Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Кондратенко, Связь скорости сходимости моментов нормированных сумм с моментами Чебышева–Эрмита, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 383–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:18:05

где $\|A_n D^{1/2}\|_* = \sup_{x \in D^{1/2} \mathbb{R}^k, x \neq 0} (\|A_n D^{1/2} x\| / \|x\|)$. Нетрудно убедиться, что $\|A_n D^{1/2}\|_* = \|A_n D^{1/2}\|$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору В. В. Булдыгину за внимание к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weiner D. C.* A law of the iterated logarithm for distributions in the generalized domain of attraction of a nondegenerate Gaussian law. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1986, v. 72, № 3, p. 337–357.
2. *Lai T. L.* Some almost sure convergence properties of weighted sums of martingale difference sequences. — *Almost Everywhere Convergence II: Proceedings of the 2nd International Conference*, Evanston, IL, 1989. Boston: Academic Press, 1991, p. 179–190.
3. *Buldygin V., Solntsev S.* Asymptotic behaviour of linearly transformed sums of random variables. Dordrecht: Kluwer, 1997, 516 p.
4. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1964, B. 3, № 3, S. 211–226.
5. *Мельников А. В.* Закон больших чисел для многомерных мартингалов. — *Докл. АН СССР*, 1986, т. 286, № 3, с. 546–550.
6. *Kaufmann H.* On the strong law of large numbers for multivariate martingales. — *Stochastic Process. Appl.*, 1987, v. 26, № 1, p. 73–85.
7. *Philipp W.* Almost sure invariance principles for sums of B -valued random variables. — *Lecture Notes in Math.*, 1979, v. 709, p. 171–193.
8. *Berger E.* An almost sure invariance principle for stationary ergodic sequences of Banach space valued random variables. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1990, v. 84, № 2, p. 161–201.
9. *Morrow G., Philipp W.* An almost sure invariance principle for Hilbert space valued martingales. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, v. 273, № 1, p. 231–251.
10. *Finkelstein H.* The law of the iterated logarithm for empirical distributions. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 2, p. 607–615.
11. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for Gaussian noise. — *Bell Syst. Tech. J.*, 1962, v. 41, p. 463–501.
12. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984, 320 с.

Поступила в редакцию
9.VIII.1999

© 2001 г.

КОНДРАТЕНКО А. Е.*

СВЯЗЬ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ НОРМИРОВАННЫХ СУММ С МОМЕНТАМИ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА

Представлена акад. Ю. В. Прохоровым

В работе получено выражение обычных моментов через моменты Чебышева–Эрмита. Этот результат используется в задаче о скорости сходимости моментов в центральной предельной теореме.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, скорость сходимости, моменты, моменты Чебышева–Эрмита.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: a.cond@mail.ru

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $EX_1 = 0$ и $DX_1 = 1$. Пусть $F(x)$ — функция распределения X_1 , $f(t)$ — характеристическая функция X_1 , $F_n(x)$ — функция распределения $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. Будем считать, что существуют все моменты $a_k = EX_1^k$, $k = 0, 1, \dots$, которые нам понадобятся.

В работе [1] было предложено для оценки точности аппроксимации в центральной предельной теореме помимо общепринятых характеристик, таких как моменты α_k и семинварианты κ_k , более пристальное внимание уделить применению моментов Чебышева–Эрмита.

Моменты Чебышева–Эрмита определяются следующим образом: $\theta_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) dF(x)$, где многочлены Чебышева–Эрмита $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$.

Хорошо известно (см. [2]), что справедливо равенство

$$H_k(x) = k! \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j x^{k-2j}}{j! (k-2j)! 2^j}.$$

Для упрощения обозначений будем опускать аргумент θ_k в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений. Величина θ_k , $k = 0, 1, \dots$, легко выражается через $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — для этого необходимо в $H_k(x)$ заменить x^j на α_j , $j = 0, 1, \dots, k$. Обозначим это так: $\theta_k = H_k(\widetilde{\alpha}_k)$, где $\widetilde{\alpha}_k$ — набор, состоящий из $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$. (Отметим, что $\alpha_0 = 1$ и при наших предположениях $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$.) Понятно, что θ_k существует тогда и только тогда, когда существует α_k .

Моменты Чебышева–Эрмита связаны с характеристической функцией следующим образом:

$$\theta_k = \frac{1}{i^k} \left(e^{t^2/2} f(t) \right)_{t=0}^{(k)}.$$

Заметим, что все θ_k , $k = 1, 2, \dots$, стандартного нормального закона равны 0, а $\theta_0 = 1$.

Цель данной работы найти выражение обычных моментов через моменты Чебышева–Эрмита. Затем мы получим оценку близости моментов нормированных сумм к соответствующим моментам нормального распределения.

В работе [1] приведена явная формула для нахождения $\theta_k(F_n)$ через $\theta_k(F)$:

$$\theta_k(F_n) = k! \sum_{\substack{j_0+j_3+j_4+\dots+j_k=n \\ 3j_3+4j_4+\dots+kj_k=k}} \frac{n!}{j_0! j_3! j_4! \dots j_k!} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}} \right)^{j_3} \left(\frac{\theta_4}{4! n^2} \right)^{j_4} \dots \left(\frac{\theta_k}{k! n^{k/2}} \right)^{j_k}.$$

Отсюда, например, легко следует, что

$$\begin{aligned} \theta_{10}(F_n) = \frac{10!}{n^4} & \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2!} \frac{\theta_3^2}{(3!)^2} \frac{\theta_4}{4!} + (n-1) \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_7}{7!} + (n-1) \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6}{6!} \right. \\ & \left. + (n-1) \frac{\theta_5^2}{5!} + \frac{\theta_{10}}{10!} \right), \end{aligned}$$

$$\theta_8(F_n) = \frac{8!}{n^3} \left((n-1) \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_5}{5!} + \frac{(n-1)}{2!} \frac{\theta_4^2}{(4!)^2} + \frac{\theta_8}{8!} \right),$$

$$\theta_6(F_n) = \frac{6!}{n^2} \left(\frac{(n-1)}{2!} \frac{\theta_3^2}{(3!)^2} + \frac{\theta_6}{6!} \right),$$

$$\theta_4(F_n) = \frac{\theta_4}{n}.$$

Заметим, что при наших предположениях $\theta_2(F_n) = 0$.

Легко проверить также, что скорость убывания $\theta_k(F_n)$ при росте n возрастает с ростом k , но не монотонно по k , точнее:

$$\theta_{3k}(F_n) = O(n^{-k/2}), \quad \theta_{3k+1}(F_n) = O(n^{-(k+1)/2}), \quad \theta_{3k+2}(F_n) = O(n^{-(k+2)/2}).$$

В работе [1] помимо многочленов Чебышева–Эрмита рассматривались многочлены, получаемые аналогично $H_k(x)$: $\overline{H}_k(x) = e^{-x^2/2} (e^{x^2/2})^{(k)}$.

Теорема 1. Для любого $k, k = 0, 1, \dots$,

$$\overline{H}_k(x) = k! \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{x^{k-2j}}{j! (k-2j)! 2^j}.$$

Таким образом, как отмечалось в [1], многочлены $\overline{H}_k(x)$ можно получить из многочленов Чебышева-Эрмита заменой знаков «-» перед коэффициентами $H_k(x)$ на «+».

Доказательство. Так как

$$(\overline{H}_k(x) e^{x^2/2})' = \overline{H}_{k+1}(x) e^{x^2/2} = \overline{H}'_k(x) e^{x^2/2} + x \overline{H}_k(x) e^{x^2/2},$$

то справедливо равенство $\overline{H}_{k+1}(x) = \overline{H}'_k(x) + x \overline{H}_k(x)$.

Доказательство будем вести по индукции. Ясно, что утверждение теоремы верно при $k = 0$ и $k = 1$. Предположим, что оно справедливо для некоторого $k \in \{2, 3, \dots\}$. Если k — четное, то

$$\begin{aligned} \overline{H}_{k+1}(x) &= k! \sum_{j=0}^{[k/2]-1} \frac{x^{k-2j-1}}{j! (k-2j-1)! 2^j} + k! \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{x^{k-2j+1}}{j! (k-2j)! 2^j} \\ &= k! \left(\sum_{j=1}^{[k/2]} \frac{x^{k-2j+1}}{(j-1)! (k-2j+1)! 2^{j-1}} + \frac{x^{k+1}}{k!} + \sum_{j=1}^{[k/2]} \frac{x^{k-2j+1}}{j! (k-2j)! 2^j} \right) \\ &= k! \left(\frac{x^{k+1}}{k!} + (k+1) \sum_{j=1}^{[(k+1)/2]} \frac{x^{k-2j+1}}{j! (k-2j+1)! 2^j} \right) \\ &= (k+1)! \sum_{j=1}^{[(k+1)/2]} \frac{x^{k+1-2j}}{j! (k+1-2j)! 2^j}. \end{aligned}$$

Случай нечетного k рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Условимся под $\overline{H}_k(\widetilde{\theta}_k)$, $k = 0, 1, \dots$, понимать число, получаемое путем замены x^j в $\overline{H}_k(x)$ на θ_j , $j = 0, 1, \dots, k$.

Теорема 2. Для любого $k, k = 0, 1, \dots$, справедливо равенство $\alpha_k = \overline{H}_k(\widetilde{\theta}_k)$.

Доказательство. При доказательстве будем использовать следующие хорошо известные (см. [1], [4]) факты:

$$H_{2j}(0) = (-1)^j (2j-1)!!, \quad H_{2j-1}(0) = 0, \quad \frac{(2j)!}{j! 2^j} = (2j-1)!!, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а также связь моментов и моментов Чебышева-Эрмита с характеристической функцией.

Ясно, что

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{i^k} \left(f(t) \right)_{t=0}^{(k)} = \frac{1}{i^k} \left(e^{-t^2/2} \cdot e^{t^2/2} f(t) \right)_{t=0}^{(k)} \\ &= \frac{1}{i^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \left(e^{-t^2/2} \right)_{t=0}^{(j)} \left(e^{t^2/2} f(t) \right)_{t=0}^{(k-j)} \\ &= \frac{1}{i^k} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j H_j(0) i^{k-j} \theta_{k-j} = \sum_{j=0}^{[k/2]} C_k^{2j} H_{2j}(0) \theta_{k-2j} i^{-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{k!}{(2j)! (k-2j)!} (-1)^j \frac{(2j)!}{j! 2^j} \theta_{k-2j} (-1)^{-j} = k! \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{\theta_{k-2j}}{j! (k-2j)! 2^j}. \end{aligned}$$

Применение теоремы 1 завершает доказательство.

Отсюда и из выражения для $\theta_k(F_n)$ следует, что моменты $\alpha_k(F_n)$ при нечетных k представимы в виде суммы слагаемых, имеющих различные порядки по n и связанные с нечетными моментами $\theta_j(F_n)$, $j = 3, 5, \dots, k$. Причем при $\alpha_3 \neq 0$ наилучший порядок, а именно $n^{-1/2}$, имеет слагаемое, связанное с $\theta_3(F_n) = \theta_3(F)/\sqrt{n}$ (отметим, что при наших предположениях $\theta_3 = \alpha_3$ и совпадает с асимметрией распределения F). Слагаемые, связанные с моментами более высоких порядков, убывают быстрее, чем $n^{-1/2}$. Таким образом, моменты нечетных порядков стремятся к нулю со скоростью $n^{-1/2}$. Аналогичные рассуждения о четных моментах приводят к выводу, что скорость их сходимости к соответствующим моментам нормального закона есть n^{-1} . Причем этот порядок связан с младшими моментами Чебышева–Эрмита, а именно с третьим и четвертым, совпадающим в нашем случае с эксцессом распределения F . Для $k = 5, 6, \dots$ величины $\alpha_k(F_n)$, разумеется, зависят и от старших моментов, но эта зависимость убывает быстрее n^{-1} . В частности, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \alpha_{10}(F_n) - 945 &= \theta_{10}(F_n) + 45\theta_8(F_n) + 630\theta_6(F_n) + 3150\theta_4(F_n) + 4725\theta_2(F_n) \\ &= \frac{10!}{n^4} \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2!} \frac{\theta_3^2}{(3!)^2} \frac{\theta_4}{4!} + (n-1) \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_7}{7!} \right. \\ &\quad \left. + (n-1) \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6}{6!} + (n-1) \frac{\theta_5^2}{5!} + \frac{\theta_{10}}{10!} \right) \\ &\quad + 45 \frac{8!}{n^3} \left((n-1) \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_5}{5!} + \frac{(n-1)}{2!} \frac{\theta_4^2}{(4!)^2} + \frac{\theta_8}{8!} \right) \\ &\quad + 630 \frac{6!}{n^2} \left(\frac{(n-1)}{2!} \frac{\theta_3^2}{(3!)^2} + \frac{\theta_6}{6!} \right) + 3150 \frac{\theta_4}{n}. \end{aligned}$$

Величина 945 — десятый момент нормального закона. Отметим, что если несколько младших моментов Чебышева–Эрмита равны нулю, что означает совпадение нескольких моментов распределения F с соответствующими моментами нормального закона, то скорость сближения $\alpha_k(F_n)$ с моментами нормального закона будет выше, чем в общем случае.

Результат, полученный в теореме 2, по-видимому, ближе всего к результату Б. фон Бара [3] (см. также [2, с. 228]).

Автор считает приятным долгом выразить искреннюю признательность доктору физико-математических наук В. В. Сенатову за постановку вопроса, ответ на который привел к полученному результату, а также за внимание и поддержку при работе над статьей. Автор благодарен профессору В. М. Круглову за ценное замечание, способствующее сокращению доказательства теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В. В. Применение моментов Чебышева–Эрмита в асимптотических разложениях. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, № 1, с. 190–192.
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
3. Von Bahr B. On the convergence of moments in the central limit theorem. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 3, p. 808–818.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963, 1100 с.

Поступила в редакцию
25.VII.2000