Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Коршунов, Вероятности больших отклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 387–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:06:59

© 2001 г.

КОРШУНОВ Д. А.*

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ МАКСИМУМОВ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СРЕДНИМ И СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ¹⁾

Рассматриваются суммы $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин с отрицательным средним значением. В случае сильно субэкспоненциального распределения слагаемых найдена асимптотика вероятности того, что максимум сумм $\max(S_1, \dots, S_n)$ превзойдет большой уровень x . Полученные утверждения об асимптотике этой вероятности имеют равномерный по всем значениям n характер.

Ключевые слова и фразы: максимумы сумм случайных величин, однородная цепь Маркова, вероятности больших отклонений, субэкспоненциальное распределение, второй хвост распределения.

1. Введение. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с общим распределением F на вещественной прямой $\mathbf{R}$; $F((-\infty, 0]) < 1$. Обозначим $F(x) = F((-\infty, x))$, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Вообще, для любой меры G через $\bar{G}(x) = G([x, \infty))$ обозначаем хвост этой меры. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и

$$M_n = \max \{S_k, 0 \leq k \leq n\}.$$

Предполагаем, что существует $E\xi$, причем $E\xi < 0$; положим $a = |E\xi|$. По усиленному закону больших чисел $S_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$ почти наверное, и, следовательно, семейство распределений максимумов M_n , $n \geq 1$, слабо компактно.

Основной задачей настоящей работы является изучение асимптотического поведения вероятности $P\{M_n \geq x\}$ при $x \rightarrow \infty$ в случае, когда отдельное слагаемое имеет распределение F типа субэкспоненциального; нас интересуют как фиксированные значения временного параметра n , так и случай неограниченно возрастающего n . Точнее, будут получены утверждения об асимптотическом поведении вероятности $P\{M_n \geq x\}$, равномерные по n .

Напомним определения некоторых классов функций и распределений, используемых в дальнейшем изложении.

О п р е д е л е н и е 1. Функция f называется *локально степенной*, если для всякого фиксированного t отношение $f(x+t)/f(x)$ стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$. Говорим, что распределение G локально степенное, если функция $\bar{G}(x)$ локально степенная.

О п р е д е л е н и е 2. Говорят, что распределение G в $\mathbf{R}^+$ с неограниченным носителем принадлежит классу $\mathcal{S}$ (является *субэкспоненциальным* распределением), если хвост свертки $\bar{G} * \bar{G}(x)$ эквивалентен $2\bar{G}(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

В [4] показано, что субэкспоненциальное распределение G обязательно локально степенное. Достаточные условия принадлежности распределения классу $\mathcal{S}$ можно найти, например, в [4], [10]. Класс $\mathcal{S}$ включает в себя, в частности, следующие распределения: (а) распределение Парето с хвостом $\bar{G}(x) = (\kappa/x)^\alpha$, $x \geq \kappa$, где $\kappa > 0$, $\alpha > 0$; (б) логнормальное распределение с плотностью $e^{-(\ln x - \ln \alpha)^2 / 2\sigma^2} / x\sigma\sqrt{2\pi}$, $x > 0$, где $\sigma > 0$, $\alpha > 0$; (в) распределение Вейбулла с хвостом $\bar{G}(x) = e^{-x^\alpha}$, $x \geq 0$, где $\alpha \in (0, 1)$.

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: korshunov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 99-01-01504 и № 99-01-01561) и CRDF Cooperative Grants Program (Award # RM1-226) и INTAS (Project № 93-10820).

Пусть G — произвольное распределение в $\mathbf{R}$ с неограниченным справа носителем и конечным средним значением. Для любого $t > 0$ введем в рассмотрение распределение G_t в $\mathbf{R}^+$ такое, что

$$\overline{G}_t(x) = \min \left(1, \int_x^{x+t} \overline{G}(u) du \right), \quad x > 0 \quad (1)$$

(здесь и всюду в дальнейшем под интегралом в пределах от x_1 до x_2 понимается интеграл по множеству $[x_1, x_2]$). Семейство распределений $\{G_t, t > 0\}$ является стохастически возрастающим семейством.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что субэкспоненциальное распределение G является *сильно субэкспоненциальным* (и писать $G \in \mathcal{S}_*$), если $G_t * G_t(x) / \overline{G}_t(x) \rightarrow 2$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [1, \infty]$.

По определению $\mathcal{S}_* \subseteq \mathcal{S}$. Возможно класс $\mathcal{S}_*$ совпадает с классом субэкспоненциальных распределений с конечным средним значением, однако мы не располагаем доказательством этого факта. Как отмечается в [7], неясно даже влечет ли принадлежность $G \in \mathcal{S}$ субэкспоненциальность распределения G_∞ . Достаточные условия принадлежности распределения классу $\mathcal{S}_*$ приведены в п. 3. Там же проверено, что распределения Парето (при $\alpha > 1$), логнормальное и Вейбулла удовлетворяют этим условиям и, следовательно, являются сильно субэкспоненциальными.

Определим случайную последовательность $X = \{X_n\}$ равенством

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+. \quad (2)$$

Она образует однородную по времени цепь Маркова, являющуюся случайным блужданием с задержкой в нуле. Хорошо известно (см., например, [3, гл. VI, § 9]), что распределение цепи X в момент времени n при нулевом начальном условии $X_0 = 0$ совпадает с распределением M_n , т.е.

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} = \mathbf{P}\{X_n \geq x \mid X_0 = 0\}. \quad (3)$$

Поэтому изучение асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{M_n \geq x\}$ равносильно изучению асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{X_n \geq x \mid X_0 = 0\}$. Отметим, что конечномерные распределения последовательностей $\{M_n\}$ и $\{X_n\}$ не совпадают.

В работе [11] доказано, что если распределение F_∞ на полупрямой $\mathbf{R}^+$ является субэкспоненциальным, то хвост распределения супремума сумм эквивалентен второму хвосту распределения отдельного слагаемого, т.е. при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{n \geq 1} S_n \geq x \right\} \sim \frac{1}{a} \int_x^\infty \overline{F}(u) du. \quad (4)$$

В [8] показано, что субэкспоненциальность распределения F_∞ является необходимым условием для справедливости асимптотики (4).

В [9] рассмотрен случай фиксированного значения n и доказано, что если распределение случайной величины $\xi \mathbf{I}\{\xi \geq 0\}$ субэкспоненциальное, то $\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \sim n \overline{F}(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

В настоящей работе показано, что имеет место следующая

Теорема. Пусть распределение случайной величины $\xi \mathbf{I}\{\xi \geq 0\}$ сильно субэкспоненциальное. Тогда

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} = \frac{1 + \varepsilon_n(x)}{a} \int_x^{x+na} \overline{F}(u) du,$$

где $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $n \geq 1$.

Утверждение теоремы вытекает из лемм 1 и 9, доказанных в пп. 2 и 6 соответственно.

Как нам стало известно, после написания настоящей работы аналогичная эквивалентность установлена другими методами в [5, теорема 6] в случае, когда $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ и функция $\overline{F}(u)$ правильно меняется на бесконечности.

Относительно более ранних результатов следует отметить статьи [2] и [1]. В работе [2] рассмотрен случай, когда функция $\overline{F}(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \in (-\infty, -2)$. Полагая присутствующую в теореме 2 этой

работы функцию $g(t)$ равной $1 + at/\gamma$, а x равным γn , можно вывести оттуда для любого фиксированного $\gamma > 0$ асимптотику

$$\mathbf{P}\{S_k \geq \gamma n \text{ для некоторого } k \leq n\} \sim n\mathbf{P}\{\xi \geq \gamma n\} c_\alpha,$$

где $c_\alpha = \int_0^1 [g(t)]^{-\alpha} dt$. Эта асимптотика совпадает с предлагаемой нами, если положить $x = \gamma n$.

Такая же, как и в [2], форма ответа в случае $\alpha \in (-2, -1)$ приведена в [1].

2. Оценка снизу для вероятностей больших отклонений максимума сумм. В следующей лемме при минимальных ограничениях на распределение F вероятность $\mathbf{P}\{M_n \geq x\}$ оценивается снизу при больших значениях x .

Лемма 1. Пусть распределение F локально степенное. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется x_1 такое, что при $x \geq x_1$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \geq \frac{1 - \varepsilon}{a} \int_x^{x+na} \bar{F}(u) du.$$

Доказательство. Ввиду равенства (3) достаточно доказать соответствующее утверждение для цепи (2) с нулевым начальным состоянием $X_0 = 0$. Как отмечалось выше, семейство максимумов $\{M_n, n \geq 1\}$ ограничено по вероятности. Поэтому семейство $\{X_n, n \geq 1\}$ также ограничено по вероятности, т.е. имеет место сходимость

$$\inf_{n \geq 1} \mathbf{P}\{X_n < x\} \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Рассмотрим событие A_{in} , $i \in [1, n]$, состоящее в том, что $X_{i-1} < x$ и $X_j \geq x$ для любого $j \in [i, n]$. Поскольку события A_{in} , $i \in [1, n]$, не пересекаются, а их объединение равно событию $\{X_n \geq x\}$, то по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{X_n \geq x\} = \mathbf{P}\{A_{1n}\} + \dots + \mathbf{P}\{A_{nn}\}. \quad (6)$$

Пусть $\delta > 0$; положим $b = a + \delta$. Для $v \geq 0$ введем вероятность $p_i(x+v)$ равенством

$$p_i(x+v) = \mathbf{P}\{X_j \geq x \text{ для любого } j \leq i \mid X_0 = x+v\}.$$

Ввиду определения (2) при начальном состоянии $X_0 = x+v$ и любом i справедливо неравенство $X_i \geq x+v+\xi_1+\dots+\xi_i$. Поэтому $p_i(x+v) \geq \mathbf{P}\{v+\xi_1+\dots+\xi_j \geq 0 \text{ для любого } j \leq i\}$. Полагая здесь $v = U + ib$, по усиленному закону больших чисел получаем равномерную по x и i сходимость

$$p_i(x + U + ib) \rightarrow 1 \quad \text{при } U \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Так как совместное наступление событий $\{X_{i-1} < x\}$, $\{X_i \geq x + U + (n-i)b\}$ и $\{X_j \geq x \text{ при } j \in [i+1, n]\}$ влечет событие A_{in} , то справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \geq \int_0^x \mathbf{P}\{X_{i-1} \in dy\} \int_{U+(n-i)b}^\infty \mathbf{P}\{X_i \in x+du \mid X_{i-1} = y\} p_{n-i}(x+u).$$

Поскольку функция $p_i(x+u)$ не убывает по u ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_{in}\} &\geq p_{n-i}(x + U + (n-i)b) \\ &\times \int_0^x \mathbf{P}\{X_{i-1} \in dy\} \mathbf{P}\{X_i \geq x + U + (n-i)b \mid X_{i-1} = y\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что при любом $y \in [0, x)$

$$\mathbf{P}\{X_i \geq x + U + (n-i)b \mid X_{i-1} = y\} \geq \mathbf{P}\{\xi \geq x + U + (n-i)b\},$$

из последнего неравенства получаем

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \geq p_{n-i}(x + U + (n-i)b) \mathbf{P}\{X_{i-1} < x\} \mathbf{P}\{\xi \geq x + U + (n-i)b\}.$$

В силу этой оценки и сходимости (7) найдется достаточно большое U такое, что при всех x , i и n справедливо неравенство $\mathbf{P}\{A_{in}\} \geq (1 - \delta/2) \mathbf{P}\{X_{i-1} < x\} \mathbf{P}\{\xi \geq x + U + (n-i)b\}$. Отсюда ввиду сходимости (5) при достаточно больших x

$$\mathbf{P}\{A_{in}\} \geq (1 - \delta) \bar{F}(x + U + (n-i)b)$$

равномерно по i и n . Используя последнее неравенство, выводим из равенства (6) оценку, верную для достаточно больших x :

$$P\{X_n \geq x\} \geq (1 - \delta) \sum_{i=1}^n \bar{F}(x + U + (n - i)b).$$

Так как функция $\bar{F}(v)$ локально степенная, то равномерно по n

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}(x + U + (n - i)b) \sim \frac{1}{b} \int_x^{x+nb} \bar{F}(v) dv \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Поскольку $b = a + \delta$ и $\delta > 0$ выбрано произвольно, отсюда вытекает утверждение леммы.

3. Условия принадлежности распределения классу $\mathcal{S}_*$. Пусть G — локально степенное распределение в $\mathbf{R}^+$ с конечным средним значением. Для любого $U \in (0, x)$ имеем равенства (распределение G_t определено в (1)):

$$\frac{\overline{G_t * G_t}(x)}{\overline{G_t}(x)} = \int_0^x \frac{\overline{G_t}(x - u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) + 1 \quad (8)$$

$$= \left(\int_0^U + \int_U^x \right) \frac{\overline{G_t}(x - u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) + 1. \quad (9)$$

Так как функция $\overline{G_t}(y)$ локально степенная, то при любом фиксированном U

$$\int_0^U \frac{\overline{G_t}(x - u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) \rightarrow G_t(U)$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \geq 1$. Следовательно, имеет место

Лемма 2. Пусть распределение G — локально степенное. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $G \in \mathcal{S}_*$;
- (ii) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся U и x_0 , $0 \leq U \leq x_0$, такие, что для всех $x \geq x_0$ и $t \geq 1$ выполняется

$$\int_U^x \overline{G_t}(x - u) dG_t(u) \leq \varepsilon \overline{G_t}(x);$$

- (iii) существует функция $U(x) \rightarrow \infty$, $0 \leq U(x) \leq x$, такая, что $\overline{G}(x - U(x)) \sim \overline{G}(x)$ и равномерно по $t \geq 1$

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x - u) dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty;$$

- (iv) для любой функции $U(x) \rightarrow \infty$, $0 \leq U(x) \leq x$, такой, что $\overline{G}(x - U(x)) \sim \overline{G}(x)$, выполняется равномерное по $t \geq 1$ соотношение

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x - u) dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

В следующей лемме формулируется свойство замкнутости класса $\mathcal{S}_*$ относительно отношения слабой эквивалентности хвостов распределений (терминология из [7]).

Лемма 3. Пусть G и H — два локально степенных распределения в $\mathbf{R}^+$. Если $G \in \mathcal{S}_*$ и $c_1 \overline{G}(x) \leq \overline{H}(x) \leq c_2 \overline{G}(x)$ для некоторых c_1 и c_2 , $0 < c_1 < c_2 < \infty$, то $H \in \mathcal{S}_*$.

Доказательство. Так как распределение H локально степенное, а G сильно субэкспоненциальное, по лемме 2 найдется последовательность $U(x) \rightarrow \infty$ такая, что $\overline{G}(x - U(x)) \sim \overline{G}(x)$, $\overline{H}(x - U(x)) \sim \overline{H}(x)$ и

$$\int_{U(x)}^x \overline{G_t}(x - u) dG_t(u) = o(\overline{G_t}(x)) \quad (10)$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \geq 1$. Поскольку $\bar{H}(x) \leq c_2 \bar{G}(x)$, то после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_{U(x)}^x \bar{H}_t(x-u) dH_t(u) &\leq c_2 \int_{U(x)}^x \bar{G}_t(x-u) dH_t(u) \\ &= -c_2 \bar{G}_t(x-u) \bar{H}_t(u) \Big|_{U(x)}^x + c_2 \int_{U(x)}^x \bar{H}_t(u) d_u \bar{G}_t(x-u) \\ &\leq c_2 \bar{G}_t(x-U(x)) \bar{H}_t(U(x)) + c_2^2 \int_{U(x)}^x \bar{G}_t(u) d_u \bar{G}_t(x-u). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (10) и условия $\bar{H}(x) \geq c_1 \bar{G}(x)$ вытекает соотношение

$$\int_{U(x)}^x \bar{H}_t(x-u) dH_t(u) = o(\bar{G}_t(x)) = o(\bar{H}_t(x)),$$

которое в силу леммы 2 завершает доказательство.

Лемма 4. Пусть распределение G с конечным средним значением является субэкспоненциальным и существует $c > 0$ такое, что $\bar{G}(2x) \geq c \bar{G}(x)$ для любого x . Тогда распределение G является сильно субэкспоненциальным.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{G}_t(2x) &= \min \left(1, \int_{2x}^{2x+t} \bar{G}(u) du \right) \\ &= \min \left(1, 2 \int_x^{x+t/2} \bar{G}(2u) du \right) \geq \min \left(1, \int_x^{x+t} \bar{G}(2u) du \right). \end{aligned}$$

Так как $\bar{G}(2u) \geq c \bar{G}(u)$, то отсюда вытекает неравенство

$$\bar{G}_t(2x) \geq \min \left(c, c \int_x^{x+t} \bar{G}(u) du \right) = c \bar{G}_t(x). \quad (11)$$

Кроме того, функция $\bar{G}(y)$ локально степенная. Поэтому для любого фиксированного u равномерно по $t \geq 1$

$$\bar{G}_t(x-u) [\bar{G}_t(x)]^{-1} \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Для хвоста свертки $G_t * G_t$ с помощью интегрирования по частям и с учетом непрерывности распределения G_t в точках $u > 0$ получаем выражения:

$$\begin{aligned} \overline{G_t * G_t}(x) &= - \left(\int_0^{x/2} + \int_{x/2}^\infty \right) \bar{G}_t(x-u) d\bar{G}_t(u) \\ &= \int_0^{x/2} \bar{G}_t(x-u) dG_t(u) + \int_{x/2}^\infty \bar{G}_t(u) d_u \bar{G}_t(x-u) + \left(\bar{G}_t\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 \\ &= 2 \int_0^{x/2} \bar{G}_t(x-u) dG_t(u) + \left(\bar{G}_t\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{x/2} \frac{\bar{G}_t(x-u)}{\bar{G}_t(x)} dG_t(u) = \left(\int_0^U + \int_U^{x/2} \right) \frac{\bar{G}_t(x-u)}{\bar{G}_t(x)} dG_t(u).$$

Ввиду (12) первое слагаемое для любого фиксированного U имеет своим пределом $G_t(U)$. В силу (11) второе слагаемое не превосходит $\bar{G}_\infty(U)/c$ и выбором достаточно большого U может быть сделано сколь угодно малым. Из сказанного вытекает равномерная по $t \geq 1$ сходимость интегралов

$$\int_0^{x/2} \frac{\bar{G}_t(x-u)}{\bar{G}_t(x)} dG_t(u) \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Из (11) вытекает также, что $(\bar{G}_t(x/2))^2 \leq \bar{G}_t(x) \bar{G}_t(x/2)/c = o(\bar{G}_t(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Подставляя два последних соотношения в (13), приходим к требуемой равномерной по $t \geq 1$ асимптотике $\overline{G_t * G_t}(x) \sim 2 \bar{G}_t(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Лемма 5. Пусть распределение G с конечным средним значением является субэкспоненциальным. Пусть существует x_0 такое, что функция $g(x) \equiv -\ln \bar{G}(x)$ вогнута при $x \geq x_0$ и, кроме того,

$$\int_0^x \bar{G}(x-u)\bar{G}(u) du \sim \bar{G}(x) \int_0^\infty \bar{G}(u) du \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Тогда распределение G является сильно субэкспоненциальным.

Доказательство. Обозначим $J_t(x) = \bar{G}_t(x)/\bar{G}(x)$. В частности, если случайная величина ζ имеет распределение G , то $J_\infty(x) = \mathbf{E}\{\zeta | \zeta \geq x\}$ для таких значений x , что $\bar{G}_\infty(x) \leq 1$.

Так как функция $g(x)$ вогнута, разность $g(x+u) - g(x)$ не возрастает по x , и, следовательно, отношение $\bar{G}(x+u)/\bar{G}(x) = e^{-(g(x+u)-g(x))}$ не убывает по x . Поэтому функция

$$J_t(x) = \frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{G}(x)} = \int_0^t \frac{\bar{G}(x+u)}{\bar{G}(x)} du$$

также не убывает по x . Отсюда, поскольку $\bar{G}_t(x) = J_t(x)\bar{G}(x)$, значение второго интеграла в (9) допускает оценку

$$\begin{aligned} \int_U^x \frac{J_t(x-u)}{J_t(x)} \frac{\bar{G}(x-u)}{\bar{G}(x)} dG_t(u) &\leq \int_U^x \frac{\bar{G}(x-u)}{\bar{G}(x)} dG_t(u) \\ &= \int_U^x \frac{\bar{G}(x-u)}{\bar{G}(x)} (\bar{G}(u) - \bar{G}(u+t)) du \leq \int_U^x \frac{\bar{G}(x-u)\bar{G}(u)}{\bar{G}(x)} du \end{aligned}$$

и ввиду условия (14) может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого U . Отсюда по лемме 2 вытекает сильная субэкспоненциальность распределения G .

Распределение Парето с параметром $\alpha > 1$, равно как и любое распределение с правильно меняющимся на бесконечности хвостом и с конечным средним значением, удовлетворяет условиям леммы 4 и, следовательно, является сильно субэкспоненциальным.

Распределение Вейбулла $\bar{G}(x) = e^{-x^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяет условиям леммы 5. Действительно, функция $g(x) = x^\alpha$ вогнута при $\alpha \in (0, 1)$, и осталось проверить выполнение условия (14). Функция $(x-u)^\alpha + u^\alpha$ достигает своего минимума по $u \in [U, x-U]$ на концах этого отрезка, следовательно,

$$\int_U^{x-U} \bar{G}(x-u)\bar{G}(u) du = \int_U^{x-U} e^{-((x-u)^\alpha + u^\alpha)} du \leq x e^{-((x-U)^\alpha + U^\alpha)} = o(e^{-x^\alpha}),$$

например, при $U = U(x) = \ln^{2/\alpha} x$. Кроме того, при таком выборе $U(x)$

$$\left(\int_0^U + \int_{x-U}^x \right) \bar{G}(x-u)\bar{G}(u) du \sim \bar{G}(x) \int_0^\infty \bar{G}(u) du.$$

Из последних двух соотношений вытекает (14).

Примерно так же проверяется, что и логнормальное распределение удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно, является сильно субэкспоненциальным.

4. Некоторые свойства свертки сильно субэкспоненциального распределения. Пусть G — сильно субэкспоненциальное распределение в $\mathbf{R}^+$. Настоящий пункт содержит аналоги стандартных свойств субэкспоненциальных распределений для распределений класса $\mathcal{S}_*$.

Лемма 6. Для любого натурального k асимптотика хвоста k -й свертки распределения G_t имеет вид $\bar{G}_t^{k*}(x) \sim k\bar{G}_t(x)$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \geq 1$.

Доказательство следует по индукции из равенства для хвоста свертки $G_t^{(k+1)*}$

$$\bar{G}_t^{(k+1)*}(x) = \left(\int_0^U + \int_U^x \right) \bar{G}_t^{k*}(x-u) dG_t(u) + \bar{G}_t(x) \quad (15)$$

и из леммы 2.

Докажем следующую оценку для хвоста k -й свертки меры G_t .

Лемма 7. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что при любых $x \geq 0$, $t \geq 1$ и $k = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$\overline{G_t^{k*}}(x) \leq c \overline{G_t}(x)(1 + \varepsilon)^k.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду сильной субэкспоненциальности распределения G из (8) вытекает существование числа $x_0 = x_0(\varepsilon)$ такого, что при любых $x \geq x_0$ и $t \geq 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) \leq 1 + \varepsilon. \quad (16)$$

Обозначим $A_k \equiv \sup_{x \geq 0, t \geq 1} [\overline{G_t^{k*}}(x)/\overline{G_t}(x)]$. Оценим сверху A_{k+1} через A_k . В силу (15)

$$A_{k+1} \leq \sup_{x \geq 0, t \geq 1} \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) + 1. \quad (17)$$

По определению A_k имеем неравенство

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) = \int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x-u)} \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) \leq A_k \int_0^x \frac{\overline{G_t}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u).$$

Ввиду (16) имеем отсюда верную при $x \geq x_0$ оценку

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) \leq A_k(1 + \varepsilon).$$

Кроме того, при $x < x_0$ и $t \geq 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) \leq \frac{1}{\overline{G_t}(x_0)} \leq \frac{1}{\min(1, \overline{G}(x_0 + 1))} \equiv c_1(x_0) < \infty.$$

Из двух последних оценок следует, что для любых $x \geq 0$ и $t \geq 1$

$$\int_0^x \frac{\overline{G_t^{k*}}(x-u)}{\overline{G_t}(x)} dG_t(u) \leq A_k(1 + \varepsilon) + c_1.$$

Подставляя эту оценку в (17), получаем $A_{k+1} \leq A_k(1 + \varepsilon) + c_1 + 1$. Отсюда вытекает неравенство $A_{k+1} \leq (c_1 + 1)(k + 1)(1 + \varepsilon)^k$, которое эквивалентно оценке леммы.

5. Оценка сверху для хвоста распределения первой до момента времени n неотрицательной суммы. Пусть $\eta = \min\{k \geq 1: S_k \geq 0\}$ — номер первой неотрицательной лестничной высоты (считаем $\min \emptyset = \infty$), $\eta^{[n]} = \min\{k \in [1, n]: S_k \geq 0\}$ — номер первой до момента времени n неотрицательной лестничной высоты и $\chi^{[n]} = S_{\eta^{[n]}}$ — первая до момента времени n неотрицательная сумма.

Поскольку $E\xi < 0$, то η , $\eta^{[n]}$ и $\chi^{[n]}$ — несобственные случайные величины; положим $p = P\{\eta < \infty\}$, $p^{[n]} = P\{\eta^{[n]} < \infty\}$. При любом n справедливы неравенства

$$0 < P\{\xi \geq 0\} \leq p^{[n]} \leq p < 1. \quad (18)$$

Кроме того,

$$p^{[n]} \uparrow p \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Справедлива следующая оценка сверху для вероятности события $\{\chi^{[n]} \geq x\}$ при больших значениях n и x .

Лемма 8. Пусть распределение F локально степенное. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа n_1 и x_1 такие, что при $n \geq n_1$ и $x \geq x_1$ справедливо неравенство

$$P\{\chi^{[n]} \geq x\} \leq (1 + \varepsilon) \frac{1-p}{a} \int_x^{x+na} \overline{F}(u) du.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geq x\} = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{S_i < 0 \text{ при всех } i \leq j-1, S_j \geq x\}. \quad (20)$$

Положим $\psi_j(B) = \mathbf{P}\{S_i < 0 \text{ при всех } i \leq j, S_j \in B\}$, $B \subseteq (-\infty, 0)$. По формуле полной вероятности справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{S_i < 0 \text{ при всех } i \leq j-1, S_j \geq x\} = \int_x^\infty F(dy) \psi_{j-1}([x-y, 0)).$$

Подставляя это равенство в (20), получаем

$$\mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geq x\} = \int_x^\infty F(dy) \sum_{j=1}^n \psi_{j-1}([x-y, 0)). \quad (21)$$

Оценим сумму в последнем представлении. Для любого $N < n$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_{j-1}([x-y, 0)) &\leq N + \sum_{j=N+1}^n \mathbf{P}\{S_1 < 0, \dots, S_N < 0, S_j \geq x-y\} \\ &= N + \mathbf{P}\{S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} \sum_{j=N+1}^n \mathbf{P}\{S_j \geq x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\{S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} \rightarrow 1-p \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (22)$$

то для любого $\delta > 0$ найдется N такое, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_{j-1}([x-y, 0)) &\leq N + (1-p+\delta) \sum_{j=N+1}^n \mathbf{P}\{S_j \geq x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} \\ &\leq N + (1-p+\delta) \sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_j \geq x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\}. \end{aligned}$$

Асимптотика функции восстановления не зависит от значений первых N слагаемых. Поэтому для любого фиксированного N в силу теоремы восстановления для любого $\delta > 0$ найдется t такое, что при $y-x \geq t$

$$\sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_{j-1} \geq x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} \leq (1+\delta) \frac{y-x}{a}.$$

Кроме того, при $y \in [x, x+t)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_{j-1} \geq x-y \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} \\ \leq \sum_{j=N+1}^\infty \mathbf{P}\{S_{j-1} \geq -t \mid S_1 < 0, \dots, S_N < 0\} = \tilde{c} = \tilde{c}(-t) < \infty. \end{aligned}$$

Из двух последних оценок вытекает неравенство, верное при любом $y \geq x$ ($\tilde{c} = N + \tilde{c}$):

$$\sum_{j=1}^n \psi_{j-1}([x-y, 0)) \leq (1-p+\delta)(1+\delta) \frac{y-x}{a} + \tilde{c}. \quad (23)$$

При любом $y \geq x$ имеем также следующие неравенство и асимптотику

$$\sum_{j=1}^n \psi_{j-1}([x-y, 0)) \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_j < 0\} \sim n(1-p)$$

при $n \rightarrow \infty$ ввиду (22). Следовательно, при достаточно больших n

$$\sum_{j=1}^n \psi_{j-1}([x-y, 0)) \leq n(1-p+\delta). \quad (24)$$

Обозначим $g(x, y) \equiv (1-p+\delta) \min((1+\delta)(y-x)/a, n)$. Подставляя оценки (23) и (24) в (21), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi^{[n]} \geq x\} &\leq \widehat{c} \int_x^\infty F(dy) + \int_x^\infty F(dy) g(x, y) = \widehat{c} \bar{F}(x) - \bar{F}(y) g(x, y) \Big|_x^\infty \\ &+ \int_x^\infty \bar{F}(y) dy g(x, y) = \widehat{c} \bar{F}(x) + (1-p+\delta) \frac{1+\delta}{a} \int_x^{x+na/(1+\delta)} \bar{F}(y) dy. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку функция $\bar{F}(x)$ локально степенная, то $\bar{F}(x) = o(\int_x^{x+na/(1+\epsilon)} \bar{F}(y) dy)$ при $n, x \rightarrow \infty$. Поэтому из (25) вытекает утверждение леммы.

6. Оценка сверху для вероятностей больших уклонений максимума сумм. Определим собственную случайную величину $\tilde{\chi}^{[n]}$ с распределением

$$\mathbf{P}\{\tilde{\chi}^{[n]} \in B\} = \mathbf{P}\{\chi^{[n]} \in B\} (p^{[n]})^{-1}, \quad B \subseteq [0, \infty).$$

Пусть $\epsilon > 0$; положим $b = (1+\epsilon)(1-p)/pa$. В силу леммы 8 и сходимости (19) существуют n_0 и x_0 такие, что для любых $n \geq n_0$ и $x \geq x_0$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\chi}^{[n]} \geq x\} \leq b \int_x^{x+na} \bar{F}(u) du. \quad (26)$$

Определим вероятностную меру G на полупрямой $\mathbf{R}^+$, положив

$$\bar{G}(x) = \min(1, b\bar{F}(x)) \quad \text{при } x \geq x_0 + 1, \quad \bar{G}(x_0 + 1) = 1. \quad (27)$$

Тогда в силу (26) при $n \geq n_0$ и $x \geq x_0$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\chi}^{[n]} \geq x\} \leq \bar{G}_{na}(x). \quad (28)$$

Пусть $\tilde{\chi}_1^{[n]}, \tilde{\chi}_2^{[n]}, \dots$ — суть независимые копии случайной величины $\tilde{\chi}^{[n]}$. Одна из сумм S_i , $1 \leq i \leq n$, превосходит уровень x лишь тогда, когда одна из лестничных высот превзошла этот уровень. Вероятность того, что i -я лестничная высота существует, причем до момента времени n , не превосходит $(p^{[n]})^i$. Обозначим через $\hat{p}_i^{[n]}$ условную вероятность того, что i -я лестничная высота окажется последней при условии, что она существует до момента времени n . Для любого фиксированного i имеем монотонную сходимость

$$\hat{p}_i^{[n]} \downarrow 1-p \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

По формуле полной вероятности для любых x и n имеем неравенство:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq n} S_i \geq x\right\} \leq \sum_{i=1}^n (p^{[n]})^i \hat{p}_i^{[n]} \mathbf{P}\{\tilde{\chi}_1^{[n]} + \dots + \tilde{\chi}_i^{[n]} \geq x\}.$$

Пусть $N < n$. Разбивая последнюю сумму на две и используя (18) и неравенства $\hat{p}_i^{[n]} \leq \hat{p}_{i+1}^{[n]}$ и (28), получаем оценку

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq \hat{p}_N^{[n]} \sum_{i=1}^N p^i \bar{G}_{na}^{i*}(x) + \sum_{i=N+1}^\infty p^i \bar{G}_{na}^{i*}(x), \quad (30)$$

верную для локально степенного распределения F .

Далее считаем, что случайная величина ξ имеет сильно субэкспоненциальное распределение. Соответственно, в силу определения (27) и леммы 3 распределение G также сильно субэкспоненциальное. Имеет место

Лемма 9. Пусть $F \in \mathcal{S}_+$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует x_1 такое, что при всех $n \geq 1$ и $x \geq x_1$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq \frac{1+\epsilon}{a} \int_x^{x+na} \bar{F}(u) du.$$

Доказательство. Поскольку временной параметр n принимает лишь счетное число значений и функция $\bar{F}(u)$ локально степенная, то достаточно проверить следующие два соотношения: при любом фиксированном n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq x\}}{\bar{F}(x)} = \frac{n}{a}, \quad \limsup_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq x\}}{\int_x^{x+na} \bar{F}(u) du} \leq \frac{1}{a}. \quad (31)$$

Так как распределение F субэкспоненциальное, то равенство (3) позволяет проверить первое соотношение в (31) по индукции. Действительно, при $n = 1$ имеем $X_1 = \xi_1^+$ и $\mathbf{P}\{X_1 \geq x\} = \bar{F}(x)$ при $x > 0$. Поскольку $\mathbf{P}\{X_{n+1} \geq x\} = \mathbf{P}\{X_n + \xi_{n+1} \geq x\}$ при $x > 0$, индукционный переход следует из стандартных свойств субэкспоненциальных распределений (см., например, доказательство теоремы 1 в [4] и предложения 1 в [6]).

Перейдем к проверке второго соотношения в (31), исходя из оценки (30). Распределение G сильно субэкспоненциальное, поэтому по лемме 7 для любого $\delta > 0$ существует c_1 такое, что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{G_{na}(x)} \sum_{i=N+1}^{\infty} p^i \overline{G_{na}^{i*}}(x) \leq \frac{c_1 [p(1+\delta)]^{N+1}}{1 - p(1+\delta)}$$

равномерно по $n \geq 1$. Подставляя это неравенство в (30), а также используя (29) и лемму 6, получаем

$$\limsup_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq x\}}{G_{na}(x)} \leq (1-p) \sum_{i=1}^N p^i i + \frac{c_1 [p(1+\delta)]^{N+1}}{1 - p(1+\delta)}.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора δ и N вытекает неравенство

$$\limsup_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq x\}}{G_{na}(x)} \leq \frac{p}{1-p},$$

следствием которого в силу определения G является соотношение

$$\limsup_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{M_n \geq x\}}{\int_x^{x+na} \bar{F}(u) du} \leq \frac{1+\varepsilon}{a}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то справедливо второе соотношение в (31). Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годованчук В. В. Вероятности больших отклонений для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, в. 3, с. 624–630.
2. Пинелус И. Ф. Одна задача о больших отклонениях в пространстве траекторий. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 1, с. 73–87.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
4. Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.
5. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно меняющимися хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
6. Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N. Subexponentiality and infinite divisibility. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 49, S. 335–347.
7. Klüppelberg C. Subexponential distributions and integrated tails. — J. Appl. Probab., 1988, v. 25, № 1, p. 132–141.

8. Korshunov D. A. On distribution tail of the maximum of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 72, № 1, p. 97–103.
9. Sgibnev M. S. On the distribution of the maxima of partial sums. — Statist. Probab. Lett., 1996, v. 28, № 3, p. 235–238.
10. Teugels J. L. The class of subexponential distributions. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 6, p. 1000–1011.
11. Veraverbeke N. Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1977, v. 5, № 1, p. 27–37.

Поступила в редакцию
19.X.1998

© 2001 г.

СУ Ч.*, ХУ Т.*, ЛЯН Х.**

О ЛОГАРИФИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ ДЛЯ СТРОГО СТАЦИОНАРНЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНО АССОЦИИРОВАННЫХ СЕРИЙ¹⁾

Доказан логарифмический закон для строго стационарных и отрицательно ассоциированных серий случайных величин, аналогичный логарифмическому закону для независимых одинаково распределенных случайных величин. Использована формула Парсеваля из теории преобразований Фурье для оценки близости между отрицательно ассоциированными и независимыми случайными величинами. Подчеркивается польза применения использованных методов для доказательства предельных теорем для отрицательно ассоциированных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: отрицательно ассоциированная последовательность, серия; логарифмический закон, формула Парсеваля, преобразование Фурье.

0. Введение. Семейство случайных величин $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ называется *отрицательно ассоциированным* (NA), если для любых двух непересекающихся непустых подмножеств A и B множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется неравенство

$$\text{cov} \left(f_1(X_i, i \in A), f_2(X_j, j \in B) \right) \leq 0,$$

где f_1 и f_2 — покоординатно возрастающие функции такие, что ковариация существует.

Бесконечное множество случайных величин называется отрицательно ассоциированным, если любое конечное его подмножество обладает этим свойством. Свойство множества быть отрицательно ассоциированным также называют *отрицательной ассоциированностью*. Это определение было введено Аламом и Саксеном [1], а затем детально изучалось Йо-Девом и Прошаном [3]. Понятие NA привлекает все большее

Su Chun, Hu Taizhong, Liang Hanying. On the logarithm law for strictly stationary and negatively associated arrays.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

* Department of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China; e-mail: suchun@ustc.edu.cn, thu@ustc.edu.cn

** Department of Applied Mathematics Tongji University, Shanghai 200092, China.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке NSF (гранты 19671078 и 19701030), the Doctoral Program Foundation of Institute of High Education и Chinese Academy of Sciences.