Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Коваль, О законе повторного логарифма для операторно-нормированных сумм случайных векторов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 381–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:27:38

11. Руккстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 2. Рига: Зинатне, 1977, 464 с.

Поступила в редакцию
24.IX.1998

© 2001 г.

КОВАЛЬ В. А.*

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-НОРМИРОВАННЫХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Доказывается закон повторного логарифма для сумм случайных векторов в $\mathbf{R}^k$, нормированных линейными операторами общего вида. При этом предполагается, что последовательность случайных векторов удовлетворяет принципу инвариантности Штрассена.

Ключевые слова и фразы: закон повторного логарифма, почти на верное принцип инвариантности, операторно-нормированные суммы случайных векторов.

Пусть $(A_n, n \geq 1)$ — последовательность линейных операторов, действующих из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^l$ ($1 \leq k, l < \infty$); $(X_n, n \geq 1)$ — последовательность случайных векторов в $\mathbf{R}^k$; $\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbf{R}^k$ ($\mathbf{R}^l$). Для оператора B , действующего из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^l$ ($\mathbf{R}^k$), полагаем $\|B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$. Закон повторного логарифма (ЗПЛ) для операторно-нормированных сумм $\|A_n \sum_{i=1}^n X_i\|$ при определенных ограничениях на операторы $(A_n, n \geq 1)$ изучался в работах [1], [2]. В [3] исследовался аналог ограниченного ЗПЛ в случае общих условий на $(A_n, n \geq 1)$. Мы докажем ЗПЛ, ограничившись лишь одним естественным требованием к $(A_n, n \geq 1)$, и при этом будем предполагать, что последовательность $(X_n, n \geq 1)$ удовлетворяет принципу инвариантности Штрассена [4], что позволяет охватить достаточно широкий класс последовательностей $(X_n, n \geq 1)$.

Отметим также, что усиленные законы больших чисел с операторными нормировками исследовались в работах [3], [5], [6].

Теорема. Пусть случайные векторы $(X_n, n \geq 1)$ центрированы, имеют общий ковариационный оператор D ($D \neq 0$) и удовлетворяют следующему условию: существует последовательность независимых центрированных одинаково распределенных гауссовских случайных векторов $(\Gamma_n, n \geq 1)$ в $\mathbf{R}^k$ с ковариационным оператором D таких, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \Gamma_i \right\| = o\left((n \ln \ln n)^{1/2}\right) \quad \text{п.н., } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Если $\|A_n D^{1/2}\| \neq 0$ при всех $n \geq n_0 \geq 1$ ($D^{1/2}$ — квадратный корень из D), то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n \sum_{i=1}^n X_i\|}{\|A_n D^{1/2}\| (2n \ln \ln n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

З а м е ч а н и е 1. Соотношение (1), называемое также «почти на верное принцип инвариантности», впервые было установлено в работе [4] для независимых центрированных одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. Его обобщение на многомерный случай было получено в [7]. Отметим, что, кроме последовательностей независимых центрированных одинаково распределенных случайных векторов $(X_n, n \geq 1)$ с $\mathbf{E}\|X_n\|^2 < \infty$, соотношению (1) удовлетворяют:

* Национальный технический университет Украины, кафедра высшей математики, просп. Победы, 37, 252056 Киев, Украина; e-mail: luyda@net.zt.ua

стационарные эргодические мартингал-разности $(X_n, n \geq 1)$ с конечным вторым моментом, стационарные последовательности с различными условиями перемешивания и функции от них (см. [8]), мартингалы и последовательности независимых центрированных случайных векторов $(X_n, n \geq 1)$ с общим ковариационным оператором при $\mathbf{E}\|X_n\|^{2+\delta} < \infty, n \geq 1$ (см. [9]).

З а м е ч а н и е 2. Если $\|A_n\| \neq 0$ и существует обратный оператор D^{-1} , то $\|A_n D^{1/2}\| \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. 1) Предположим сначала, что для оператора D существует обратный оператор D^{-1} . Положим $a_n = (2n \ln \ln n)^{1/2}, n \geq 3$; $c_n = \|A_n D^{1/2}\| a_n, n \geq 3$; $Y_n = \sum_{i=1}^n \Gamma_i, n \geq 1$. Так как

$$\left| \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n^{-1} \left\| A_n \sum_{i=1}^n X_i \right\| - \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n^{-1} \|A_n Y_n\| \right| \leq \|D^{-1/2}\| \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n X_i - Y_n \right\| = 0 \quad \text{п.н.},$$

то для доказательства теоремы нужно показать, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n^{-1} \|A_n Y_n\| = 1$ п.н. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда D есть тождественный оператор.

Так как в силу [10] $\limsup_{n \rightarrow \infty} [\|A_n Y_n\| / (\|A_n\| a_n)] \leq 1$ п.н., то для доказательства теоремы нужно показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n Y_n\|}{\|A_n\| a_n} \geq 1 \quad \text{п.н.} \quad (2)$$

Докажем (2) сначала в случае, когда $A_n Y_n = \langle T_n, Y_n \rangle$, где $(T_n, n \geq 1)$ — последовательность векторов в $\mathbf{R}^k$ таких, что $\|T_n\| \neq 0, n \geq n_0 \geq 1$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^k$. То есть покажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle T_n, Y_n \rangle}{\|T_n\| a_n} \geq 1 \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

Положим $\xi_n = \langle U_n, Y_n \rangle, n \geq 1$, где $U_n = T_n / \|T_n\|$. $(\xi_n, n \geq 1)$ есть гауссовская последовательность в $\mathbf{R}^1$ с нулевым средним. Заметим, что $\sigma_n^2 = \mathbf{E} \xi_n^2 = n$ и при всех $m < n$

$$r_{m,n} = \frac{\mathbf{E}(\xi_m \xi_n)}{\sigma_m \sigma_n} = \frac{m^{1/2} \langle U_m, U_n \rangle}{n^{1/2}} \leq \left(\frac{m}{n} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Рассмотрим последовательность независимых гауссовских $\mathcal{N}(0,1)$ -распределенных случайных величин $(\gamma_n, n \geq 1)$. Положим $\tilde{\xi}_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i, n \geq 1$. При этом заметим, что $\tilde{\sigma}_n^2 = \mathbf{E} \tilde{\xi}_n^2 = \mathbf{E} \xi_n^2, n \geq 1$, и $\tilde{r}_{m,n} = (\tilde{\sigma}_m \tilde{\sigma}_n)^{-1} \mathbf{E}(\tilde{\xi}_m \tilde{\xi}_n) \geq r_{m,n}$ при всех $m < n$ в силу (4). Поэтому, согласно неравенству Слепяна [11] и ЗПЛ Хартмана-Винтнера,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \xi_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \tilde{\xi}_n = 1 \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, соотношение (3) доказано.

Докажем (2) в общем случае. Найдется последовательность векторов $(e_n, n \geq 1)$ в $\mathbf{R}^1$ с $\|e_n\| = 1$ таких, что $\|A_n^* e_n\| = \|A_n^*\|$ (см., например, [12]), где A_n^* — оператор, сопряженный A_n . Поэтому (п.н.)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n Y_n\|}{\|A_n\| a_n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle e_n, A_n Y_n \rangle|}{\|A_n^*\| a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle A_n^* e_n, Y_n \rangle|}{\|A_n^* e_n\| a_n} \geq 1$$

в силу (3).

Таким образом, если существует обратный оператор D^{-1} , то теорема доказана.

2) Предположим, что оператор D вырожденный. Рассмотрим подпространство $D^{1/2} \mathbf{R}^k$ пространства $\mathbf{R}^k$. На этом подпространстве определен обратный оператор D^{-1} и в силу уже доказанного

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n \sum_{i=1}^n X_i\|}{\|A_n D^{1/2}\| \cdot a_n} = 1 \quad \text{п.н.},$$

где $\|A_n D^{1/2}\|_* = \sup_{x \in D^{1/2} \mathbb{R}^k, x \neq 0} (\|A_n D^{1/2} x\| / \|x\|)$. Нетрудно убедиться, что $\|A_n D^{1/2}\|_* = \|A_n D^{1/2}\|$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору В. В. Булдыгину за внимание к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weiner D. C.* A law of the iterated logarithm for distributions in the generalized domain of attraction of a nondegenerate Gaussian law. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1986, v. 72, № 3, p. 337–357.
2. *Lai T. L.* Some almost sure convergence properties of weighted sums of martingale difference sequences. — *Almost Everywhere Convergence II: Proceedings of the 2nd International Conference*, Evanston, IL, 1989. Boston: Academic Press, 1991, p. 179–190.
3. *Buldygin V., Solntsev S.* Asymptotic behaviour of linearly transformed sums of random variables. Dordrecht: Kluwer, 1997, 516 p.
4. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1964, B. 3, № 3, S. 211–226.
5. *Мельников А. В.* Закон больших чисел для многомерных мартингалов. — *Докл. АН СССР*, 1986, т. 286, № 3, с. 546–550.
6. *Kaufmann H.* On the strong law of large numbers for multivariate martingales. — *Stochastic Process. Appl.*, 1987, v. 26, № 1, p. 73–85.
7. *Philipp W.* Almost sure invariance principles for sums of B -valued random variables. — *Lecture Notes in Math.*, 1979, v. 709, p. 171–193.
8. *Berger E.* An almost sure invariance principle for stationary ergodic sequences of Banach space valued random variables. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1990, v. 84, № 2, p. 161–201.
9. *Morrow G., Philipp W.* An almost sure invariance principle for Hilbert space valued martingales. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, v. 273, № 1, p. 231–251.
10. *Finkelstein H.* The law of the iterated logarithm for empirical distributions. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 2, p. 607–615.
11. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for Gaussian noise. — *Bell Syst. Tech. J.*, 1962, v. 41, p. 463–501.
12. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984, 320 с.

Поступила в редакцию
9.VIII.1999

© 2001 г.

КОНДРАТЕНКО А. Е.*

СВЯЗЬ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ НОРМИРОВАННЫХ СУММ С МОМЕНТАМИ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА

Представлена акад. Ю. В. Прохоровым

В работе получено выражение обычных моментов через моменты Чебышева–Эрмита. Этот результат используется в задаче о скорости сходимости моментов в центральной предельной теореме.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, скорость сходимости, моменты, моменты Чебышева–Эрмита.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: a.cond@mail.ru