Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ч. Су, Т. Ху, Х. Лян, О логарифмическом законе для строго стационарных отрицательно ассоциированных серий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 397–407

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:36:04

8. Korshunov D. A. On distribution tail of the maximum of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 72, № 1, p. 97–103.
9. Sgibnev M. S. On the distribution of the maxima of partial sums. — Statist. Probab. Lett., 1996, v. 28, № 3, p. 235–238.
10. Teugels J. L. The class of subexponential distributions. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 6, p. 1000–1011.
11. Veraverbeke N. Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk. — Stochastic Process. Appl., 1977, v. 5, № 1, p. 27–37.

Поступила в редакцию
19.X.1998

© 2001 г.

СУ Ч.*, ХУ Т.*, ЛЯН Х.**

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ ДЛЯ СТРОГО СТАЦИОНАРНЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНО АССОЦИИРОВАННЫХ СЕРИЙ¹⁾

Доказан логарифмический закон для строго стационарных и отрицательно ассоциированных серий случайных величин, аналогичный логарифмическому закону для независимых одинаково распределенных случайных величин. Использована формула Парсеваля из теории преобразований Фурье для оценки близости между отрицательно ассоциированными и независимыми случайными величинами. Подчеркивается польза применения использованных методов для доказательства предельных теорем для отрицательно ассоциированных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: отрицательно ассоциированная последовательность, серия; логарифмический закон, формула Парсеваля, преобразование Фурье.

0. Введение. Семейство случайных величин $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ называется *отрицательно ассоциированным* (NA), если для любых двух непересекающихся непустых подмножеств A и B множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется неравенство

$$\text{cov} \left(f_1(X_i, i \in A), f_2(X_j, j \in B) \right) \leq 0,$$

где f_1 и f_2 — покоординатно возрастающие функции такие, что ковариация существует.

Бесконечное множество случайных величин называется отрицательно ассоциированным, если любое конечное его подмножество обладает этим свойством. Свойство множества быть отрицательно ассоциированным также называют *отрицательной ассоциированностью*. Это определение было введено Аламом и Саксеном [1], а затем детально изучалось Йо-Девом и Прошаном [3]. Понятие NA привлекает все большее

Su Chun, Hu Taizhong, Liang Hanying. On the logarithm law for strictly stationary and negatively associated arrays.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

* Department of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China; e-mail: suchun@ustc.edu.cn, thu@ustc.edu.cn

** Department of Applied Mathematics Tongji University, Shanghai 200092, China.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке NSF (гранты 19671078 и 19701030), the Doctoral Program Foundation of Institute of High Education и Chinese Academy of Sciences.

внимание благодаря его широкой применимости в многомерном статистическом анализе и теории надежности. Был установлен ряд предельных закономерностей для последовательностей случайных величин, обладающих свойством НА. Эти свойства аналогичны свойствам, которыми обладают последовательности независимых случайных величин. Например, Ньюмен [6], а также Су и Чи [12] доказали центральную предельную теорему, Матула [5] доказал теорему о трех рядах, Шао [11] и Су с соавторами [13] доказали неравенства для моментов и слабый принцип инвариантности. Некоторые из этих результатов были перенесены на последовательности серий случайных величин, обладающие свойством НА.

Ли с соавторами [4] отметили, что закон повторного логарифма может не выполняться для последовательностей серий независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин. Ху и Вебер [2], а также Ки [9] изучали логарифмический закон для последовательностей серий независимых в каждой серии случайных величин. Более точно, пусть $\{X_{nk}, k = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность серий независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин. В [2] доказано, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n X_{nk}|}{\sqrt{2n \log n}} = 1 \quad \text{п.в.}, \quad (0.1)$$

если $\mathbf{E}X_{11} = 0$, $\mathbf{E}X_{11}^2 = 1$ и $\mathbf{E}X_{11}^4 < \infty$. Позже Ки [9] доказал, что (0.1) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}X_{11} = 0, \quad \mathbf{E}X_{11}^2 = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E} \left[X_{11}^4 \left(\log |X_{11}| \right)^{-2} \right] < \infty. \quad (0.2)$$

Здесь и далее $\log x$ обозначает $\ln(\max(x, e))$ для всех $x > 0$.

Цель настоящей статьи — доказать логарифмический закон для строго стационарных последовательностей случайных величин, обладающих свойством НА, при условиях, аналогичных условиям (0.2).

1. Проблема и модель. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — строго стационарная последовательность случайных величин, обладающая свойством НА. Пусть $\{X_{nk}: k = 1, \dots, n; n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность серий случайных величин со свойством НА, для которой выполняется условие

$$(X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}) \stackrel{d}{=} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad n \in \mathbf{N},$$

где $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство распределений. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$. Формулировка основного результата статьи включает следующие три предположения:

1°. $\mathbf{E}[\xi_0^4 (\log^2 |\xi_0|)^{-1}] < \infty$ и $\mathbf{E}\xi_0 = 0$;

2°. $\beta(n)$ убывает и $\beta(n) = O(n^{-\theta})$ для некоторого $\theta > 5$, где $\beta(n) = -\mathbf{E}(\xi_0 \xi_n) = -\mathbf{E}(\xi_j \xi_{j+n})$, $\forall j \in \mathbf{N}$;

3°. $\sigma^2 \triangleq \mathbf{E}\xi_0^2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n) > 0$.

На протяжении всей статьи, ради простоты, c ($c < \infty$) будет обозначать положительную постоянную, которая может принимать разные значения и зависеть от индексов в зависимости от рассматриваемой ситуации.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_0, \xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ и $\{X_{nk}, k = 1, \dots, n; n \in \mathbf{N}\}$ — случайные величины, упомянутые выше. Тогда

(i) если выполнены условия 1° и 3°, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} \leq 1 \quad \text{п.в.}; \quad (1.1)$$

(ii) если выполнены условия 1°–3°, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} = 1 \quad \text{п.в.} \quad (1.2)$$

Более того, если выполнено условие 2°, то условия 1° и 3° необходимы для выполнения (1.2).

З а м е ч а н и е 1. Предположение 2° является традиционным в такого рода задачах. Например, Пан [7] использует условие $\beta(n) = O(e^{-\lambda n})$ для доказательства оценки Берри-Эссеена.

З а м е ч а н и е 2. Пример строго стационарной последовательности, обладающей свойством NA, приведен в [13].

Доказательство необходимости условий тривиально. Так как последовательность серий независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин обладает свойствами строгой стационарности и NA, то из результатов [4] и [10] следует, что предположения 1° и 3° необходимы для (1.2), если выполнено условие 2°. Доказательства (1.1) и (1.2) приведены в пп. 4 и 5 соответственно после того, как в пп. 2 и 3 будут доказаны некоторые леммы и другие вспомогательные результаты.

2. Некоторые леммы. Сначала мы напомним некоторые леммы технического характера, которые будут использоваться в следующих пунктах.

Лемма 1 (см. [13]). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность случайных величин со свойством NA такая, что $\mathbf{E}X_k = 0$ и $\mathbf{E}|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \dots, n$, для некоторого $p \geq 2$. Пусть $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Тогда существует постоянная c_p , зависящая только от p , такая, что

$$\mathbf{E} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \right)^p \leq c_p \left(n \sup_{1 \leq i \leq n} \mathbf{E}|X_i|^p + \left(n \sup_{1 \leq j \leq n} \mathbf{E}X_j^2 \right)^{p/2} \right).$$

Лемма 2 (см. [11]). Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ обладают свойством NA и имеют нулевые средние значения и конечные вторые моменты. Положим $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ и $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2$. Тогда для всех $x > 0$, $a > 0$ и $0 < \beta < 1$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x \right\} \leq 2\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > a \right\} + \frac{2}{1-\beta} \exp \left\{ -\frac{x^2 \beta}{2(ax + B_n)} \left(1 + \frac{2}{3} \ln \left(1 + \frac{ax}{B_n} \right) \right) \right\}.$$

Лемма 3 (см. [6]). Предположим, что $X_1, X_2, \dots, X_n$ являются отрицательно ассоциированными случайными величинами. Если $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ — их совместная характеристическая функция и $\varphi_j(t_j)$ — характеристические функции отдельных случайных величин, то

$$\left| \varphi(t_1, \dots, t_n) - \prod_{j=1}^n \varphi_j(t_j) \right| \leq -2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} |t_j t_k| \operatorname{cov}(X_j, X_k).$$

Лемма 4 (см. [14]). Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\{h_n, n \in \mathbf{N}\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \infty$. Обозначим $C^\alpha(\mathbf{R})$ множество функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\alpha \triangleq \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in \mathbf{R}, x \neq y \right\} < \infty.$$

Тогда для любого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ найдется последовательность $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$ такая, что

(a) $\{f_n'', n \in \mathbf{N}\} \subset C^\alpha(\mathbf{R})$ и $\|f_n''\|_\alpha \leq K h_n^{-2-\alpha}$, где K — постоянная, не зависящая от n ;

(b) $0 \leq f_n(x) \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$;

(c) $f_n = 0$ при $x \leq (1 - 2\varepsilon) h_n$ и $f_n = 1$ при $x \geq (1 - \varepsilon) h_n$.

Лемма 5 (см. [10]). Пусть $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин таких, что $\mathbf{E}X_{nk} = 0$ и $\sigma_{nk}^2 = \mathbf{E}X_{nk}^2 < \infty$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$, $\sigma_n^2 = n^{-1} \sum_{k=1}^n \sigma_{nk}^2$ и $F_{nk}(x) = \mathbf{P}\{X_{nk} \leq x\}$, $F_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F_{nk}(x)$. Предположим, что

$$1) \quad 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 < \infty;$$

- 2) $\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{nk}^2 = O(n(\log n)^{-3/2});$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x < -\varepsilon \sqrt{n/\log n}} x^2 dF_n(x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0;$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|X_{nk}|^{2+d} < \infty$ для некоторого $d > 0$.

Тогда для любых $c > 0$ и $\delta > 0$ и всех достаточно больших n

$$\mathbf{P} \left\{ S_n > c \sqrt{\sigma_n^2 n \log n} \right\} \geq n^{-\delta - c^2/2}.$$

3. Предварительные результаты. 1. Пусть $\{\xi_0, \xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ — строго стационарная последовательность случайных величин, обладающая свойством NA и удовлетворяющая условиям 1° и 3° из п. 1. Положим

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.1)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &\triangleq \mathbf{E}\eta_n^2 = \mathbf{E}\xi_0^2 + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mathbf{E}(\xi_j \xi_l) = \mathbf{E}\xi_0^2 - \frac{2}{n} \sum_{l=2}^n \sum_{j=1}^{l-1} \beta(l-j) \\ &= \mathbf{E}\xi_0^2 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n (n-k) \beta(k) \geq \mathbf{E}\xi_0^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \beta(k). \end{aligned} \quad (3.2)$$

(Следует отметить, что σ_n^2 в (3.2) отличается от величины, обозначенной той же самой буквой в лемме 5.) Так как $(2/n) \sum_{k=1}^n (n-k) \beta(k) \leq 2(n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} (n+1-k) \beta(k)$, то мы имеем

$$0 < \sigma^2 \leq \sigma_n^2 \downarrow \sigma^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Более того, по лемме 1 выполняются соотношения

$$\gamma_n \triangleq \mathbf{E}|\eta_n|^3 = n^{-3/2} \mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right|^3 \leq cn^{-3/2} \left[n \mathbf{E}|\xi_0|^3 + (n \mathbf{E}\xi_0^2)^{3/2} \right] \leq c. \quad (3.4)$$

На основании сказанного выше мы приходим к следующему результату.

Лемма 6. *Предположим, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ случайные величины $Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nn}$ независимы и их распределения совпадают с распределением случайной величины η_n . Положим $T_n = \sum_{k=1}^n Z_{nk}$. Тогда для любых $c > 0$ и $\delta > 0$*

$$\mathbf{P} \left\{ T_n \geq c \sqrt{\sigma_n^2 n \log n} \right\} \geq n^{-\delta - c^2/2} \quad (3.5)$$

для всех достаточно больших n .

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием леммы 5, если заметить, что условия 1)–4) выполняются в силу (3.3) и (3.4) в случае независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. Пусть $\{\xi_0, \xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин, обладающая свойством NA (необязательно строго стационарная) и удовлетворяющая условию 1°. Пусть $\{m_n, n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условию $m_n = O(n^{1-\delta})$ для некоторого $0 < \delta < 1$. Положим $\tau^2 = \mathbf{E}\xi_0^2$ и $S_{m_n} = \sum_{k=1}^{m_n} \xi_k$.

Лемма 7. *Если выполнены перечисленные выше условия, то для любого $0 < \eta < \frac{1}{4}$ мы имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ |S_{m_n}| > \eta \sqrt{n \log n} \right\} < \infty. \quad (3.6)$$

Доказательство. Применяя лемму 2 с $x = \eta\sqrt{n \log n}$, $a = \eta^2 \sqrt{n/\log n}$ и $\beta = 1 - \eta$, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ |S_{m_n}| > \eta\sqrt{n \log n} \right\} &\leq 2m_n \mathbf{P} \left\{ |\xi_0| > \eta^2 \sqrt{\frac{n}{\log n}} \right\} \\ &+ \frac{2}{\eta} \exp \left\{ -\frac{\eta^2(1-\eta)n \log n}{2(\eta^3 n + \tau^2 m_n)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как $0 < \eta < \frac{1}{4}$ и $m_n/n \leq cn^{-\delta} \rightarrow 0$, то отсюда следует, что $\alpha \triangleq (1-\eta)/(3\eta) > 1$ и $2(\eta^3 n + \tau^2 m_n) < 3\eta^3 n$ для всех достаточно больших n . Таким образом,

$$\exp \left\{ -\frac{\eta^2(1-\eta)n \log n}{2(\eta^3 n + \tau^2 m_n)} \right\} < n^{-\alpha}. \quad (3.8)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} m_n \mathbf{P} \left\{ |\xi_0| > \eta^2 \sqrt{\frac{n}{\log n}} \right\} &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\delta} \mathbf{P} \left\{ \xi_0^2 \log |\xi_0| > \frac{1}{3} \eta^4 n \right\} \\ &\leq c \mathbf{E} |\xi_0^2 \log |\xi_0||^{2-\delta} \leq c \mathbf{E} |\xi_0|^{4-\delta} < \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ясно, что (3.6) следует из (3.7)–(3.9) и предположения 1°.

3. Пусть $\{\xi_0, \xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ — строго стационарная последовательность случайных величин со свойством НА. Предположим, что она удовлетворяет условиям 1°–3°. Обозначим $[x]$ целую часть числа x , и пусть $\{d_n, n \in \mathbf{N}\}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условию $d_n = [n^{1-\delta}]$ для некоторого $0 < \delta < 1$ такого, что $\rho = (\theta - 2)(1 - \delta) > 3$, где θ — число, о котором говорится в условии 2°. Для любого $n \in \mathbf{N}$ положим

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 = 0; \quad a_1 = n, \quad b_1 = a_1 + d_n; \dots; \\ a_{j+1} &= b_j + n, \quad b_{j+1} = a_{j+1} + d_n, \quad j \in \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\eta_{nj} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=b_{j-1}+1}^{a_j} \xi_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=b_{j-1}+1}^{b_{j-1}+n} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

$$\Delta_n = - \sum_{1 \leq l < j \leq n} \mathbf{E}(\eta_{nl} \eta_{nj}). \quad (3.12)$$

Тогда для каждого n случайные величины $\eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{nn}$ обладают свойством НА и одинаково распределены.

Лемма 8. При условиях, сформулированных выше,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n \Delta_n} < \infty. \quad (3.13)$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta_n &= - \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{E} \left[\eta_{nl} \left(\sum_{j=l+1}^n \eta_{nj} \right) \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n k \beta(d_n + k) + n \sum_{k \geq n+2d_n} \beta(k) \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n k \beta(d_n + k) + n \sum_{k=n}^{\infty} \beta(k) \leq \sum_{k=1}^{d_n} k \beta(d_n) + \sum_{k=d_n+1}^n k \beta(k) + n \sum_{k=n}^{\infty} \beta(k) \\ &\leq c \left(d_n^{-\theta} \sum_{k=1}^{d_n} k + \sum_{k=d_n}^n k^{1-\theta} + n \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\theta} \right) \leq c d_n^{2-\theta} \leq c n^{(2-\theta)(1-\delta)} = c n^{-\rho}. \end{aligned}$$

Это влечет (3.13), так как $\rho > 3$.

4. Доказательство первой части теоремы 1. На протяжении этого пункта мы считаем, что выполнены предположения 1° и 3°. Приступим к доказательству соотношения (1.1) из теоремы 1. Чтобы доказать (1.1), достаточно показать, что для любого фиксированного $0 < \varepsilon < \frac{1}{30} \wedge (4\sqrt{2}\sigma)^{-1}$ выполняется неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} \leq 1 + 15\varepsilon, \quad (4.1)$$

где $a \wedge b$ обозначает $\min(a, b)$. Чтобы доказать (4.1), в силу леммы Бореля–Кантелли достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ |S_n| > (1 + 15\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n \log n} \right\} < \infty. \quad (4.2)$$

Из (3.2) и (3.3) вытекает существование $m \in \mathbf{N}$ такого, что

$$\sigma^2 \leq \sigma_m^2 = \frac{1}{m} \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^m \xi_k \right)^2 < \sigma^2 (1 + \varepsilon). \quad (4.3)$$

Положим $k_n = m[n/m]$ и $m_n = n - k_n$. Выполняются соотношения $0 \leq m_n < m = o(n^{1-\delta})$ для любого $0 < \delta < 1$. В соответствии с леммой 7, в которой следует положить $\eta = \sqrt{2}\sigma\varepsilon < \frac{1}{4}$, для того чтобы доказать (4.2), достаточно показать, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ |S_{k_n}| > (1 + 14\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n \log n} \right\} < \infty. \quad (4.4)$$

Положим

$$\lambda_n = \frac{\varepsilon\sigma}{m} \sqrt{\frac{n}{\log n}} \quad \text{и} \quad \rho_n = \varepsilon \sqrt{2\sigma^2 n \log n} \quad \text{для } n \geq m, \quad (4.5)$$

а затем определим следующие величины:

$$\begin{aligned} X_{nk}^{(1)} &= ((-\lambda_n) \vee X_{nk}) \wedge \lambda_n, \\ X_{nk}^{(2)} &= (X_{nk} - \lambda_n) I_{(\lambda_n < X_{nk} \leq \rho_n)}, \\ X_{nk}^{(3)} &= (X_{nk} + \lambda_n) I_{(-\lambda_n > X_{nk} \geq -\rho_n)}, \\ X_{nk}^{(4)} &= (X_{nk} + \lambda_n) I_{(X_{nk} < -\rho_n)} + (X_{nk} - \lambda_n) I_{(X_{nk} > \rho_n)} \end{aligned}$$

для $k = 1, 2, \dots, k_n$ и

$$S_{k_n}^{(j)} = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где $a \vee b$ обозначает $\max(a, b)$. Таким образом, мы имеем

$$S_{k_n} = \sum_{j=1}^4 S_{k_n}^{(j)}. \quad (4.6)$$

Во-первых,

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ S_{k_n}^{(4)} \neq 0 \right\} &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k=1}^{k_n} (|X_{nk}| > \rho_n) \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P} \left\{ |\xi_0| > \rho_n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P} \left\{ \xi_0^2 > 2\varepsilon^2 \sigma^2 n \log n \right\} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P} \left\{ \xi_0^2 > cn \log n \right\} < \infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Последнее неравенство вытекает из хорошо известного факта, согласно которому условие $\mathbf{E}\{\xi_0^4 / \log^2 |\xi_0|\} < \infty$ влечет $\sum_{n=m}^{\infty} n \mathbf{P}\{\xi_0^2 > cn \log n\} < \infty$.

Во-вторых, из определения величины $X_{nk}^{(2)}$ следует, что $S_{k_n}^{(2)} > 0$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{S_{k_n}^{(2)} > 3\varepsilon\sqrt{2\sigma^2 n \log n}\right\} &= \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}^{(2)} > 3\rho_n\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\text{найдутся по крайней мере три } k \text{ такие, что } X_{nk}^{(2)} \neq 0\} \\ &\leq \sum_{1 \leq i < j < k \leq k_n} \mathbf{P}\{X_{ni} > \lambda_n, X_{nj} > \lambda_n, X_{nk} > \lambda_n\} \\ &\leq k_n^3 \left(\mathbf{P}\{\xi_0 > \lambda_n\}\right)^3 \quad (\text{по свойству NA}) \\ &\leq n^3 \left(\mathbf{P}\left\{\xi_0 > \frac{\varepsilon\sigma}{m} \sqrt{\frac{n}{\log n}}\right\}\right)^3 \leq cn^3 \left(\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)^{-3} \mathbf{E}|\xi_0|^3\right)^3 = cn^{-3/2} \log^{9/2} n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P}\left\{S_{k_n}^{(2)} > 3\varepsilon\sqrt{2\sigma^2 n \log n}\right\} < \infty. \quad (4.8)$$

Аналогично мы получим

$$S_{k_n}^{(3)} \leq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P}\left\{S_{k_n}^{(3)} < -3\varepsilon\sqrt{2\sigma^2 n \log n}\right\} < \infty. \quad (4.9)$$

В-третьих, в силу предположения 1° мы получим

$$\left|\mathbf{E}S_{k_n}^{(1)}\right| \leq k_n \left|\mathbf{E}X_{n1}^{(1)}\right| \leq n \left\{\lambda_n \mathbf{P}\{|\xi_0| > \lambda_n\} + \mathbf{E}\left[|\xi_0| I_{(|\xi_0| > \lambda_n)}\right]\right\} = o(\sqrt{n \log n}). \quad (4.10)$$

Следовательно, утверждение (4.4) будет выполняться, если мы покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\left|S_{k_n}^{(1)} - \mathbf{E}S_{k_n}^{(1)}\right| > (1+7\varepsilon)\sqrt{2\sigma^2 n \log n}\right\} < \infty. \quad (4.11)$$

Докажем (4.11). Ради простоты положим $l_n = [n/m]$. Тогда $k_n = ml_n$. Определим случайные величины $Y_{nk} = X_{nk}^{(1)} - \mathbf{E}X_{nk}^{(1)}$,

$$Z_{nj} = \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} Y_{nk}, \quad j = 1, \dots, l_n,$$

$$T_n = \sum_{j=1}^{l_n} Z_{nj} = \sum_{k=1}^{k_n} Y_{nk} = S_{k_n}^{(1)} - \mathbf{E}S_{k_n}^{(1)}.$$

Очевидно, что случайные величины $\{Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nl_n}\}$ обладают свойством NA, для каждого n одинаково распределены и при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m} \mathbf{E}Z_{n1}^2 \rightarrow \sigma_m^2, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{l_n} \mathbf{E}Z_{nj}^2 = \frac{l_n}{n} \mathbf{E}Z_{n1}^2 = \frac{k_n}{n} \left(\frac{1}{m} \mathbf{E}Z_{n1}^2\right) \rightarrow \sigma_m^2,$$

что вместе с (4.3) влечет

$$\sum_{j=1}^{l_n} \mathbf{E}Z_{nj}^2 = l_n \mathbf{E}Z_{n1}^2 < n\sigma^2(1+2\varepsilon) \quad (4.12)$$

для всех достаточно больших n . Легко видеть, что из определения случайных величин следует $|Z_{nj}| \leq m(\max_{(j-1)m < k \leq jm} |Y_{nk}|) \leq 2m\lambda_n = 2\varepsilon\sigma\sqrt{n/\log n}$, $j = 1, \dots, l_n$. Следовательно, применяя лемму 2 с $x = (1+7\varepsilon)\sqrt{2\sigma^2 n \log n}$, $a = 2\varepsilon\sigma\sqrt{n/\log n}$ и

$\beta = 1 - \varepsilon$, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| S_{k_n}^{(1)} - \mathbf{E} S_{k_n}^{(1)} \right| > (1 + 7\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n \log n} \right\} &= \mathbf{P} \left\{ |T_n| > (1 + 7\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n \log n} \right\} \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ - \frac{(1 - \varepsilon)(1 + 7\varepsilon)^2 \sigma^2 n \log n}{(1 + 7\varepsilon)(2\sigma^2 n \log n)^{1/2} (2m\lambda_n) + l_n \mathbf{E} Z_{n1}^2} \right\} \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ - \frac{(1 - \varepsilon)(1 + 7\varepsilon)^2 \log n}{4(1 + 7\varepsilon)\varepsilon + 1 + 2\varepsilon} \right\} \leq \frac{2}{\varepsilon} n^{-(1-\varepsilon)(1+7\varepsilon)^2} \leq \frac{2}{\varepsilon} n^{-(1+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

что влечет (4.11).

Тем самым, мы завершили доказательство первой части теоремы 1.

5. Доказательство второй части теоремы 1. Теперь мы докажем (1.2) при условиях $1^\circ - 3^\circ$. В силу (1.1) нам нужно доказать только то, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} \geq 1 \quad \text{п.в.}, \quad (5.1)$$

что справедливо, если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} \geq 1 - 5\varepsilon \quad \text{п.в.} \quad (5.2)$$

для любого фиксированного $0 < \varepsilon < \frac{1}{30} \wedge (4\sqrt{2}\sigma)^{-1}$. Таким образом, в силу обобщенной леммы Бореля–Кантелли (см. [8]) достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ S_n > (1 - 5\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n \log n} \right\} = \infty. \quad (5.3)$$

Следующие шесть шагов составляют доказательство (5.3).

Шаг 1. Предполагая выполненным условие 2° , для $\theta > 5$ выберем $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\rho = (\theta - 2)(1 - \delta) > 3. \quad (5.4)$$

Положим

$$d_n = [n^{1-\delta}] \quad \text{и} \quad \tau_n = n^2 + (n - 1)d_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (5.5)$$

и затем определим множество

$$\begin{aligned} J_n &= \{k \in \mathbf{N}: b_{j-1} < k \leq a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{k \in \mathbf{N}: b_j < k \leq b_j + n, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $a_j = a_j(n)$ и $b_j = b_j(n)$ определены в (3.10). Кроме того, для каждого натурального числа l , $\tau_n \leq l < \tau_{n+1}$, мы определим

$$\begin{aligned} L &= \{1, 2, \dots, l\} - J_n, \\ S_l^{(1)} &= \sum_{k \in J_n} X_{lk} \quad \text{и} \quad S_l^{(2)} = \sum_{k \in L} X_{lk}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Пусть $\#(A)$ обозначает мощность множества A . Тогда $\#(J_n) = n^2$, $n \in \mathbf{N}$, и

$$m_l \stackrel{\Delta}{=} \#(L) < \tau_{n+1} - n^2 = (n + 1)^2 - n^2 + n d_{n+1} \leq 2n^{2-\delta} = O(l^{1-\delta/2}). \quad (5.8)$$

Так как $S_l^{(2)}$ является суммой $m_l = O(l^{1-\delta/2})$ одинаково распределенных случайных величин, обладающих свойством NA, то из леммы 7 с $\eta = \sqrt{2}\sigma\varepsilon < \frac{1}{4}$ следует, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ |S_l^{(2)}| > \varepsilon \sqrt{2\sigma^2 l \log l} \right\} < \infty.$$

Заметим, что $S_l = S_l^{(1)} + S_l^{(2)}$ в силу (5.7). Чтобы доказать (5.3), достаточно показать, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ S_l^{(1)} > (1 - 4\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 l \log l} \right\} = \infty. \quad (5.9)$$

Шаг 2. Пусть τ_n — величина, определенная в (5.5). Мы имеем $1 < \tau_n/n^2 \leq l/n^2 < \tau_{n+1}/n^2 \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\max_{\tau_n \leq l < \tau_{n+1}} l \log l < (1 + \eta)^2 n^2 \log n^2$ для любого $\eta > 0$, когда n велико. Выберем η настолько малым, чтобы $(1 + \eta)(1 - 4\varepsilon) < 1 - 3\varepsilon$. Таким образом, чтобы доказать (5.9), достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tau_n \leq l < \tau_{n+1}} \mathbf{P} \left\{ S_l^{(1)} > (1 - 3\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n^2 \log n^2} \right\} = \infty. \quad (5.10)$$

Шаг 3. Положим

$$Y_{n,j+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=b_j+1}^{b_{j+1}+n} X_{\tau_n, k}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.11)$$

Для каждого l , $\tau_n \leq l < \tau_{n+1}$, мы имеем

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_{lk}, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=b_1+1}^{b_1+n} X_{lk}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=b_{n-1}+1}^{b_{n-1}+n} X_{lk} \right) \\ \stackrel{d}{=} (Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nn}) \stackrel{d}{=} (\eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{nn}), \quad (5.12)$$

где $\eta_{n1}, \dots, \eta_{nn}$ определены в (3.11). Полагая $V_n = \sum_{j=1}^n Y_{nj}$, мы получим $S_l^{(1)} \stackrel{d}{=} \sqrt{n} V_n$, $\tau_n \leq l < \tau_{n+1}$. Заметим, что $\tau_{n+1} - \tau_n = O(n)$ в силу (5.5). Чтобы доказать (5.10), достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P} \left\{ V_n > (1 - 3\varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 n \log n^2} \right\} = \infty. \quad (5.13)$$

Так как $0 < \sigma^2 \leq \sigma_n^2$ для всех $n \geq 1$, то достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P} \left\{ V_n > (1 - 2\varepsilon) \sqrt{4\sigma_n^2 n \log n} \right\} = \infty. \quad (5.14)$$

Шаг 4. Для каждого n случайные величины $Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nn}$ независимы, одинаково распределены и $Z_{n1} \stackrel{d}{=} Y_{n1} \stackrel{d}{=} \eta_{n1}$. Положим $T_n = \sum_{j=1}^n Z_{nj}$. Применяя лемму 6 с $c = 2(1 - \varepsilon)$ и $\delta = \varepsilon/2$ в (3.5), мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P} \left\{ T_n > (1 - \varepsilon) \sqrt{4\sigma_n^2 n \log n} \right\} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2(1-\varepsilon)^2-\varepsilon/2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1-\varepsilon)} = \infty. \quad (5.15)$$

Шаг 5. Обозначим $h_n = \sqrt{4\sigma_n^2 \log n}$. Из (3.2) и предположения 2° следует, что h_n не убывает и $0 < h_n/\sqrt{\log n} \rightarrow 2\sigma$ при $n \rightarrow \infty$. На основании леммы 4 с $\alpha = 1$ мы выберем последовательность $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ функций на $\mathbf{R}$ со свойствами (а), (б) и (с). Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ V_n > (1 - 2\varepsilon) \sqrt{4\sigma_n^2 n \log n} \right\} \geq \mathbf{E} f_n \left(\frac{V_n}{\sqrt{n}} \right) \\ \geq \mathbf{E} f_n \left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \right) - \left| \mathbf{E} f_n \left(\frac{V_n}{\sqrt{n}} \right) - \mathbf{E} f_n \left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \right) \right| \\ \geq \mathbf{P} \left\{ T_n > (1 - \varepsilon) \sqrt{4\sigma_n^2 n \log n} \right\} - I(n),$$

где

$$I(n) = \left| \mathbf{E} f_n \left(\frac{V_n}{\sqrt{n}} \right) - \mathbf{E} f_n \left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \right) \right|. \quad (5.16)$$

Таким образом, утверждение (5.14) будет следовать из (5.15), если мы покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n I(n) < \infty. \quad (5.17)$$

Шаг 6. Обозначим $F_n(x)$ и $G_n(x)$ ($p_n(t)$ и $q_n(t)$) функции распределения (характеристические функции) случайных величин $V_n/\sqrt{n}$ и $T_n/\sqrt{n}$ соответственно. Тогда

$$I(n) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) d(F_n(x) - G_n(x)) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x) (F_n(x) - G_n(x)) dx \right|. \quad (5.18)$$

Так как $f'_n(x) = f''_n(x) = 0$ на $(-\infty, (1-2\varepsilon)h_n) \cup [(1-\varepsilon)h_n, \infty)$ и $\|f''_n\|_1 \leq ch_n^{-3}$, то по лемме 4 (а) мы имеем

$$|f''_n(x)| = |f''_n(x) - f''_n((1-2\varepsilon)h_n)| \leq ch_n^{-3} |x - (1-2\varepsilon)h_n|$$

на $((1-2\varepsilon)h_n, (1-\varepsilon)h_n)$. Ясно, что $f'_n \in L_2(\mathbf{R})$, где $L_2(\mathbf{R})$ — множество квадратично интегрируемых функций, определенных на $\mathbf{R}$. Если положить

$$\psi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'_n(x) dx = -\frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f''_n(x) dx,$$

то

$$|\psi_n(t)| = \frac{1}{|t|} \int_{(1-2\varepsilon)h_n}^{(1-\varepsilon)h_n} |f''_n(x)| dx \leq \frac{c}{|t|} h_n^{-3} \int_0^{h_n\varepsilon} x dx = \frac{c}{h_n|t|}. \quad (5.19)$$

Следовательно, $\psi_n \in L_2(\mathbf{R})$.

На основании свойств случайных величин, обладающих свойством NA, мы заключаем, что

$$\mathbf{E} \left(\frac{V_n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{n} \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^n \eta_{nj} \right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \eta_{nj}^2 = \mathbf{E} \eta_{n1}^2 = \frac{1}{n} \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^2 \leq \mathbf{E} \xi_0^2,$$

$$\mathbf{E} \left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \mathbf{E} \eta_{n1}^2 \leq \mathbf{E} \xi_0^2$$

и для $x > 1$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - G_n(x)| &\leq \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{T_n}{\sqrt{n}} \right| \geq x \right\} + \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{V_n}{\sqrt{n}} \right| \geq x \right\} \\ &\leq \frac{1}{x^2} \left[\mathbf{E} \left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \right)^2 + \mathbf{E} \left(\frac{V_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] \leq \frac{c}{x^2}, \end{aligned}$$

что влечет принадлежность функций $B_n(x) \triangleq F_n(x) - G_n(x)$ и $\varphi_n(t) \triangleq -(it)^{-1}(p_n(t) - q_n(t))$ множеству $L_2(\mathbf{R})$. Применяя формулу Парсеваля (см. [8]) к (5.18) и принимая во внимание (5.19), мы получим

$$I(n) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (p_n(t) - q_n(t)) \frac{\bar{\psi}_n(t)}{t} dt \right| \leq \frac{c}{h_n} \int_{-\infty}^{\infty} |p_n(t) - q_n(t)| \frac{1}{t^2} dt. \quad (5.20)$$

Так как

$$p_n(t) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \eta_{nj} \right\} \right], \quad q_n(t) = \prod_{j=1}^n \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \frac{it\eta_{nj}}{\sqrt{n}} \right\} \right]$$

и

$$|p_n(t) - q_n(t)| \leq 2, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (5.21)$$

мы заключаем, в силу леммы 3 и (3.12), что

$$|p_n(t) - q_n(t)| \leq \frac{2t^2}{n} \Delta_n, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (5.22)$$

Следовательно, $I(n) = 0$, когда $\Delta_n = 0$. Если $\Delta_n > 0$, то, полагая $\alpha_n = (n/\Delta_n)^{1/2}$, мы получим

$$\begin{aligned} nI(n) &\leq \frac{cn}{h_n} \left[\int_{|t| \leq \alpha_n} |p_n(t) - q_n(t)| \frac{1}{t^2} dt + \int_{|t| > \alpha_n} \frac{2}{t^2} dt \right] \\ &\leq \frac{c}{h_n} \left[\Delta_n \alpha_n + \frac{n}{\alpha_n} \right] = ch_n^{-1} (n\Delta_n)^{1/2} \end{aligned}$$

в силу (5.20)–(5.22). Следовательно, отсюда и из леммы 8 вытекает (5.17).

Доказательство теоремы 1 завершено.

З а м е ч а н и е 3. Условие $\theta > 5$ в предположении 2° может быть ослаблено до условия $\theta \geq 5$ ценой удлинения доказательства. Укажем основной шаг доказательства. Воспользовавшись тем же самым приемом урезания, что и в п. 4 (см. абзац между (4.5) и (4.6)), мы можем доказать, что лемма 7 справедлива при замене $m_n = O(n^{1-\delta})$ на $m_n = O(n/\log n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alam K., Sazena K. M. L. Positive dependence in multivariate distributions. — Comm. Statist. Theory Methods, 1981, v. A10, p. 1183–1196.
2. Hu T. C., Weber N. C. On the rate of convergence in the strong law of large numbers for arrays. — Bull. Austral. Math. Soc., 1992, v. 45, № 3, p. 479–482.
3. Joag-Dev K., Proschan F. Negative association of random variables, with applications. — Ann. Statist., 1983, v. 11, p. 286–295.
4. Li D. L., Rao B., Tomkins J. A strong law for B -valued arrays. — Proc. Amer. Math. Soc., 1995, v. 123, № 10, p. 3205–3212.
5. Matula P. A note on almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. — Statist. Probab. Lett., 1992, v. 15, p. 209–213.
6. Newman C. M. Asymptotic independence, limit theorem for positively and negatively dependent random variables. — Inequalities in Statistics and Probability. Ed. by Y. L. Tong. Hayward: IMS, 1984, p. 127–140. (IMS Lecture Notes Monograph Ser., v. 5.)
7. Pan J. M. On the convergence rate in the central limit theorem for negatively associated sequences. — Chinese J. Appl. Probab. Statist., 1997, v. 13, p. 183–192.
8. Пемпов Б. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
9. Qi Y. C. On the strong convergence of arrays. — Bull. Austral. Math. Soc., 1994, v. 50, № 2, p. 219–223.
10. Qi Y. C. On the one-sided logarithmic law for arrays. — Systems Sci. Math. Sci., 1999, v. 12, p. 123–132.
11. Shao Q. M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables. — J. Theoret. Probab., 2000, v. 13, № 2, p. 343–356.
12. Su C., Chi X. Some results on CLT for nonstationary NA sequences. — Acta Math. Appl. Sinica, 1998, v. 21, p. 10–21 (in Chinese).
13. Su C., Zhao L. C., Wang Y. B. Moment inequalities and weak convergence for negatively associated sequences. — Sci. China Ser. A, 1997, v. 40, p. 172–182.
14. Wittmann R. A general law of iterated logarithm. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, B. 68, S. 521–543.

Поступила в редакцию
28.XII.1998