:52

где $E(x)$ — вырожденная в нуле функция распределения. Если обозначить через $f(t)$ и $\tilde{f}(t)$ характеристические функции, соответствующие $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$, то (10) перепишется в эквивалентной форме

$$[g(t)]^m = [\tilde{g}(t)]^m, \quad (11)$$

где $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ — характеристические функции, равные соответственно $\frac{1}{2} + f(t)/2$ и $\frac{1}{2} + \tilde{f}(t)/2$. Положим $T = \min\{t: g(t) = 0\}$. Сразу отметим, что $T < \infty$, так как в противном случае равенство (11) было бы невозможно в силу теоремы 1 из [3]. Далее имеем, что $f(T) = \tilde{f}(T) = -1$. Используя известные свойства характеристических функций, легко показать, что $f(t)$ и $\tilde{f}(t)$ имеют вид

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{i\pi(2k+1)/T}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_k e^{i\pi(2k+1)/T}.$$

Из этих равенств и определения $g(t)$ следует, что $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ являются $2T$ -периодическими. Докажем, что на периоде они не имеют других нулей кроме T . Предположим противное, и пусть s — корень $g(t)$ (а значит, и $\tilde{g}(t)$), лежащий на $(T, 2T)$ (s не может принадлежать $(0, T)$ в силу определения T). Тогда $s - T$ принадлежит $(0, T)$, но $g(s - T) = \frac{1}{2} + f(s - T)/2 = \frac{1}{2} - f(s)/2 = 1$. Таким образом, мы получили, что $g(t)$ является периодической с периодом $s - T < T$ и, тем более, не обращается в нуль на своем периоде.

Используя необращение в нуль $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ на $[0, T) \cup (T, 2T]$, можно показать, что для выполнения (11) необходимо, чтобы $g(t) = \tilde{g}(t) e^{2k\pi/m}$ на отрезке $[T, 2T]$ для некоторого натурального $k \leq m$. Но $g(2T) = \tilde{g}(2T) = 1$, поэтому $k = m$ и $g(t) \equiv \tilde{g}(t)$.

В заключение выражаю благодарность А. В. Прохорову и Н. Г. Ушакову за постановку задачи и ценные замечания в процессе ее решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stoyanov J. Counterexamples in Probability. Chichester: Wiley, 1987, 313 p.
2. Ushakov N. G. Selected Topics in Characteristic Functions. Utrecht: VSP, 1999, 355 p.
3. Прохоров А. В., Ушаков Н. Г. О задаче восстановления распределения слагаемых по распределению суммы. (В печати.)
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
25.X.2000

© 2001 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ К ЗАДАЧЕ ОБ ε -УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

Для средних арифметических стационарных процессов второго порядка даются оценки вероятностей ε -уклонов. Приводятся примеры, подтверждающие точность этих оценок.

* Московский государственный университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, ГСП-4, ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке внебюджетного фонда НИОКР МПС РФ.

Ключевые слова и фразы: стационарные последовательности второго порядка, квазистационарные последовательности, средние арифметические, дисперсии средних, вероятности ε -уклонений.

Пусть $(X_n)_1^\infty$ — последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и принимающих комплексные значения; $X_n = X_n(x)$, $x \in \Omega$. Предположим, что эта последовательность — стационарная второго порядка и

$$\mathbf{E}X_n = 0, \quad \mathbf{E}|X_n|^2 = a^2, \quad R(n) = \mathbf{E}(X_{k+n}\overline{X}_k);$$

$$\sigma_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k; \quad p_n^*(\varepsilon) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{k \geq n} |\sigma_k| \geq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Если $\mathbf{E}|X_n|^2 < \infty$, то обозначают $X \in L^2(\Omega)$, $\|X\| = (\mathbf{E}|X|^2)^{1/2}$. Известно, что скорость убывания вероятностей ε -уклонений $p_n^*(\varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$ тесно связана со скоростью убывания дисперсий $D(n) = \mathbf{E}|\sigma_n|^2$ (см., например, [3]–[6]). Далее буквами A, B, C с индексами и без будут обозначаться некоторые положительные постоянные, необязательно одинаковые.

В обзорной статье [4] было показано, что при $D(n) = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, справедлива оценка $p_n^*(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2} n^{-\alpha/2})$, и была поставлена задача об улучшении этой оценки.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (см. [3]). Если $D(n) \leq Cn^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то при $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$

$$p_n^*(\varepsilon) \leq Bn^{-\alpha} \varepsilon^{-2}.$$

Теорема 2. Если $D(n) \leq Cn^{-1}$, то при $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$

$$p_n^*(\varepsilon) \leq B \ln^2(n+1) n^{-1} \varepsilon^{-2}.$$

Теорема 3. Если $D(n) \leq Cn^{-\alpha}$, $1 < \alpha \leq 2$, то при $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$

$$p_n^*(\varepsilon) \leq Bn^{-1} \varepsilon^{-2}.$$

Заметим, что для ненулевой стационарной последовательности (X_j)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^2 D(n) > 0$$

(см., например, [2, следствие 5]).

Перед доказательством теорем 2 и 3 удобно привести ряд лемм.

Обозначим

$$\delta_m^*(x) = \max_{2^m \leq k < 2^{m+1}} |\sigma_k(x)|; \quad q_m(\varepsilon) = \mathbf{P}\{\delta_m^* \geq \varepsilon\};$$

$$\delta_m(x) = \max_{2^m < k < 2^{m+1}} \left| \sum_{j=2^m+1}^k X_j \right|.$$

Лемма 1. Справедливы оценки

$$\delta_m^*(x) \leq |\sigma_{2^m}(x)| + 2^{-m} \delta_m(x); \quad q_m(\varepsilon) \leq 2 \left(\|\sigma_{2^m}\|^2 + 2^{-2m} \|\delta_m\|^2 \right) \varepsilon^{-2}.$$

Первая оценка следует из неравенства

$$|\sigma_k(x)| \leq 2^{-m} \left(\left| \sum_{j=1}^{2^m} X_j \right| + \left| \sum_{j=2^m+1}^k X_j \right| \right),$$

а вторая — из неравенства Чебышева.

Лемма 2. Пусть при некотором λ , $0 < \lambda < 1$, последовательность $(\varphi(m))$ удовлетворяет условиям $\varphi(m) \downarrow 0$, $\varphi(2m) \leq \lambda \varphi(m)$, $m \geq 1$.

Тогда из оценки $q_m(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2} \varphi(2^m)$, $m \geq 1$, следует оценка $p_n^*(\varepsilon) \leq C_1 \varepsilon^{-2} \varphi(2^m)$, $2^m \leq n < 2^{m+1}$, $m \geq 1$, $C_1 = C(1-\lambda)^{-1}$.

Действительно, $p_n^*(\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^\infty q_{m+k-1}(\varepsilon) \leq C_1 \varepsilon^{-2} \varphi(2^m)$.

Лемма 3. Если для некоторой последовательности $(Y_j)_1^\infty$ в $L^2(\Omega)$ при всех $m \geq 0$, $n \geq 1$ и некотором $\beta \geq 1$ справедлива оценка $\|\sum_{j=m+1}^{m+n} Y_j\|^2 \leq Cn^\beta$, то при $m \geq 1$, $n \geq 1$

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=m+1}^{m+k} Y_j \right| \right\|^2 \leq BF(n),$$

где $F(n) = n^\beta$, $\beta > 1$; $F(n) = n \ln^2(n+1)$, $\beta = 1$.

Это утверждение получается как частный случай «максимального неравенства» Ф. Морица [5] (в теоремах 1 и 3 надо положить $g(F_{b,n}) = n$).

Доказательство теоремы 2. Так как по предположению

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} X_j \right\|^2 \leq Ck,$$

то $\|\sigma_{2^m}\|^2 \leq C2^{-m}$. В силу леммы 3 имеем $2^{-2^m} \|\sigma_m\|^2 \leq C2^{2^m}$.

Далее, по лемме 1 $q_m(\varepsilon) \leq C\varphi(2^m)\varepsilon^{-2}$, где $\varphi(n) = n^{-1} \ln^2(n+1)$, а по лемме 2 $p_n^*(\varepsilon) \leq B\varphi(n)\varepsilon^{-2}$.

Заметим, что с помощью лемм 2 и 3 также можно получить теорему 1 (положив $\beta = 2 - \alpha > 1$ в лемме 3).

Доказательство теоремы 3. В этом случае применим метод двоичных разбиений сумм в следующем варианте.

Наша задача — оценить при любых $x \in \Omega$ и k , $2^m < k < 2^{m+1}$, сумму $|\sum_{l=2^m+1}^k X_l(x)|$. Запишем двоичное представление числа k в виде $k = 2^m + 2^{p_1} + \dots + 2^{p_{s_k}}$, где $0 \leq p_{s_k} < \dots < p_1 \leq m-1$, $s_k \leq m$.

Тогда целочисленный промежуток $(2^m, k]$ представляется в виде $(2^m, k] = \cup_{i=1}^{s_k} J_i$, где $J_1 = (2^m, 2^m + 2^{p_1}]$, $J_2 = (2^m + 2^{p_1}, 2^m + 2^{p_1} + 2^{p_2}]$, При $p = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-p}$ обозначим через $I_{m,p,j}$ целочисленный промежуток $(2^m + (j-1)2^p, 2^m + j2^p]$ и положим $\Delta_{m,p,j}(x) = \sum_{l \in I_{m,p,j}} X_l(x)$; $j = 1, \dots, 2^{m-p}$, $p = 0, \dots, m-1$. Очевидно, что $J_i = I_{m,p_i,j_i}$, где $1 \leq j_i \leq 2^{m-p_i}$, а именно, $j_1 = 1$, $j_2 = 2^{p_1-p_2}$, $j_3 = 2^{p_1-p_3} + 2^{p_2-p_3}$, Поэтому при любых $x \in \Omega$ и $k \in (2^m, 2^{m+1})$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=2^m+1}^k X_l(x) \right|^2 &= \left| \sum_{i=1}^{s_k} \Delta_{m,p_i,j_i}(x) \right|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{s_k} (p_i + 1)^2 |\Delta_{m,p_i,j_i}(x)|^2 \\ &\leq 2 \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^2 \sum_{j=1}^{2^{m-p}} |\Delta_{m,p,j}(x)|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь использовано неравенство

$$\left| \sum a_j \right|^2 \leq \sum (j+1)^2 |a_j|^2 \sum (j+1)^{-2} \leq 2 \sum (j+1)^2 |a_j|^2.$$

Так как правая часть неравенства (1) не зависит от k , то для

$$\delta_m(x) = \max_{2^m < k < 2^{m+1}} \left| \sum_{l=2^m+1}^k X_l(x) \right|$$

справедлива оценка $\delta_m^2(x) = 2 \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^2 \sum_{j=1}^{2^{m-p}} |\Delta_{m,p,j}(x)|^2$. По предположению теоремы при некотором $\alpha > 1$

$$\|\Delta_{m,p,j}\|^2 \leq C2^{p(2-\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m-p}.$$

Следовательно, $\|\delta_m\|^2 \leq 2C \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^2 2^{p(1-\alpha)} 2^m \leq B2^m$, и остается снова применить леммы 1 и 2.

З а м е ч а н и е. Аналогии теорем 1–3 справедливы и для квазистационарных последовательностей, для которых

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} X_j \right\|^2 \leq Ck^{2-\alpha} \quad (m \geq 0, k \geq 1), \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

Главная цель данной заметки — показать, что оценки в теоремах 1, 2 и 3 являются точными по порядку (в зависимости от n) в классе стационарных последовательностей. Заметим, что для квазистационарных последовательностей такие примеры строятся проще.

П р и м е р 1. Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует стационарная последовательность (X_k) , обладающая свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_k &= 0; \quad \mathbf{E}|X_k|^2 = a^2; \quad |R(n)| \leq Cn^{-\alpha}; \\ D(n) &\leq Cn^{-\alpha}; \quad \mathbf{P}\{|\sigma_n| \geq 1\} \geq \frac{1}{4}n^{-\alpha} \quad (n \geq n_0). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стационарная последовательность (X_k) будет построена на вероятностном пространстве $\Omega = [0, 1]$, где $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Пусть $(\Phi_k(x))_{k=1}^\infty$ — ортонормированная система (ОНС), состоящая из действительных функций на отрезке $[0, 1]$, которая будет выбрана позднее, $\mathbf{E}\Phi_k = 0$, и $c_m = 8m^{-\beta}$; $\beta = \frac{1}{2}(1 + \alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Образую стационарную последовательность

$$X_k = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Phi_{k+m-1}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тогда $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}|X_k|^2 = \sum c_m^2 = a^2 < \infty$;

$$|\mathbf{E}X_k X_{k+n}| = |R(n)| = \sum_{m=1}^{\infty} c_m c_{m+n} = \sum_{m=1}^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} \leq Cn^{-\alpha}.$$

Следовательно, и $D(n) \leq Cn^{-\alpha}$. Возьмем число β_1 , $\frac{1}{2} < \beta_1 < \beta$, и положим $\gamma = \beta - \beta_1$. Выберем целое m_0 столь большим, чтобы

$$2^{2\beta_1-1} > (1 + 2^{-2m_0\gamma-2\gamma})(1 - 2^{-m_0\gamma})^{-1}. \quad (3)$$

Положим $a_m = \frac{1}{8}(1 - 2^{-m\gamma})$, $b_m = \frac{1}{8}(1 + 2^{-m\gamma})$. Выберем при $m \geq m_0$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ непересекающиеся интервалы I_{mk} , I'_{mk} , I''_{mk} , $k = 1, 2, \dots, 2^m$, так, чтобы

$$\mathbf{P}(I_{mk}) = 2^{-2m\beta-2}, \quad \mathbf{P}(I'_{mk}) = 2^{-2m\beta_1}a_m, \quad \mathbf{P}(I''_{mk}) = 2^{-2m\beta_1}b_m,$$

и множества $E_{mk} = I_{mk} \cup I'_{mk} \cup I''_{mk}$ удовлетворяли условиям $E_{m+1,2k-1} \subset I'_{mk}$, $E_{m+1,2k} \subset I''_{mk}$.

Такой выбор возможен, так как

$$\sum_{k=1}^{2^m} \mathbf{P}(E_{mk}) = 2^m(2^{-2m\beta-2} + 2^{-2m\beta_1-2}) = 2^{-2}(2^{-m(2\beta-1)} + 2^{-m(2\beta_1-2)}) < \frac{1}{2}$$

и при любом m непересекающиеся множества E_{mk} , $k = 1, \dots, 2^m$, можно разместить на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$. Кроме того, в силу (3) при $m \geq m_0$, $k = 1, \dots, 2^m$

$$\mathbf{P}(E_{m+1,2k-1}) = 2^{-2m\beta-2\beta-2} + 2^{-2m\beta_1-2\beta_1-2} < \mathbf{P}(I'_{mk}) = 2^{-2m\beta_1-3}(1 - 2^{-m\gamma}),$$

и аналогично $\mathbf{P}(E_{m+1,2k}) < \mathbf{P}(I''_{mk})$.

Перейдем к построению нужной ОНС $(\Phi_\nu(x))$ на $[0, 1]$.

В качестве $\Phi_1(x), \dots, \Phi_{2^{m_0}-1}(x)$ возьмем произвольные ортонормированные функции, носители которых лежат на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ и у которых $\mathbf{E}\Phi_\nu = 0$. Дальнейшие функции $\Phi_\nu(x)$ будем строить по «пачкам», $\nu \in [2^m, 2^{m+1})$, $m \geq m_0$.

А именно, при $\nu = 2^m + k - 1$, $k = 1, \dots, 2^m$, пусть функция $\Phi_\nu(x)$ равна $2^{m\beta+1/2}$ на интервале I_{mk} , равна $2^{m\beta_1+1/2}$ на интервале I'_{mk} , равна $-2^{m\beta_1+1/2}$ на интервале I''_{mk} и равна нулю в остальных точках отрезка $[0, 1]$. Заметим, что числа a_m, b_m подобраны так, что $\mathbf{E}\Phi_\nu = 0$, $\mathbf{E}\Phi_\nu^2 = 1$, $\nu \geq 2^{m_0}$.

Проверим, что $\mathbf{E}\Phi_k\Phi_j = 0$ при $j < k$. Если функции Φ_j и Φ_k из одной пачки, или если $j < 2^{m_0} \leq k$, то они имеют непересекающиеся носители. Если же $k = 2^m + l$, $0 \leq l < 2^m$, а функция Φ_j из r -й пачки, $m_0 \leq r \leq m-1$, то Φ_k сосредоточена на интервале I'_{rk} или I''_{rk} (при некотором k') и, следовательно, $\mathbf{E}\Phi_k\Phi_j = C_r\mathbf{E}\Phi_k = 0$.

Возьмем в конструкции (2) эту систему. Пусть

$$d_l = c_1 + c_2 + \dots + c_l, \quad d_{l,n} = c_{l+1} + \dots + c_{l+n}.$$

Тогда

$$d_l \geq 8l^{1-\beta}, \quad l \geq 1. \quad (4)$$

Подставляя (2) в выражение для $\sigma_n(x)$, получим, что

$$n\sigma_n(x) = \sum_{l=1}^n d_l\Phi_l(x) + \sum_{l=1}^{\infty} d_{l,n}\Phi_{l+n}(x). \quad (5)$$

Пусть $x \in I_m = \cup_{k=1}^{2^m} I_{mk}$. Оценим при $2^{m+1} \leq n < 2^{m+2}$, $m \geq m_0$, выражение $n\sigma_n(x)$. По построению, $\Phi_l(x) = 0$ при $l \geq 2^{m+1}$; следовательно, при $x \in I_m$ имеем

$$n\sigma_n(x) = \Sigma_m^1(x) + \Sigma_m^2(x),$$

где

$$\Sigma_m^1(x) = \sum_{p=1}^m \sum_{l=2^{p-1}}^{2^p-1} d_l\Phi_l(x), \quad \Sigma_m^2(x) = \sum_{l=2^m}^{2^{m+1}-1} d_l\Phi_l(x).$$

Если $x \in I_{mk}$, где $1 \leq k \leq 2^m$ — фиксированное число, то $\Phi_{2^m+k-1}(x) = 2^{m\beta+1/2}$, а остальные функции этой пачки в точке x равны нулю. В силу (4) имеем

$$\Sigma_m^2(x) \geq 2^{m+3}. \quad (6)$$

Далее, по построению, в p -й пачке, где $m_0 \leq p \leq m-1$, не более чем одна функция $\Phi_l(x)$ отлична от нуля в этой точке x , причем справедлива оценка

$$d_l\Phi_l(x) \geq -C_0 2^{(1-\gamma)p}.$$

Так как $|\sum_{l=1}^{2^{m_0}} d_l\Phi_l(x)| \leq C_1$, то

$$\Sigma_m^1(x) \geq -C_0 \sum_{p=m_0}^{m-1} 2^{(1-\gamma)p} - C_1 \geq -C_\gamma 2^{m(1-\gamma)} - C_1. \quad (7)$$

Из соотношений (5)–(7) вытекает, что при $n \in [2^{m+1}, 2^{m+2})$, $x \in I_m$ для всех достаточно больших m выполнено неравенство $n\sigma_n(x) \geq 2^{m+2}$, т.е. $|\sigma_n(x)| > 1$. Значит, при всех достаточно больших значениях n имеем

$$p_n(1) = \mathbf{P}\{|\sigma_n(x)| > 1\} \geq \mathbf{P}(I_m) = 2^{-m\alpha-2} > \frac{1}{4} n^{-\alpha}.$$

П р и м е р 2. Существует ОНС $(\Phi_k(x))$ на отрезке $[0, 1]$ такая, что

$$p_n^*(1) = \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} |\sigma_k| \geq 1\right\} \geq B n^{-1} \ln^2(n+1), \quad n \geq n_0,$$

при этом $D(n) = \|\sigma_n\|^2 = n^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме К. Тандори (см. [1, с. 95–99]) для любых $C_m \geq 1$ существует ОНС $(\Phi_j(x))$ на отрезке $[0, 1]$ такая, что для $x \in E_m$, $\mathbf{P}(E_m) = (5C_m)^{-1}$, существует число $n(x)$, $2^m < n(x) \leq 2^{m+1}$, при котором выполняется неравенство

$$\left| \sum_{j=2^m+1}^{n(x)} \Phi_j(x) \right| \geq AC_m^{1/2} 2^{m/2} m.$$

Выберем $C_m = A^{-2}2^{m+4}m^{-2}$. Тогда $|\sum_{j=2^{m+1}}^{n(x)} \Phi_j(x)| \geq 2^{m+2}$ на множестве E_m , $\mathbf{P}(E_m) = 4Bm^22^{-m}$, $B = A^2/320$. С другой стороны,

$$\|\sigma_{2^m}\|^2 = \left\| 2^{-m} \sum_{j=1}^{2^m} \Phi_j(x) \right\|^2 = 2^{-m},$$

т.е. если $G_m = \{x \in [0, 1]: |\sigma_{2^m}(x)| \geq 1\}$, то $\mathbf{P}(G_m) \leq 2^{-m}$. Обозначим $E_m - G_m = F_m$, $\mathbf{P}(F_m) \geq 3Bm^22^{-m}$ для всех достаточно больших m . При $x \in F_m$ имеем

$$|\sigma_{n(x)}(x)| \geq 2^{-(m+1)} \left| \sum_{j=2^{m+1}}^{n(x)} \Phi_j(x) \right| - |\sigma_{2^m}(x)| \geq 1.$$

Итак, $\mathbf{P}\{\sup_{k \geq 2^m} |\sigma_k| \geq 1\} \geq 3Bm^22^{-m}$, откуда следует наше утверждение.

Пример 3. Существует стационарная последовательность (X_k) такая, что

$$D(n) \leq 2n^{-2} \quad (8)$$

и

$$p_n^*\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} |\sigma_k| \geq \frac{1}{4}\right\} \geq \frac{1}{2}n^{-1}. \quad (9)$$

Доказательство. Построим сначала вспомогательную ОНС $(\Phi_n(x))$ на $[0, 1]$. При $n = 2^m, \dots, 2^{m+1} - 1$, $m \geq 0$, возьмем в качестве $\Phi_n(x)$ функции из пачки Хаара с номером $2m$, т.е. для $k = 1, \dots, 2^m$ функция $\Phi_{2^m+k-1}(x)$ равна $\pm 2^m$ на левой и правой половинах отрезка $\Delta_{2^m, k} = [(k-1)2^{-2^m}, k2^{-2^m}]$ и равна нулю вне этого отрезка.

Тогда $\mathbf{E}\Phi_k = 0$. Рассмотрим стационарную последовательность $X_k = \Phi_k - \Phi_{k+1}$. Следовательно, $\mathbf{E}\Phi_k = 0$,

$$\sigma_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n (\Phi_k - \Phi_{k+1}) = n^{-1}(\Phi_1 - \Phi_{n+1}),$$

и выполнено (8). С другой стороны, на $\Delta_{2^m, k}$ при $n = 2^m + k - 2$, $k = 1, \dots, 2^m$, выполняется неравенство

$$|\sigma_n(x)| \geq n^{-1} |\Phi_{n+1}(x)| - n^{-1} \geq n^{-1}(2^m - 1) \geq \frac{1}{4},$$

т.е. на $E_m = \cup_{k=1}^{2^m} \Delta_{2^m, k}$, $\mathbf{P}(E_m) = 2^{-m}$, имеем $\max_{2^m-1 \leq k < 2^{m+1}-1} |\sigma_k(x)| \geq \frac{1}{4}$.

Отсюда следует соотношение (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1956, 359 с.
2. Гапошкин В. Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, т. 39, № 6, с. 1366–1392.
3. Гапошкин В. Ф. О скорости убывания вероятностей ε -уклоновений средних стационарных процессов. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 3, с. 366–372.
4. Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 4, с. 73–123.
5. Moricz F. Moment inequalities and the strong laws of large numbers. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1976, B. 35, № 4, S. 299–314.
6. Moricz F. A general moment inequality for the maximum of partial sums of single series. — Acta Sci. Math., 1982, v. 44, № 1–2, p. 67–75.

Поступила в редакцию
25.II.1999