Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Калинин, О вероятности вырождения ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия частиц, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 376–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:23:05

© 2001 г.

КАЛИНКИН А. В.*

О ВЕРОЯТНОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ДВУМЯ КОМПЛЕКСАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

Рассматривается марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем и одним типом частиц T , в котором любая пара частиц $T + T$, независимо от всех других частиц, порождает потомство. Кроме того, любая из частиц типа T также порождает потомство. Получены выражения для вероятностей вырождения процесса при некоторых предположениях о распределении случайного числа потомков. Применяется метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой системы дифференциальных уравнений Колмогорова [6], [7].

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс с взаимодействием частиц, вероятности вырождения, уравнение Лапласа для экспоненциальной производящей функции, точные решения.

1. Ветвящийся процесс с одним типом частиц T и двумя комплексами взаимодействия $\epsilon^1 = 1$, $\epsilon^2 = 2$ [5]. На множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс ξ_t , $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{ij}(t) = P\{\xi_t = j | \xi_0 = i\}$, $i, j \in N$. Пусть при $\Delta t \rightarrow 0$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$)

$$P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} (p_{j-i+2}^2 i(i-1)\lambda + p_{j-i+1}^1 i\mu)\Delta t + o(\Delta t), & \text{если } j \geq i-2, j \neq i; \\ 1 - (i(i-1)\lambda + i\mu)\Delta t + o(\Delta t), & \text{если } j = i; \\ o(\Delta t), & \text{если } j \leq i-2, \end{cases}$$

где $\{p_l^k \geq 0, l \in N; \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k = 1, p_k^k = 0\}$, $k = 1, 2$, — заданные распределения вероятностей. Введем производящие функции

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i \in N; \quad h_k(s) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k s^l, \quad k = 1, 2; \quad |s| \leq 1.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса ξ_t равносильна линейному уравнению в частных производных (см. [5, теорема 1])

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda(h_2(s) - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \mu(h_1(s) - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \quad (1)$$

с начальным условием $F_i(0; s) = s^i$.

Состояние i интерпретируется как наличие i частиц типа T . Можно полагать, что через случайные промежутки времени происходят взаимодействия частицы типа T с другой частицей типа T . Эта пара частиц независимо от других частиц превращается в новую группу из n частиц типа T : $T + T \rightarrow nT$, с распределением вероятностей $\{p_n^2\}$; процесс переходит в состояние $i + n - 2$. Кроме того, через случайные промежутки времени, одна из частиц типа T независимо от других частиц превращается в группу из m частиц типа T : $T \rightarrow mT$, с распределением вероятностей $\{p_m^1\}$; процесс переходит в состояние $i + m - 1$.

Процесс ξ_t принадлежит специальному классу марковских процессов со счетным числом состояний, определенному Б. А. Севастьяновым [5]. В [1], [2] рассматриваемый процесс интерпретируется как модель химической реакции. Ж. Летесье и Г. Валэн построили точные незамкнутые решения уравнения (1) для различных частных случаев $h_1(s)$, $h_2(s)$ в связи с приложениями в физике высоких энергий (см. [3] и др.).

* Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия; <http://www.bmstu.ru/facult/fn/kalin/kalinkin.htm>

2. Задача о вероятностях вырождения. Для рассматриваемого марковского процесса ξ_t состояние 0 является поглощающим. Вероятности вырождения — вероятности попадания в поглощающее состояние — равны

$$q_{i0} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i0}(t), \quad i \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Для обычного ветвящегося процесса с независимыми частицами, когда $\lambda = 0$, $\mu > 0$, $q_{i0} = q_1^i$, $i \in \mathbf{N}$, где q_1 — ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения $h_1(s) - s = 0$ (см. [4, гл. 2, §1]).

Для ветвящегося процесса с попарно взаимодействующими частицами, когда $\lambda > 0$, $\mu = 0$ ($p_0^2 > 0$),

$$q_{i0} \sim C_0 q_2^i, \quad i \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $C_0 > 0$ и q_2 — ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения $h_2(s) - s^2 = 0$ (см. [5], [7, следствие 1]).

Для ветвящегося процесса ξ_t ($\lambda > 0$, $\mu > 0$) вводятся **параметры критичности** $m_1 = \mu(h_1'(1) - 1)$, $m_2 = \lambda(h_2'(1) - 2)$ [4], [5]. Все возможные варианты значений этих параметров можно разделить на три случая: 1) $m_2 > 0$; 2) $m_2 = 0$, $m_1 > 0$; 3) $m_2 = 0$, $m_1 \leq 0$ или $m_2 < 0$.

В настоящей работе рассмотрен случай 1), получены выражения для вероятностей вырождения (2) при дополнительных предположениях о распределении числа потомков $\{p_m^1, m \in \mathbf{N}\}$, $\{p_n^2, n \in \mathbf{N}\}$. Показано, что асимптотическое поведение вероятностей вырождения q_{i0} при $i \rightarrow \infty$ может быть отлично от вида (3).

В случае 3) можно предполагать, что $q_{i0} = 1$ для всех $i \in \mathbf{N}$.

3. Дифференциальное уравнение для экспоненциальной производящей функции вероятностей вырождения. Введем экспоненциальные производящие функции

$$G_j(t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} P_{ij}(t), \quad j \in \mathbf{N}; \quad g_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} q_{i0}, \quad (4)$$

и линейные дифференциальные операторы

$$h_k \left(\frac{d}{dz} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k \frac{d^l}{dz^l}, \quad k = 1, 2.$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса ξ_t равносильна линейному уравнению в частных производных ([5, теорема 2]; ср. [7, теорема 1])

$$\frac{\partial G_j(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda z^2 \left(h_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \mu z \left(h_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] G_j(t; z)$$

с начальным условием $G_j(0; z) = z^j / j!$.

Аналогично теореме 2 из [7] показывается, что $g_0(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_0(t; z)$ и $g_0(z)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению Колмогорова

$$\left[\lambda z \left(h_2 \left(\frac{d}{dz} \right) - \frac{d^2}{dz^2} \right) + \mu \left(h_1 \left(\frac{d}{dz} \right) - \frac{d}{dz} \right) \right] g_0(z) = 0 \quad (5)$$

при граничном условии $g_0(0) = 1$. Заметим, что $g_0(z)$ — целая функция порядка не больше единицы, так как

$$|g_0(z)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{i!} |q_{i0}| \leq e^{|z|}. \quad (6)$$

4. Об интегральном представлении для вероятностей вырождения q_{i0} . Пусть $h_1(s)$, $h_2(s)$ — многочлены. Обыкновенное дифференциальное уравнение (5) относится к типу уравнений Лапласа (см. [8, часть I, гл. 5, § 22.4]) и может быть решено методом определенного интеграла,

$$g_0(z) = \int_K e^{zu} \varphi(u) du, \quad (7)$$

где $\varphi(u) = (h_2(u) - u^2)^{-1} \exp((\mu/\lambda) \int_{u_0}^u [(h_1(v) - v)/(h_2(v) - v^2)] dv)$; причем кривая K в комплексной u -плоскости удовлетворяет условию

$$\int_K \frac{d}{du} e^{zu} (h_2(u) - u^2) \varphi(u) du = 0.$$

Из определения (4) экспоненциальной производящей функции $g_0(z)$ и разложения $e^{zu} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i u^i / i!$ следует представление для вероятностей вырождения

$$q_{i0} = \int_K \frac{u^i}{h_2(u) - u^2} \exp\left(\frac{\mu}{\lambda} \int_{u_0}^u \frac{h_1(v) - v}{h_2(v) - v^2} dv\right) du, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Нахождение кривой K представляет собой сложную задачу, связанную с рассмотрением римановой поверхности, соответствующей функции $\varphi(u)$ [8]. В настоящей работе получены q_{i0} для частных случаев $h_1(s)$, $h_2(s)$.

Заметим, что функция e^z является решением уравнения (5) при любых $h_1(s)$, $h_2(s)$.

5. Интегральное представление для вероятностей вырождения q_{i0} в случае $h_1(s) = p_1^2 s^2 + p_0^1$, $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s + p_0^2$, $m_2 > 0$.

Лемма. Пусть $h_1(s) = p_1^2 s^2 + p_0^1$, $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s + p_0^2$, причем $p_0^1 + p_0^2 > 0$, $m_2 > 0$ и $p_0^2 + p_1^2 > 0$. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} q_{i0} = 0$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s$. Процесс ξ_i может иметь скачки -1 , $+1$. Если рассматривать процесс только в моменты изменения состояния, то получаем «вложенную цепь Маркова» $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$, для которой ($i \neq 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i\} &= \frac{p_0^1 i \mu}{i \mu + i(i-1) \lambda} + \frac{p_1^2 i(i-1) \lambda}{i \mu + i(i-1) \lambda}, \\ \mathbf{P}\{X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i\} &= \frac{p_1^2 i \mu}{i \mu + i(i-1) \lambda} + \frac{p_3^2 i(i-1) \lambda}{i \mu + i(i-1) \lambda}. \end{aligned}$$

Вероятность попадания цепи X_n в поглощающее состояние 0, при начальном состоянии i , совпадает с вероятностью вырождения q_{i0} для процесса ξ_i ; имеем соотношение для вероятностей вырождения:

$$q_{i0} = \frac{p_0^1 \mu + p_1^2(i-1) \lambda}{\mu + (i-1) \lambda} q_{i-1,0} + \frac{p_2^1 \mu + p_3^2(i-1) \lambda}{\mu + (i-1) \lambda} q_{i+1,0}.$$

Получаем линейное однородное разностное уравнение с линейными коэффициентами (см. [9, гл. 7, § 46, п. 5], [10, гл. 2, § 5])

$$(p_3^2 \lambda(i+2) - 2p_2^1 \lambda + p_1^2 \mu) q_{i+2,0} - (\lambda(i+1) - \lambda + \mu) q_{i+1,0} + (p_1^2 \lambda i + p_0^1 \mu) q_{i0} = 0, \\ i \in \mathbb{N}, \text{ при начальном условии } q_{00} = 1.$$

Для решения последнего уравнения в [9] получена оценка

$$|q_{i0}| \leq C_\epsilon \left(\frac{1}{R} - \epsilon \right)^i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

где $\epsilon > 0$, $C_\epsilon > 0$ — некоторая постоянная, $R = \min(|z_1|, |z_2|)$, где z_1 , z_2 — корни уравнения $p_3^2 z^2 - z + p_3^2 = 0$. В условиях леммы $z_1 = 1$, $z_2 = p_3^2 / p_1^2 > 1$ и $R = 1$. Из (8) следует утверждение леммы.

Аналогично, с использованием методов [9], рассматривается случай $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s + p_0^2$. Лемма доказана.

Уравнение (5) для экспоненциальной производящей функции вероятностей вырождения $g_0(z)$ в рассматриваемом случае получает вид

$$\lambda p_3^2 z g_0'''(z) + (-\lambda z + \mu p_2^1) g_0''(z) + (\lambda p_1^2 z - \mu) g_0'(z) + (\lambda p_0^2 z + \mu p_0^1) g_0(z) = 0. \quad (9)$$

При сделанных предположениях имеем

$$h_1(s) - s = p_2^1(s-1)(s-q_1), \quad h_2(s) - s^2 = p_3^2(s-1)(s-q_2)(s-\hat{q}_2). \quad (10)$$

Условия $m_1 > 0$ и $p_0^1 > 0$ равносильны условию $0 < q_1 < 1$. Также нетрудно проверить, что из условий $m_2 > 0$ и $p_0^2 + p_1^2 > 0$ следует $0 < q_2 < 1$ и $-q_2 < \hat{q}_2 \leq 0$ [7].

Теорема 1. Пусть $h_1(s) = p_2^1 s^2 + p_0^1$, $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s + p_0^2$, причем $m_2 > 0$ и $p_0^2 + p_1^2 > 0$. Пусть $q_1 = q_2$. Тогда вероятности вырождения ветвящегося процесса ξ_i равны ($\lambda > 0$, $\mu > 0$): $q_{i0} = q_2^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Находим решение уравнения (9) при условии (6) и $g_0(0) = 1$. Для уравнения (9) точка $z = 0$ является слабо особой точкой (см. [8, гл. 5, § 18.2, § 18.6(a)]). Следуя [8], можно показать, что для линейного дифференциального уравнения третьего порядка (9) не существует трех линейно независимых решений таких, чтобы каждое из них было аналитическим на всей комплексной z -плоскости. Непосредственной подстановкой в уравнение (9) функций $e^{q_2 z^2}$ и e^z убеждаемся, что они являются частными решениями. Следовательно, в силу условия (6), искомое решение $g_0(z)$ имеет вид $g_0(z) = C_1 e^{q_2 z^2} + C_2 e^z$, где C_1, C_2 — некоторые константы. Отсюда получаем $q_{i0} = C_1 q_2^i + C_2$, и $\lim_{i \rightarrow \infty} q_{i0} = C_2$. По лемме $C_2 = 0$. Из условия $g_0(0) = 1$ получаем окончательно $g_0(z) = e^{q_2 z^2}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $h_1(s) = p_2^1 s^2 + p_0^1$, $h_2(s) = p_3^2 s^3 + p_1^2 s + p_0^2$, причем $p_0^1 + p_0^2 > 0$, $m_2 > 0$ и $p_0^2 + p_1^2 > 0$. Положим

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_1(q_2) - q_2}{h_1'(q_2) - 2q_2}, \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_1(\hat{q}_2) - \hat{q}_2}{h_1'(\hat{q}_2) - 2\hat{q}_2}, \quad (11)$$

и пусть $\alpha > 0$. Вероятности вырождения ветвящегося процесса ξ_i равны ($\lambda > 0$, $\mu > 0$)

$$q_{i0} = \frac{1}{A} \int_{\hat{q}_2}^{q_2} \frac{u^i (q_2 - u)^{\alpha-1} (u - \hat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2 (1-u)} du, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

где константа A определяется условием $q_{00} = 1$,

$$A = \int_{\hat{q}_2}^{q_2} \frac{(q_2 - u)^{\alpha-1} (u - \hat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2 (1-u)} du.$$

Доказательство. Найдем решение уравнения (9) при условии (6) и $g_0(0) = 1$. Следуя [8] (часть III, уравнение (5.7)), вычисляем ($\hat{q}_2 < u_0 < q_2$)

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{1}{p_3^2 (u-1)(u-q_2)(u-\hat{q}_2)} \exp \left(\frac{\mu}{\lambda} \int_{u_0}^u \frac{p_2^1 (v-1)(v-q_1)}{p_3^2 (v-1)(v-q_2)(v-\hat{q}_2)} dv \right) \\ &= C_0 \cdot \frac{(q_2 - u)^{\alpha-1} (u - \hat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2 (u-1)}, \quad C_0 = \frac{1}{(q_2 - u_0)^\alpha (u_0 - \hat{q}_2)^\beta}, \end{aligned}$$

где α и β определены формулами (11). Подставляя в (11) выражения (10), получаем

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{p_2^1 (q_2 - q_1)}{p_3^2 (q_2 - \hat{q}_2)}, \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{p_2^1 (q_1 - \hat{q}_2)}{p_3^2 (q_2 - \hat{q}_2)}. \quad (13)$$

Таким образом, $\beta > 0$.

В качестве кривой интегрирования K в формуле (7) можно взять, при условиях $\alpha > 0$, $\beta > 0$, отрезок между корнями $\hat{q}_2$ и q_2 уравнения $h_2(s) - s^2 = 0$ (см. [8, часть I, гл. 5, § 19.2]), последний абзац пункта (Б); получаем частное решение уравнения (9),

$$\int_{\hat{q}_2}^{q_2} e^{zu} \frac{(q_2 - u)^{\alpha-1} (u - \hat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2 (1-u)} du$$

(что проверяется подстановкой последнего выражения в уравнение (9)).

Это частное решение является аналитическим в комплексной z -плоскости (ср. далее вывод следствия). Дифференциальное уравнение третьего порядка (9) не имеет трех линейно независимых аналитических решений; в силу условия (6)

$$g_0(z) = C_1 \int_{\hat{q}_2}^{q_2} e^{zu} \frac{(q_2 - u)^{\alpha-1} (u - \hat{q}_2)^{\beta-1}}{p_3^2(1-u)} du + C_2 e^z,$$

где C_1, C_2 — некоторые константы. Так же, как при доказательстве теоремы 1, показывается, что $C_2 = 0$. Учитывая граничное условие $g_0(0) = 1$, получаем формулу (12). Теорема 2 доказана.

Вычислим значение константы A . После замены переменной $x = (u - \hat{q}_2)/(q_2 - \hat{q}_2)$ получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{(q_2 - \hat{q}_2)^{\alpha+\beta-1}}{p_3^2(1 - \hat{q}_2)} \int_0^1 \frac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}}{1 - xc} dx \\ &= \frac{(q_2 - \hat{q}_2)^{\alpha+\beta-1}}{p_3^2(1 - \hat{q}_2)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} F(1, \beta; \alpha + \beta; c), \end{aligned}$$

где

$$c = \frac{q_2 - \hat{q}_2}{1 - \hat{q}_2} < 1;$$

$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta; \gamma; c)$ — гипергеометрическая функция.

Та же замена переменной для интеграла (12) дает

$$q_{i0} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)F(1, \beta; \alpha + \beta; c)} \int_0^1 \frac{((q_2 - \hat{q}_2)x + \hat{q}_2)^i x^{\beta-1} (1-x)^{\alpha-1}}{1 - cx} dx.$$

Применив к последнему интегралу стандартные методы получения асимптотических формул при $i \rightarrow \infty$ (см., например, [11, теорема 16.1]), получаем

Следствие. При $i \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$q_{i0} \sim C \cdot \frac{q_2^i}{i^\alpha}, \quad C = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{q_2^\alpha}{(q_2 - \hat{q}_2)^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)F(1, \beta; \alpha + \beta; c)}.$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ (тогда, в силу равенств (13), $q_1 = q_2$) $C = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969, 512 с.
2. McQuarrie D. A., Jachimowski C. J., Russel M. E. Kinetic of small system. II. — J. Chem. Phys., 1964, v. 40, № 10, p. 2914–2921.
3. Letessier J., Valent G. The generating function method for quadratic asymptotically symmetric birth and death processes. — SIAM J. Appl. Math., 1984, v. 44, p. 773–783.
4. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
5. Севастьянов Б. А., Калинкин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
6. Калинкин А. В. Вероятность вырождения одного ветвящегося процесса. — Некоторые вопросы математики и механики. Под ред. В. В. Козлова и Б. В. Шабата. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 58–59.
7. Калинкин А. В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 1, с. 192–197.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.
9. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989, 480 с.
10. Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные однородные разностные уравнения. М.: Наука, 1981, 208 с.