Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Рецензия на книгу: Le Gall J. “Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 408–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 10:43:47

© 2001 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Le Gall J.-F. **Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations.** Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1999, ix+163 p.

Теория ветвящихся процессов, возникшая во второй половине XIX века в результате попыток объяснить причины вырождения знаменитых фамилий в Англии, получившая достойное математическое обрамление в работах А. Н. Колмогорова, Н. А. Дмитриева, А. М. Яглома, Б. А. Севастьянова, Р. Беллмана и Т. Харриса в начале 50-х годов XX столетия, пережившая бум в 60–70-е годы и, казалось, истощившая запас принципиально новых идей и задач к концу 80-х, обрела в настоящее время второе дыхание.

Имеется несколько причин такого возрождения. Принципиальным моментом является переход к рассмотрению ветвящихся процессов с частицами, перемещающимися в пространстве. Конечно, модели ветвящихся процессов в пространстве рассматривались и ранее. Достаточно вспомнить, например, работы Б. А. Севастьянова в этой области. Однако существенным является тот факт, что современная теория трактует эволюцию ветвящегося процесса как случайный (как правило, марковский) процесс преобразования мер (считающих, если это обычный ветвящийся процесс, и локально конечных в случае суперпроцессов), заданных на некотором банаховом пространстве. Именно такая трактовка ветвящихся процессов привела не только к новым задачам в их теории, но и к выявлению существенно новых связей между ветвящимися процессами, броуновским движением и нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

В той или иной мере эти вопросы нашли отражение в книгах [1]–[3]. Следует однако признать, что упомянутые монографии, доставившие немало приятных минут специалистам, не являются легким чтением (если это вообще можно сказать о математических работах такого уровня) и вряд ли могут служить «отправной точкой» для тех, кто только приступает к изучению этой захватывающей области теории вероятностей. Однако теперь для первоначального знакомства с предметом заинтересованный читатель может воспользоваться прекрасным курсом лекций, который написал известный французский ученый Франсуа ле Галль (François Le Gall).

Наверное, будет уместно напомнить читателю определение суперпроцесса, или, в других терминах, мерозначного ветвящегося процесса, а также определение броуновской змеи.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и марковский процесс ξ_s , $s \geq 0$, на этом пространстве со значениями в банаховом пространстве E . Пусть, далее, Π_x — закон распределения ξ при условии, что $\xi_0 = x$, $\mathcal{B}_{b+}$ — множество всех ограниченных неотрицательных измеримых функций на E , а $\mathcal{M}_f(E)$ — пространство всех конечных мер на E , оснащенное топологией слабой сходимости.

Пусть функция $g \in \mathcal{B}_{b+}$, а функция ψ имеет вид

$$\psi(u) = \alpha u + \beta u^2 + \int \pi(dr)(e^{-ru} - 1 + ru),$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, а π — σ -конечная мера на $(0, \infty)$ такая, что $\int \pi(dr)(r \wedge r^2) < \infty$. Обозначим через $u_+(x)$ единственное неотрицательное решение интегрального

уравнения

$$u_t(x) + \Pi_x \left(\int_0^t ds \psi(u_{t-s}(\xi_s)) \right) = \Pi_x(g(\xi_t)).$$

Оказывается, что для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_f(E)$ и любого $t > 0$ существует единственная вероятностная мера $Q_t(\mu, dv)$ на $\mathcal{M}_f(E)$ такая, что для любой функции $g \in \mathcal{B}_{b+}$

$$\int Q_t(\mu, dv) \exp \left\{ - \int g dv \right\} = \exp \left\{ - \int u_t d\mu \right\}. \quad (1)$$

При этом

$$Q_t(\mu, \cdot) * Q_t(\mu', \cdot) = Q_t(\mu + \mu', \cdot).$$

Марковский процесс Z в $\mathcal{M}_f(E)$, соответствующий переходным ядрам $Q_t(\mu, dv)$, называется (ξ, ψ) -суперпроцессом.

Отметим, что свойство (1) является аналогом следующего основного свойства обычных ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона: распределение числа частиц в момент t в популяции, состоявшей в нулевой момент времени из $n + m$ частиц, является сверткой распределений числа частиц в момент t в двух популяциях, состоявших в нулевой момент времени из m и n частиц соответственно. Это и не удивительно: в действительности суперпроцессы могут быть получены при помощи предельного перехода соответствующим образом эволюционирующих ветвящихся процессов в банаховом пространстве E (при правильно подобранной шкале сжатия пространства и времени).

Если процесс ξ является броуновским движением в $\mathbf{R}^d$, а $\psi(u) = \beta u^2$, то процесс Z_t называется суперброуновским движением. В этом случае в качестве аппроксимирующего ветвящегося процесса можно взять ветвящийся процесс с пуассоновским начальным распределением частиц в $\mathbf{R}^d$, частицы которого имеют время жизни $\epsilon \rightarrow 0$ и в конце жизни либо погибают, либо производят ровно двух потомков. Этот факт в определенной степени аналогичен тому, что траектории броуновского движения могут быть аппроксимированы траекториями простых случайных блужданий с «временным» шагом $\epsilon \rightarrow 0$.

Пусть теперь $(\zeta_s, s \geq 0)$ — броуновское движение на неотрицательной полуоси с отражением в нуле, и пусть y — некоторая фиксированная точка пространства E .

ξ -броуновской змеей на $\mathbf{R}^d$ с начальной точкой $y \in E$ называется набор $(W_s, s \geq 0)$ траекторий на E таких, что

1) W_s для любого $s \geq 0$ является конечным путем на E , начинающимся в точке y и определенным на временном промежутке $[0, \zeta_s]$;

2) отображение $s \rightarrow W_s$ является марковским, причем для любых $s < s'$

а) $W_{s'}(t) = W_s(t)$ при $t \leq \inf_{r \in [s, s']} \zeta_r =: m(s, s')$;

б) при фиксированном $W_s(m(s, s'))$ траектория $(W_{s'}(m(s, s') + t), 0 \leq t \leq \zeta_{s'} - m(s, s'))$ не зависит от W_s и имеет такое же распределение, как и процесс ξ , стартовый из $W_{s'}(m(s, s'))$ и остановленный в момент $\zeta_{s'} - m(s, s')$.

Неформальное описание броуновской змеи может быть, например, таким: для каждого s траектория W_s является траекторией процесса ξ на E со случайным временем жизни ζ_s , причем эта траектория «удлиняется» в точках роста ζ и сокращается (часть ее «стирается») для остальных $t \in [0, \zeta_s]$.

Между суперброуновским движением и броуновской змеей существует тесная связь. Пусть $(L_s^a, s \geq 0)$ — локальное время ζ на уровне a , а $\eta_1 = \inf\{s \geq 0: L_s^0 > 1\}$. Для каждого $a \geq 0$ определим случайную меру Z_a на пространстве E соотношением

$$\int_E f(y) dZ_a(y) = \int_0^{\eta_1} dL_s^a f(W_s(a)).$$

Оказывается, что процесс $(Z_a, a \geq 0)$ является суперброуновским движением с $Z_0 = \delta_y$ и $\beta = 2$. Фактически это представление показывает, что суперброуновское движение можно рассматривать как «букет» броуновских движений с весовыми множителями.

Однако аналогии между суперброуновским движением и стандартным броуновским движением еще глубже, чем может показаться с первого взгляда. Для того чтобы пояснить это утверждение, напомним, что если рассмотреть момент выхода $T(y)$ из некоторой области D в $\mathbf{R}^d$ траектории броуновского движения w_t , стартующей в момент $t = 0$ из точки $y \in D$, то функция $\varphi(y) = \mathbf{E}f(w_{T(y)})$ является решением обобщенной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

Если теперь вместо броуновского движения взять броуновскую змею и рассмотреть множество $\mathcal{E}^D$ всех точек выхода броуновской змеи из множества D , то на множестве $\mathcal{E}^D$ можно задать случайную меру $\mathcal{X}^D$ такую, что для неотрицательной и непрерывной функции f функция

$$u(y) = -\ln \mathbf{E}_y \left(\exp - \int f d\mathcal{X}^D \right)$$

является единственным неотрицательным решением нелинейной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u = 2u^2, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

Мы привели лишь два примера, показывающих, сколь любопытным вероятностным объектом являются суперпроцессы. В рецензируемой книге их гораздо больше. Их описание могло бы занять не одну страницу журнального текста. Поэтому, не вдаваясь в детали, мы просто перечислим названия глав монографии: «Ветвящиеся процессы с непрерывным множеством состояний и суперпроцессы»; «Генеалогия броуновских экскурсий»; «Броуновская змея и квадратичные суперпроцессы»; «Меры на множестве точек выхода суперпроцессов из области и нелинейная задача Дирихле»; «Полярные множества и решения, взрывающиеся на границе»; «Вероятностные представления положительных решений»; «Процессы Леви и генеалогия общих ветвящихся процессов с непрерывным множеством состояний».

Даже из этого сухого перечисления ясно, что перед нами насыщенная современной информацией книга, в которой нашли достойное отражение связи ветвящихся процессов и суперпроцессов с дифференциальными уравнениями в частных производных и стохастическими дифференциальными уравнениями. К тому же она написана (прошу поверить мне на слово) *действительно* хорошо и, как мне кажется, найдется немало читателей, которые после знакомства с ней станут «поклонниками» суперпроцессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dawson D. A., Perkins E. A. Historical Processes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991, 179 p. (Mem. Amer. Math. Soc., № 454.)
2. Dawson D. A. Measure-Valued Markov Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1993, 260 p. (Lecture Notes in Math., v. 1541.)
3. Dynkin E. B. An Introduction to Branching Measure-Valued Processes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 134 p.