Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Рецензия на книгу: Bañuelos R., Moore C. N. “Probabilistic behavior of Harmonic Functions”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 2, 411–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:38:56

Bañuelos R., Moore C. N. **Probabilistic Behavior of Harmonic Functions**. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1999, xiv+204 p.

Последние 20–25 лет наблюдается повышенный интерес к вероятностным методам при исследовании проблем математического анализа. Отдельные применения вероятностных методов в математическом анализе известны давно. Например, вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении произвольной непрерывной функции на конечном отрезке полиномами можно встретить в учебниках и по теории вероятностей и по математическому анализу. Впечатляющим примером успешного использования этих методов является создание вероятностной теории потенциала — двойника классической теории потенциала. Хорошо известны применения вероятностных методов в теории аналитических функций, в гармоническом анализе, а также марковских процессов в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Рассматриваемая монография являет собой очередной пример успешного применения вероятностных методов, более точно, методов теории мартингалов, к анализу гармонических функций. Монография разбита на шесть глав. Остановимся кратко на содержании каждой из них.

Первая глава («Основные идеи и методы») содержит подготовительный материал. Здесь мы находим определение гармонической функции многих (конечного числа) переменных. Отдельно обсуждаются свойства гармонических функций в шаре и в верхнем (многомерном) полупространстве — подмножестве $\mathbf{R}_+^{n+1}$ точек евклидова пространства размерности $n+1$ с положительной последней координатой. Среди обсуждаемых свойств — интегральные представления гармонических функций, проблема Дирихле для шара и верхнего полупространства, граничные значения гармонических функций, неравенства Харди–Литтлвуда для максимальных функций. Подробно обсуждается понятие H^p -пространства гармонических функций в верхнем полупространстве. Само определение и свойства этого пространства сравниваются с соответствующими свойствами пространств Харди аналитических функций в шаре и на диске. Два объекта — максимальная нетангенциальная функция и квадратичная функция, построенные по гармонической функции, играют в последующем изложении исключительную роль. Именно с помощью этих функций исследуются свойства гармонических функций. Глава завершается краткими замечаниями исторического характера. Здесь указано, из каких источников заимствован материал. Устанавливается в ряде случаев приоритет, в частности, указывается, что упомянутую квадратичную функцию, которую также называют функцией области Лузина, первым определил и использовал Н. Н. Лузин. Совсем коротко сообщаются классические результаты о поведении гармонических функций. Эта краткость объясняется тем, что излагаемый материал изложен в целом ряде доступных монографий. По этой же причине опущены доказательства ряда теорем.

Вторая глава («Мартингальное представление: Принцип инвариантности») посвящена изложению связи между гармоническими функциями, определенными в верхнем полупространстве, и диадическими мартингалами. С каждой гармонической функцией, определенной на верхнем полупространстве, можно связать конечное число диадических мартингалов таким образом, что значения гармонической функции можно удовлетворительно, в определенном смысле, аппроксимировать значениями этих мартингалов. Возникающую при этой аппроксимации ошибку удается оценить с помощью урезанной максимальной нетангенциальной функции и функции области Лузина. При оценке точности аппроксимации решающее значение играют известные неравенства для квадратичной и максимальной функций мартингала и усиленный принцип инвариантности для слабо зависимых случайных величин, надлежащим образом модифицированные для применения в рассматриваемой ситуации.

Глава 3 («Закон повторного логарифма Колмогорова для гармонических функций») содержит формулировку и доказательство аналога закона повторного логарифма.

рифма Колмогорова для независимых случайных величин в случае гармонических функций. Роль дисперсии из теоремы Колмогорова играет функция области Лузина. При стремлении аргумента к вершине конуса, на котором определена функция области Лузина, значения нормированной гармонической функции лежат в определенных границах. Эти границы не совпадают. Поэтому аналогия с теоремой Колмогорова не совсем полная: как известно, в теореме Колмогорова указывается точная асимптотика для определенной функции от сумм независимых случайных величин. Доказательство теоремы проводится по образцу доказательства теоремы Стаута, представляющей собою обобщение теоремы Колмогорова на мартингалы. Успех доказательства основан на построении экспоненциальных оценок для максимальных функций диадических мартингалов. Сами по себе эти неравенства являются аналогами пионерских неравенств Буркхольдера, уточненных затем рядом автором. Необходимые исторические справки можно получить из небольшой монографии А. Гарсиа [1].

В теореме Колмогорова присутствует условие на области значений случайных величин. Рядом авторов, первыми среди которых были Дж. Марцинкевич и А. Зигмунд, построены примеры, призванные показать, что эти условия в общем случае ослабить нельзя. Здесь мы находим аналогичный пример. Только вместо последовательности сумм независимых случайных величин рассматриваются последовательные суммы лакунарного ряда. Предлагаемый пример еще раз доказывает неумощность условий теоремы Колмогорова и соответствующих условий теоремы Вейса, представляющей аналог теоремы Колмогорова для лакунарных рядов. В заключение главы обсуждается аналог закона повторного логарифма для функции Литтлвуда-Палая. Сравнивая этот аналог с обобщением закона повторного логарифма Колмогорова, можно видеть, что в этом случае авторам удалось указать более точные границы изменения надлежащим образом нормированной функции при соответствующем изменении аргументов.

Глава 4 («Вполне точные неравенства для A и N »; в оригинале: «Sharp Good- λ -Inequalities for A and N ») посвящена выводу оценок меры Лебега множеств, на которых функция области Лузина и нетангенциальная максимальная функция лежат в указанных границах, посредством меры Лебега множества, где функция области Лузина лежит в упомянутых границах. Идея неравенств заимствована у Д. Л. Буркхольдера и Р. Ф. Ганди, которые ранее доказали аналогичные неравенства с участием максимальной функции и квадратичной функции мартингала. Доказательство неравенств состоит в применении упомянутой аппроксимации гармонической функции с помощью диадических мартингалов, в оценке возникающей при этом ошибки и в применении неравенства Буркхольдера-Ганди к диадическим мартингалам. Результатом являются удовлетворительные неравенства, которые затем применяются для оценки L_p -нормы для отношения нетангенциальной функции к функции области Лузина, а также для доказательства аналога закона повторного логарифма Чжун Кай Лая на случай гармонических функций. Этот закон повторного логарифма не является полным аналогом соответствующего закона Чжун Кай Лая для независимых случайных величин, так как представляет собой неравенство. В теореме же Чжун Кай Лая, как известно, указывается точная асимптотика некоторой функции от сумм независимых случайных величин.

Пятая глава («Неравенства для плотности поверхностного интеграла»; в оригинале: «Good- λ -Inequalities for the Density of the Area Integral») содержит обсуждение свойств аналогов локального времени и максимального локального времени мартингала, впервые введенных и изученных П. Леви. Рядом авторов были открыты неравенства между L_p -нормами максимальной функции, квадратичной функции и максимального локального времени мартингала. В 1983 году Р. Ф. Ганди определил понятия плотности и максимальной плотности поверхностного интеграла, построенного по гармонической функции, которые представляют собой аналоги упомянутых локального времени и максимального локального времени мартингала. Главной

целью главы является доказательство неравенств типа: мера Лебега множества, на котором, скажем, плотность поверхностного интеграла превосходит величину $K\lambda$, а нетангенциальная функция не превосходит величины $\epsilon\lambda$, мажорируется с точностью до постоянной мерой Лебега множества, на котором нетангенциальная функция превосходит λ . Здесь $K > 0$, $0 < \epsilon < 1$ и $\lambda > 0$ — числа, причем два последних из них находятся в нашем распоряжении, а точное значение K остается неясным. Наряду с этим неравенством доказываются аналогичные неравенства, в которых участвуют максимальная плотность поверхностного интеграла, функция области Лузина и ряд других функций. Доказываемые неравенства являются аналогами известных неравенств Буркхольдера–Ганди для максимальной функции, квадратичной функции и максимального локального времени мартингала. Особое внимание авторы уделяют строению постоянных в этих неравенствах, стремясь получить их, по возможности, максимально точными. Полученные неравенства затем применяются для доказательства обобщения закона повторного логарифма Кестена для максимального локального времени мартингала на случай гармонических функций. Эта аналогия не полна в том смысле, в каком не полна упомянутая выше аналогия между законом повторного логарифма Колмогорова и его обобщением на гармонические функции. В качестве другого применения полученных неравенств дается новое доказательство характеристики класса $L \ln L$ гармонических функций в классе H^1 , первоначально найденное Дж. Броссардом и Л. Шевалье.

Шестая глава («Классический закон повторного логарифма в математическом анализе») содержит обзор различных форм закона повторного логарифма. Здесь мы находим закон повторного логарифма Салема–Зигмунда для лакунарных тригонометрических рядов, а также его обобщения, принадлежащие М. Вейс, а также В. Филиппу и В. Стауту.

Два последних параграфа содержат обсуждение закона повторного логарифма для функций Блоха. Основным результатом здесь является теорема Макарова и ряд уточнений этой теоремы, принадлежащих разным авторам и, в частности, авторам монографии.

Авторы проделали большую и кропотливую работу, связанную с переносом техники, развитой в теории мартингалов, на случай гармонических функций. Им принадлежит большое число доказанных в монографии утверждений. К числу достоинств изложения стоит отнести стремление авторов по каждой отдельной теме указать предысторию вопроса и перечислить мотивы и возможные подходы решения поставленных задач. Заинтересованный читатель может найти темы для собственных исследований. В монографии приведены конкретные формулировки нерешенных задач вместе с комментариями о возможных путях решения. Наконец, читатель располагает списком подавляющего числа публикаций, имеющих отношение к современным исследованиям по гармоническим функциям. Приятно видеть стремление авторов установить связи между современными исследованиями и пионерскими работами классиков, в частности, работами русских математиков Н. Н. Лузина и И. И. Привалова. Можно быть уверенным, что предлагаемая монография окажется полезной всем, кто интересуется гармоническими функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garsia A. M. Martingale Inequalities. Seminar Notes on Recent Progress.* Reading, Mass.: Benjamin, 1973, 184 p.

9.III.2000 г.

В. М. Круглов