Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, А. В. Колесников, Открытые отображения вероятностных мер и теорема представления Скорохода, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 3–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 02:47:57

© 2001 г. БОГАЧЁВ В. И.*, КОЛЕСНИКОВ А. В.*

ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И
ТЕОРЕМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СКОРОХОДА¹⁾

Доказано, что для широкого класса пространств X и Y (включающего вполне регулярные суслинские пространства) и каждого открытого отображения $f: X \rightarrow Y$ отображение $\hat{f}: \mu \mapsto \mu \circ f^{-1}$ пространств вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$ открыто. Обсуждается существование непрерывных обратных для $\hat{f}$, а также связь с теоремой представления Скорохода и ее обобщениями.

Ключевые слова и фразы: слабая сходимостъ вероятностных мер, теорема представления Скорохода, открытое отображение, непрерывная селекция.

Введение. Как было показано в [1], для каждой открытой сюръекции $f: X \rightarrow Y$ компактных пространств соответствующее отображение $\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, $\mu \mapsto \mu \circ f^{-1}$, пространств вероятностных мер, наделенных слабой топологией, открыто. Согласно [2], то же самое верно для польских пространств. Мы распространим этот результат на широкий класс пространств, включающий как вполне регулярные суслинские, так и компактные пространства. Открытость отображения $\hat{f}$ позволяет строить для него непрерывные правые обратные. Затем мы обсудим некоторые интересные связи вышеупомянутого результата с теоремой представления Скорохода для слабой сходимости мер и ее обобщениями. Напомним, что А. В. Скороход [3] доказал, что для всякой последовательности вероятностных мер μ_n на полном сепарабельном метрическом пространстве X , слабо сходящейся к мере μ_0 , можно найти такие борелевские отображения ξ_n , $n = 0, 1, \dots$, из $[0, 1]$ в X , что $\xi_n \rightarrow \xi_0$ почти всюду и образ меры Лебега при отображении ξ_n совпадает с μ_n при всех $n = 0, 1, \dots$. Д. Блэкуэлл и Л. Дубинс [4] показали, что все пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ на X можно параметризовать отображениями из $[0, 1]$ в X с сохранением указанного соответствия, т.е. каждой борелевской вероятностной мере μ на X можно сопоставить борелевское отображение $\xi_\mu: [0, 1] \rightarrow X$ таким образом, что μ является образом меры Лебега

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: sfb1@mathematic.uni-bielefeld.de

¹⁾ Работа написана при поддержке гранта РФФИ 00-15-99267, INTAS-RFBR Grant 95-0099, SFB 343 и DFG 436 RUS 113/343/0(R).

при отображении ξ_μ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\mu_n}(t) = \xi_\mu(t)$ для почти всех t , если меры μ_n слабо сходятся к мере μ . Позже то же самое доказал К. Ферник [5]. Н. В. Крылов [6] показал, что в случае $X = \mathbf{R}^d$ все неотрицательные ограниченные борелевские меры можно параметризовать отображениями ξ_μ из подмножеств $\mathbf{R}^d$ в $\mathbf{R}^d$ с аналогичными свойствами. Мы дадим ниже короткий вывод упомянутого обобщения теоремы представления Скорохода из существования непрерывного правого обратного для подходящего отображения $\hat{f}$. При этом можно использовать либо известную лемму Милютина, либо нашу теорему об открытых отображениях вероятностных мер в сочетании с теоремой Майкла о селекции. С другой стороны, мы покажем, как в метрическом случае теорема представления Скорохода может быть использована для доказательства того, что открытому отображению пространств соответствует открытое отображение вероятностных мер на этих пространствах. Мы обсудим также ряд различных вариантов свойства Скорохода в случае неметризуемых пространств.

1. Обозначения и терминология. Все рассматриваемые далее топологические пространства предполагаются отделимыми. Пространства, гомеоморфные полным сепарабельным метрическим пространствам, называются польскими. Непрерывные образы польских пространств называются суслинскими пространствами (или суслинскими множествами). Через $\mathcal{B}(X)$ обозначается борелевская σ -алгебра топологического пространства X , т.е. σ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами. Бэровская σ -алгебра $\mathcal{B}_0(X)$ — это σ -алгебра, порожденная всеми множествами вида $\{f > 0\}$, где f — непрерывная функция на X (такие множества будем называть конулевыми). Множество всех борелевских (возможно, знакопеременных) мер на топологическом пространстве X обозначается символом $\mathcal{M}(X)$, символ $\mathcal{M}_0(X)$ обозначает пространство всех бэровских мер на X . Через $\mathcal{P}(X)$ обозначается множество всех борелевских вероятностных мер на X , а через $\mathcal{P}_0(X)$ — всех бэровских вероятностных мер на X . Подмножество $\mathcal{P}(X)$, образованное всеми радоновскими (т.е. внутренне компактно регулярными) мерами, обозначается через $\mathcal{P}_r(X)$. Слабая топология на $\mathcal{M}(X)$ и $\mathcal{M}_0(X)$ — это топология, порожденная семейством полунорм вида $\mu \mapsto |\int \varphi d\mu|$, где φ — ограниченная непрерывная функция на X . Таким образом, последовательность мер μ_n на X слабо сходится к мере μ , если $\int \varphi d\mu_n \rightarrow \int \varphi d\mu$ для всякой ограниченной непрерывной функции φ на X (о слабой топологии см. [7] или [8]). Ограничения этой топологии на $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}_0(X)$ и $\mathcal{P}_r(X)$ называются слабыми топологиями на соответствующих пространствах. Слабая топология хаусдорфова на $\mathcal{M}_0(X)$. В случае $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_0(X)$ (который всегда имеет место для вполне регулярных суслинских пространств и для метрических пространств) слабую

топологию на $\mathcal{P}(X)$ можно определить как топологию, порожденную базой множеств вида

$$U(\mu, V, \varepsilon) = \{ \nu \in \mathcal{P}(X) : \nu(V) > \mu(V) - \varepsilon \}, \quad (1.1)$$

где $V \subset X$ — открытое множество и $\varepsilon > 0$. База слабой топологии на $\mathcal{P}_0(X)$ порождена множествами вида (1.1), где множества V имеют вид $V = \{f > 0\}$ для некоторой непрерывной функции f на X ; см. [9], [10]. Для каждого вполне регулярного пространства X слабая топология на $\mathcal{P}_r(X)$ хаусдорфова и множества вида (1.1) образуют ее базу. Слабая сходимости последовательности мер μ_n к μ будет обозначаться посредством $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Для всякой вероятностной меры μ на X символом $\mathcal{B}(X)_\mu$ обозначается лебеговское пополнение $\mathcal{B}(X)$ относительно μ . Множества, входящие в $\mathcal{B}(X)_\mu$, называются μ -измеримыми. Множество A в топологическом пространстве X называется универсально измеримым, если оно измеримо относительно всякой вероятностной борелевской меры μ на X , т.е. $A \in \mathcal{B}(X)_\mu$. Известно, что всякое суслинское множество универсально измеримо (см. [11]). Если X и Y — топологические пространства, μ — борелевская мера на X , а $f: X \rightarrow Y$ — μ -измеримое отображение (т.е. $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)_\mu$ для всех $A \in \mathcal{B}(Y)$), то мера $\mu \circ f^{-1}$, заданная на $\mathcal{B}(Y)$ формулой

$$\mu \circ f^{-1}(A) = \mu(f^{-1}(A)),$$

называется образом меры μ при отображении f . Для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ формула

$$\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y), \quad \mu \mapsto \mu \circ f^{-1},$$

задает отображение пространств мер, непрерывное в слабой топологии.

Напомним, что отображение f из топологического пространства X в топологическое пространство Y называется открытым, если оно непрерывно и переводит открытые множества в открытые. Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ обладает непрерывным правым обратным, если существует такое непрерывное отображение $g: Y \rightarrow X$, что $f(g(y)) = y$ для всех $y \in Y$ (иначе говоря, многозначное отображение f^{-1} обладает непрерывной селекцией).

Лебеговская мера обозначается через λ . Через ∂A будем обозначать границу множества A , а через $\bar{A}$ — замыкание A .

Мы будем использовать классический результат Е. Майкла [12]:

Теорема 1.1. Пусть X — паракомпактное пространство (например, метризуемое пространство), M — метризуемое подмножество локально выпуклого пространства E . Пусть $\Phi: X \rightarrow 2^M$ — полунепрерывное снизу отображение со значениями в множестве 2^M всех непустых замкнутых подмножеств M , причем $\Phi(x)$ полно для

всех x . Тогда существует такое непрерывное отображение $f: X \rightarrow E$, что $f(x)$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке $\Phi(x)$ для всех x . Если M полно, то полноты E не требуется.

Заметим, что последнее утверждение следует из первого, так как E имеет пополнение $\tilde{E}$, а M — полное метризуемое подмножество $\tilde{E}$. Типичное применение этой теоремы таково: пусть $T: M \rightarrow X$ — непрерывное аффинное отображение полного метризуемого множества M в локально выпуклом пространстве E в метризуемое множество X в локально выпуклом пространстве Y . Тогда $\Phi(x) = T^{-1}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, следовательно, T обладает непрерывным правым обратным.

Пусть $F: X \rightarrow Y$ — непрерывная сюръекция компактных пространств X и Y . Напомним (см. [13, §2]), что линейный оператор $U: C(X) \rightarrow C(Y)$ называется регулярным оператором усреднения для F , если $U\psi \geq 0$ при $\psi \geq 0$ и $U(\varphi \circ F) = \varphi$ для всех $\varphi \in C(Y)$. Такой оператор автоматически непрерывен и имеет единичную норму. Легко видеть, что оператор $V = U^*: \mathcal{M}_\tau(Y) = C(Y)^* \rightarrow \mathcal{M}_\tau(X) = C(X)^*$ переводит $\mathcal{P}_\tau(Y)$ в $\mathcal{P}_\tau(X)$, причем $\hat{F} \circ V$ — тождественное отображение на $\mathcal{M}(Y)$, т.е. V является непрерывным правым обратным для $\hat{F}$. Действительно, для всех $\nu \in \mathcal{M}_\tau(Y)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_Y \varphi(y) [\hat{F} \circ V(\nu)](dy) &= \int_X \varphi(F(x)) V(\nu)(dx) = \int_Y U(\varphi \circ F)(y) \nu(dy) \\ &= \int_Y \varphi(y) \nu(dy), \quad \forall \varphi \in C(Y). \end{aligned}$$

Компактное пространство S называется пространством Милютина, если для некоторой мощности τ существует непрерывная сюръекция $F: \{0, 1\}^\tau \rightarrow S$, где $\{0, 1\}$ — двуточечное пространство, обладающая регулярным оператором усреднения. Следующий результат вытекает из известной леммы Милютина (см. [13, теорема 5.6]), согласно которой отрезок является пространством Милютина.

Теорема 1.2. *Прямое произведение произвольного семейства компактных метрических пространств является пространством Милютина.*

В частности, пространством Милютина является всякий метризуемый компакт S , причем для него в качестве τ в определении выше можно взять $\aleph$. Поскольку пространство $\{0, 1\}^\aleph$ гомеоморфно классическому канторовскому множеству $C \subset [0, 1]$, состоящему из всех чисел отрезка $[0, 1]$, троичное разложение которых не содержит 1 (см. [14, пример 3.1.28]), то справедлив следующий результат.

Следствие 1.1. *Для всякого метризуемого компакта S существует непрерывная сюръекция $F: C \rightarrow S$ из канторовского множества C , которая обладает регулярным оператором усреднения.*

2. Открытые отображения вероятностных мер.

Лемма 2.1. Пусть μ — радоновская вероятностная мера на вполне регулярном пространстве X и $U \subset X$ — открытое множество. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество V , что $\bar{V} \subset U$, $\mu(\partial V) = 0$ и $\mu(U \setminus V) < \varepsilon$. То же самое верно для любой борелевской вероятностной меры, если X — совершенно нормальное пространство (вполне регулярное пространство, в котором всякое открытое множество является конулевым, см. [14, 1.5.19]). Наконец, это утверждение верно также для любой бэровской меры на произвольном пространстве, если U — конулевое множество.

Доказательство. Существует такое компактное множество $K \subset U$, что $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Так как X вполне регулярно, можно найти такую непрерывную функцию на X , что $f|_K = 1$ и $f = 0$ вне U . Тогда существует такое $c \in (0, 1)$, что множество $\{f = c\}$ имеет μ -меру нуль. Мы можем положить $V = \{f > c\}$, ибо $\partial V \subset \{f = c\}$. В случае, когда множество U имеет вид $\{f > 0\}$ для некоторой непрерывной функции f , те же рассуждения применяются к достаточно малому c . Лемма доказана.

В частности, утверждение леммы 2.1 верно для любой борелевской меры на универсально измеримом подпространстве вполне регулярного суслинского пространства.

Лемма 2.2. Пусть X и μ — такие же, как в лемме 2.1, и пусть

$$G_0 = \{\nu \in \mathcal{P}(X): \nu(V_i) - \mu(V_i) > -\varepsilon_0, i = 1, \dots, n\},$$

где V_i — открытые множества в X и $\varepsilon_0 > 0$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие число $\delta > 0$ и открытые попарно непересекающиеся множества $W_1, W_2, \dots, W_m$, что выполняются следующие условия:

- (i) $\mu(V_i) - \sum_{\{j: W_j \subset V_i\}} \mu(W_j) < \varepsilon, i = 1, \dots, n,$
- (ii) $G = \{\nu \in \mathcal{P}(X): \nu(W_i) - \mu(W_i) > -\delta, i = 1, \dots, m\} \subset G_0.$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n . При $n = 1$ оно очевидно. Пусть теперь по предположению индукции для множеств $V_1, \dots, V_{n-1}$ и числа $\varepsilon/2$ построены попарно непересекающиеся открытые множества $\widetilde{W}_1, \dots, \widetilde{W}_{m_{n-1}}$ и число δ_{n-1} , так что (i) и (ii) выполнены с δ_{n-1} вместо δ . Пусть $0 < \varepsilon_1 < [2m_{n-1}]^{-1} \min(\varepsilon, \varepsilon_0, \delta_{n-1})$. По лемме 2.1 можно построить такие открытые множества $W_j^1, j = 1, \dots, m_{n-1}$, что $\overline{W_j^1} \subset \widetilde{W}_j, \mu(\widetilde{W}_j \setminus W_j^1) < \varepsilon_1, \mu(\partial W_j^1) = 0$. Положим $W = V_n \setminus \bigcup_{j=1}^{m_{n-1}} \overline{W_j^1}$. Теперь для каждого j можно построить такое открытое множество W_j^2 , что

$$\overline{W_j^2} \subset W_j^1 \cap V_n, \quad \mu((W_j^1 \cap V_n) \setminus W_j^2) < \varepsilon_1, \quad \mu(\partial W_j^2) = 0.$$

Положим $W_j^3 = W_j^1 \setminus \overline{W_j^2}$. Тогда $W, W_j^2, W_j^3, j = 1, \dots, m_{n-1}$, — искомые множества. Ясно, что они попарно не пересекаются. Для

$i = 1, 2, \dots, n - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(V_i) - \sum_{j: \tilde{W}_j \subset V_i} (\mu(W_j^2) + \mu(W_j^3)) &= \mu(V_i) - \sum_{j: \tilde{W}_j \subset V_i} \mu(W_j^1) < \mu(V_i) \\ &- \sum_{j: \tilde{W}_j \subset V_i} \mu(\tilde{W}_j) + m_{n-1}\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2} + m_{n-1}\varepsilon_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Мы имеем также

$$\mu(V_n) - \mu(W) - \sum_j \mu(W_j^2) < m_{n-1}\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Таким образом, условие (i) выполнено.

Пусть $0 < \delta < [4(m_{n-1} + 1)]^{-1} \min(\varepsilon_0, \delta_{n-1})$. Для доказательства (ii) осталось показать, что

$$\nu(\tilde{W}_j) - \mu(\tilde{W}_j) > -\delta_{n-1}, \quad \forall j = 1, \dots, m_{n-1},$$

и $\nu(V_n) - \mu(V_n) > -\varepsilon_0$, если $\nu \in G$. Действительно,

$$\begin{aligned} \nu(\tilde{W}_j) - \mu(\tilde{W}_j) &> \nu(W_j^1) - \mu(W_j^1) - \varepsilon_1 \geq \nu(W_j^2) + \nu(W_j^3) - \mu(W_j^2) \\ &\quad - \mu(W_j^3) - \varepsilon_1 > -2\delta - \varepsilon_1 > -\delta_{n-1}, \\ \nu(V_n) - \mu(V_n) &\geq \nu(W) + \sum_j \nu(W_j^1 \cap V_n) - \mu(W) - \sum_j \mu(W_j^1 \cap V_n) \\ &> \nu(W) + \sum_j \nu(W_j^2) - \mu(W) - \sum_j \mu(W_j^2) - m_{n-1}\varepsilon_1 \\ &> -(m_{n-1} + 1)\delta - m_{n-1}\varepsilon_1 > -\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. Пусть X и Y — вполне регулярные пространства и $f: X \rightarrow Y$ — открытое сюръективное отображение, удовлетворяющее следующему условию локальной консервативности: для каждого открытого множества $V \subset X$ и каждой радоновской вероятностной меры ν на $f(V)$ существует такая радоновская вероятностная мера μ на V , что $\mu \circ f^{-1} = \nu$. Тогда отображение $\hat{f}: \mathcal{P}_r(X) \rightarrow \mathcal{P}_r(Y)$ — открытая сюръекция. То же самое верно для отображения $\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, если X и Y совершенно нормальны и f удовлетворяет приведенным выше условиям с заменой «радоновской меры» на «борелевскую меру».

Доказательство. Сюръективность $\hat{f}$ следует из определения. Пусть $\mu_0 \in \mathcal{P}_r(X)$, и пусть

$$U = \left\{ \mu: \mu(V_i) - \mu_0(V_i) > -\varepsilon, \quad i = 1, \dots, n \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

где множества $V_i \subset X$ открыты и $\varepsilon > 0$, — окрестность μ_0 в слабой топологии. Согласно лемме 2.2, можно считать, что множества V_i попарно

не пересекаются. Положим $\eta_0 = \mu_0 \circ f^{-1}$. Множества $f(V_i)$ открыты. По лемме 2.2 существуют такие попарно непересекающиеся множества $W_1, \dots, W_m \subset Y$, что

$$\eta_0(f(V_i)) - \sum_{W_j \subset f(V_i)} \eta_0(W_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon/(2m)$ положительно. Зафиксируем окрестность меры η_0 вида

$$O = \left\{ \eta \in \mathcal{P}_r(Y) : \eta(W_j) - \eta_0(W_j) > -\varepsilon_1, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Докажем, что для каждой меры $\eta \in O$ существует ее прообраз в U . Положим $I_j = \{i : W_j \subset f(V_i)\}$. Для каждого $i \in I_j$ подберем такие неотрицательные числа α_{ij} , что $\sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} = 1$ и $\alpha_{ij} \eta_0(W_j) \geq \mu_0(f^{-1}(W_j) \cap V_i)$. По условиям теоремы для всякого $i \in I_j$ существует прообраз μ_{ij} меры $\eta|_{W_j}$ относительно отображения $f|_{V_i}$, т.е. такая неотрицательная радоновская мера μ_{ij} на V_i , что $\mu_{ij} \circ f^{-1} = \eta|_{W_j}$. Пусть $\tilde{\mu}$ — прообраз $\eta|_{Y \setminus \bigcup_j W_j}$ относительно f . Положим $\mu = \tilde{\mu} + \sum_j \sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} \mu_{ij}$. Ясно, что $\nu = \mu \circ f^{-1}$. Покажем, что $\mu \in U$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mu(V_i) &\geq \sum_{j: i \in I_j} \alpha_{ij} \mu_{ij}(V_i) = \sum_{j: i \in I_j} \alpha_{ij} \eta(W_j) > \sum_{j: i \in I_j} \alpha_{ij} (\eta_0(W_j) - \varepsilon_1) \\ &\geq \sum_{j: i \in I_j} \alpha_{ij} \eta_0(W_j) - m \varepsilon_1 \geq \sum_{j: i \in I_j} \mu_0(f^{-1}(W_j) \cap V_i) - m \varepsilon_1 \\ &= \mu_0(V_i) - \mu_0\left(V_i \setminus \bigcup_{j: i \in I_j} f^{-1}(W_j)\right) - m \varepsilon_1 \\ &\geq \mu_0(V_i) - \eta_0\left(f(V_i) \setminus \bigcup_{j: W_j \subset f(V_i)} W_j\right) - m \varepsilon_1 \\ &\geq \mu_0(V_i) - \frac{\varepsilon}{2} - m \varepsilon_1 > \mu_0(V_i) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Первое утверждение доказано. Второе утверждение доказывается аналогично.

Отметим, что заключение теоремы 2.1 верно для произвольных пространств и бэровских мер, если f — непрерывная сюръекция, переводящая конулевые множества в конулевые, а указанное выше условие локальной консервативности выполнено для бэровских мер.

Требование локальной консервативности в теореме 2.1 выполняется во многих случаях, например, для борелевских отображений суслинских пространств, что следует из теоремы об измеримом выборе (см. [11, теорема 13, гл. II, § 3, с. 127] или [15, дополнение 3]). Более общим образом, достаточно, чтобы X и Y были борелевски изоморфны польским пространствам, или чтобы замкнутые множества в X были $\mathcal{H}$ -аналитическими (см. [16]–[18]).

В случае, когда X — польское пространство, утверждение теоремы 2.1 было доказано в [19]. Результат этого типа был получен в [2, предложение 2.10] для некоторых специальных отображений f метрических пространств; основные идеи доказательства из цитированной работы были использованы выше. В [2] был поставлен вопрос о справедливости этого утверждения в случае борелевских подмножеств сепарабельных метрических пространств.

Следствие 2.1. Пусть X и Y — вполне регулярные суслинские пространства и пусть $f: X \rightarrow Y$ — открытое сюръективное отображение. Тогда отображение $\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ — открытая сюръекция в слабой топологии.

Доказательство. Достаточно напомнить, что $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_r(X)$ и $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}_r(Y)$ для вполне регулярных суслинских пространств и что каждое непрерывное отображение суслинских пространств локально консервативно в смысле теоремы 2.1.

Следствие 2.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — открытое сюръективное отображение полных метрических пространств. Тогда отображение $\mathcal{P}_r(X) \rightarrow \mathcal{P}_r(Y)$ — открытая сюръекция.

Доказательство. Пусть $V \subset X$ — открыто, и пусть ν — радоновская вероятностная мера на $f(V)$. Нам нужно показать, что существует такая радоновская вероятностная мера μ на V , что $\mu \circ f^{-1} = \nu$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $E \subset f(V)$ — компакт, причем $\nu(E) > 1 - \varepsilon$. Напомним, что V гомеоморфно полному метрическому пространству (см. [14, теорема 4.3.23]). Согласно [14, 5.5.11], существует такое компактное множество $K \subset V$, что $f(K) = E$. Теперь утверждение следует из теоремы 6.1.8 в [9].

Замечание 2.1. Теорема 2.1 влечет результат работы [1], где пространства X и Y компактны. Действительно, пусть $f: X \rightarrow Y$ — открытое отображение, $U \subset X$ открыто, и пусть ν — радоновская вероятностная мера на $V = f(U)$. Для того чтобы доказать, что существует такая радоновская вероятностная мера μ на U , что $\mu \circ f^{-1} = \nu$, достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $S \subset U$, удовлетворяющее неравенству $\nu(f(S)) > 1 - \varepsilon$ (см. [9, теорема 6.1.8]). Возьмем компактное множество $K \subset V$ с $\nu(K) > 1 - \varepsilon$. Для любой точки $k \in K$ выберем некоторую точку $u_k \in U \cap f^{-1}(k)$ и такую ее окрестность U_k , что $\overline{U_k} \subset U$. Открытые множества $f(U_k)$ покрывают K , так что можно извлечь открытое подпокрытие $f(U_{k_1}), \dots, f(U_{k_n})$. Тогда множество $S = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_{k_i}}$ компактно и $K \subset f(S)$, откуда получаем $\nu(f(S)) > 1 - \varepsilon$.

В следующем пункте мы дадим другое доказательство теоремы 2.1 в метрическом случае.

Лемма 2.3. Пусть X и Y — польские пространства, а $f: X \rightarrow Y$ — открытое сюръективное отображение. Тогда соответствующее отображение $\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ обладает непрерывным в слабой топологии правым обратным, т.е. существует такое непрерывное в слабой топологии отображение $\Psi: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, что $\hat{f}(\Psi(\nu)) = \nu$ для всех $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. То же самое верно для произвольных полных метрических пространств X и Y , если рассматривать $\mathcal{P}_r(X)$ и $\mathcal{P}_r(Y)$ вместо $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$ соответственно.

Доказательство. Мы знаем, что отображение $\hat{f}$ сюръективно и открыто. Поскольку это отображение линейно, а пространство $\mathcal{P}_r(X)$ — выпукло, метризуемо и полно в локально выпуклом пространстве $\mathcal{M}_r(X)$ со слабой топологией, то существование непрерывного правого обратного вытекает из теоремы Майкла о селекции (см. теорему 1.1). В нашей ситуации применим частный случай этой теоремы, дающий существование непрерывной однозначной селекции полунепрерывного снизу многозначного отображения из полного метрического пространства S_1 в замкнутые выпуклые подмножества метризуемого полного выпуклого множества S_2 в локально выпуклом пространстве, откуда вытекает, что для всякого открытого сюръективного линейного отображения $\varphi: A \rightarrow B$, где A и B — выпуклые метризуемые полные множества в локально выпуклых пространствах, существует такое непрерывное отображение $\psi: B \rightarrow A$, что $\varphi \circ \psi$ — тождественное отображение на B . Лемма доказана.

Следствие 2.3. Для каждого универсально измеримого множества Y в польском пространстве Z существуют такие универсально измеримое подмножество X пространства $\mathcal{R}$ иррациональных чисел в $[0, 1]$ и непрерывное сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$, что отображение $\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ имеет непрерывное в слабой топологии правое обратное $g: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Для произвольного множества $Y \subset Z$ аналогичное утверждение, но без универсальной измеримости X , верно для пространств $\mathcal{P}_r(X)$ и $\mathcal{P}_r(Y)$.

Доказательство. Существует открытая сюръекция $F: \mathcal{R} \rightarrow Z$ (см. [20, гл. VI, задача 150]; напомним, что $\mathcal{R}$ гомеоморфно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, см. [14, гл. 4, 4.3.G]). Каждая мера μ на Y продолжается на Z следующим образом: $\mu(Z \setminus Y) = 0$, что возможно в силу универсальной измеримости Y . Пусть $\Psi: \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{R})$ — отображение из леммы 2.3. Множество $X = F^{-1}(Y)$ универсально измеримо в $\mathcal{R}$. Действительно, если $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$, то в силу универсальной измеримости Y существуют такие борелевские множества $B_1, B_2 \subset Z$, что $B_1 \subset Y \subset B_2$ и $\nu \circ F^{-1}(B_2 \setminus B_1) = 0$. Тогда множества $A_1 = F^{-1}(B_1)$ и $A_2 = F^{-1}(B_2)$ — борелевские, $A_1 \subset X \subset A_2$ и $\nu(A_2 \setminus A_1) = 0$. Если меры $\mu_n \in \mathcal{P}(Y)$ сходятся слабо к $\mu \in \mathcal{P}(Y)$ на Y , то меры $\Psi(\mu_n)$ и $\Psi(\mu)$ сосредоточены

на X . Действительно, если K — компактное множество в дополнении к X , то $\mu_n(F(K)) = \mu(F(K)) = 0$, откуда

$$\Psi(\mu_n)(F^{-1}(F(K))) = \Psi(\mu)(F^{-1}(F(K))) = 0,$$

и потому $\Psi(\mu_n)(K) = \Psi(\mu)(K) = 0$. При этом меры $\Psi(\mu_n)$ сходятся в слабой топологии пространства $\mathcal{P}(X)$ к мере $\Psi(\mu)$ (поскольку $\Psi(\mu_n) \Rightarrow \Psi(\mu)$ на $\mathcal{R}$, то достаточно заметить, что всякая ограниченная равномерно непрерывная функция на X продолжается до ограниченной непрерывной функции на $\mathcal{R}$). Следовательно, в качестве f можно взять ограничение F на X , а в качестве $g(\mu)$ — меру $\Psi(\mu)$ на X . Если ограничиться радоновскими мерами, то рассуждения выше остаются в силе для любого Y (но X может не быть универсально измеримым).

З а м е ч а н и е 2.2. Многие задачи теории вероятностей и теории случайных процессов (например, задача решения стохастических дифференциальных уравнений) укладываются в следующую общую схему (см. [16], [21]). Для данного измеримого отображения $f: X \rightarrow Y$ измеримых пространств X и Y и вероятностной меры ν на Y найти такую меру μ на X , что $\nu = \mu \circ f^{-1}$. В случае, когда X и Y — топологические пространства и пространства вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$ наделены слабыми топологиями, существование непрерывного правого обратного отображения для отображения $\hat{f}: X \rightarrow Y$ обеспечивает непрерывный выбор решения, даже если решение μ^ν задачи не единственно. Было бы интересно распространить лемму 2.3 на больший класс пространств.

З а м е ч а н и е 2.3. (i) Следствие 1.1 вместе со сказанным перед ним дает существование непрерывной сюръекции $F: C \rightarrow S$, для которой отображение $\hat{F}$ имеет линейное непрерывное в слабой топологии правое обратное. Это утверждение не является следствием леммы 2.3, поскольку S может не быть образом C при открытом отображении (например, если $S = [0, 1]$). Кроме того, оно показывает, что для существования непрерывного правого обратного G отображения $\hat{F}$ не обязательно, чтобы F было открытым.

(ii) Следует отметить, что отображение g , являющееся непрерывным правым обратным к линейному отображению $\hat{f}$, может быть нелинейным. Однако в случае, когда X и Y — метризуемые компакты и $f: X \rightarrow Y$ — открытая сюръекция, согласно [22, теорема 1.1], f обладает регулярным оператором усреднения и потому отображение $\hat{f}: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ имеет линейное непрерывное правое обратное.

Сделанное замечание приводит к следующему аналогу следствия 2.3.

Предложение 2.1. Для всякого универсально измеримого множества Y в польском пространстве существуют универсально измеримое подмножество X канторова множества C и непрерывное

сюръективное отображение $f: X \mapsto Y$ такие, что отображение $\hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ обладает непрерывным в слабой топологии правым обратным $g: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. В случае компактного Y множество X можно выбрать компактным. Для произвольного Y аналогичное утверждение, но без универсальной измеримости X , верно для пространств $\mathcal{P}_r(X)$ и $\mathcal{P}_r(Y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вложим Y гомеоморфно в $S = [0, 1]^N$, что возможно по теореме Урысона (см. [14, теорема 4.2.10]). Каждую меру μ на Y продолжим на S , положив $\mu(S \setminus Y) = 0$, что возможно в силу универсальной измеримости Y . Пусть $F: C \rightarrow S$ и $G: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ — отображения, упомянутые в замечании 2.3. Положим $X = F^{-1}(Y)$. Если меры $\mu_n \in \mathcal{P}(Y)$ слабо сходятся к $\mu \in \mathcal{P}(Y)$ на Y , то, как и в следствии 2.3, меры $G(\mu_n)$, сосредоточенные на X , сходятся в слабой топологии пространства $\mathcal{P}(X)$ к мере $G(\mu)$. Поэтому в качестве f можно взять сужение F на X , а в качестве $g(\mu)$ — меру $G(\mu)$ на X . Очевидно, что X компактно, если компактно Y . Последнее утверждение ясно из доказательства.

Отметим, что в следствии 2.3 и в предложении 2.1 слабая топология пространства $\mathcal{P}(Y)$ совпадает с топологией, индуцированной из пространства вероятностных мер на объемлющем польском пространстве.

3. Параметризация Скорохода слабой сходимости. В этом пункте мы докажем сформулированную ниже теорему 3.1 и рассмотрим ее применения. Хотя ввиду леммы 3.1 эта теорема непосредственно вытекает из результата в [4] (или в [5]), где она сформулирована для полных сепарабельных метрических пространств, мы дадим другое, значительно более короткое доказательство, использующее некоторые из изложенных выше результатов.

Теорема 3.1. Пусть X — универсально измеримое множество в полном сепарабельном метрическом пространстве. Тогда каждой вероятностной борелевской мере μ на X можно сопоставить борелевское отображение $\xi_\mu: [0, 1] \rightarrow X$ таким образом, что μ является образом меры Лебега при отображении ξ_μ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\mu_n}(t) = \xi_\mu(t) \quad \text{для почти всех } t, \text{ если } \mu_n \Rightarrow \mu. \quad (3.1)$$

Будем говорить, что топологическое пространство X обладает сильным свойством Скорохода для радоновских мер, если для вероятностных мер Радона на нем справедливо заключение теоремы 3.1, т.е. всякой мере $\mu \in \mathcal{P}_r(X)$ можно сопоставить борелевское отображение $\xi_\mu: [0, 1] \rightarrow X$ так, что $\mu = \lambda \circ \xi_\mu^{-1}$ и выполнено условие (3.1). Аналогичным образом, X будет называться пространством с сильным свойством Скорохода для борелевских мер, если заключение теоремы 3.1 верно для всех

мер из $\mathcal{P}(X)$. Некоторые другие формы свойства Скорохода будут упомянуты в последнем пункте.

Лемма 3.1. Пусть X — пространство с сильным свойством Скорохода для радоновских мер. Тогда этим свойством обладает и всякое его подмножество Y . Если же Y универсально измеримо, то аналогичное утверждение верно и для сильного свойства Скорохода для борелевских мер на пространствах X и Y .

Доказательство. Если множество Y универсально измеримо, то оно измеримо относительно естественного борелевского продолжения каждой меры $\mu \in \mathcal{P}(Y)$ на X , причем $\mu(X \setminus Y) = 0$. Продолжение радоновской меры будет радоновским, причем в этом случае универсальной измеримости Y не требуется, поскольку в Y найдется σ -компактное множество полной меры. Пусть $\xi_\mu: [0, 1] \rightarrow X$ — борелевское отображение, соответствующее μ в определении сильного свойства Скорохода. Существует борелевское множество $B \subset Y$ полной μ -меры. Положим $\eta_\mu(t) = \xi_\mu(t)$ при $t \in \xi_\mu^{-1}(B)$ и $\eta_\mu(t) = z$ при $t \notin \xi_\mu^{-1}(B)$, где z — произвольная точка в Y . Тогда $\lambda(\xi_\mu^{-1}(B)) = 1$, и потому $\eta_\mu(t) = \xi_\mu(t)$ для почти всех t из $[0, 1]$, откуда $\lambda \circ \eta_\mu^{-1} = \lambda \circ \xi_\mu^{-1}$. Если вероятностные меры μ_n на Y слабо сходятся к мере μ , то их продолжения на X слабо сходятся к продолжению μ , откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\mu_n}(t) = \xi_\mu(t)$ почти всюду. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{\mu_n}(t) = \eta_\mu(t)$ почти всюду.

Лемма 3.2. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства X с сильным свойством Скорохода для радоновских мер на топологическое пространство Y такое, что соответствующее отображение $\hat{f}: \mathcal{P}_r(X) \rightarrow \mathcal{P}_r(Y)$ сюръективно и имеет непрерывное в слабой топологии правое обратное. Тогда Y обладает сильным свойством Скорохода для радоновских мер.

Доказательство. Пусть $\Psi: \mathcal{P}_r(Y) \rightarrow \mathcal{P}_r(X)$ — такое непрерывное в слабой топологии отображение, что $\hat{f} \circ \Psi$ — тождественное отображение на $\mathcal{P}_r(Y)$. Для $\nu \in \mathcal{P}_r(Y)$ положим $\eta_\nu(t) = f(\xi_{\Psi(\nu)}(t))$, где ξ — параметризация мер из $\mathcal{P}_r(X)$ борелевскими отображениями отрезка $[0, 1]$ в X . Тогда

$$\lambda \circ \eta_\nu^{-1} = (\lambda \circ \xi_{\Psi(\nu)}^{-1}) \circ f^{-1} = \Psi(\nu) \circ f^{-1} = \nu,$$

ибо $f \circ \Psi(y) = y$ для всех $y \in Y$. Если $\nu_n \Rightarrow \nu$ на Y , то $\Psi(\nu_n) \Rightarrow \Psi(\nu)$ на X и потому $\xi_{\Psi(\nu_n)}(t) \rightarrow \xi_{\Psi(\nu)}(t)$ для почти всех t из $[0, 1]$, откуда $\eta_{\nu_n}(t) \rightarrow \eta_\nu(t)$ для всех таких t ввиду непрерывности f . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. По лемме 3.1, следствию 2.3 и лемме 3.2 достаточно доказать, что интервал $[0, 1]$ обладает сильным свойством Скорохода (вместо следствия 2.3 можно использовать предложение 2.1). В этом случае в качестве ξ_μ возьмем отображение

$$\xi_\mu(t) = \inf\{x \in [0, 1]: \mu[0, x] \geq t\}, \quad (3.2)$$

для которого наше утверждение проверяется непосредственно (см. [23, гл. III, § 8]).

З а м е ч а н и е 3.1. Достаточно было бы доказать также, что сильным свойством Скорохода обладает гильбертов куб $Q = [0, 1]^N$, ибо по цитированной теореме Урысона всякое сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно подмножеству Q . Следовательно, достаточно иметь хотя бы один метрический компакт Z с сильным свойством Скорохода, который можно отобразить на Q с помощью открытого отображения. Поскольку из результатов Н. В. Крылова [6] можно вывести, что пространство $\mathbf{R}^d$ обладает сильным свойством Скорохода, то остается найти компакт в $\mathbf{R}^d$, который можно открыто отобразить на Q . Такие компакты действительно существуют [24]; более того, можно найти компакт $Z \subset \mathbf{R}^3$ с нужным свойством (см. [25, гл. 9, § 4] или [24]).

З а м е ч а н и е 3.2. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда отображение $h: \mu \mapsto \xi_\mu$ — топологическое вложение пространства $\mathcal{P}(X)$ со слабой топологией в метрическое пространство $L^0(\lambda, X)$ измеримых отображений $\psi: [0, 1] \rightarrow X$ с метрикой

$$d(\psi, \varphi) = \int_0^1 \frac{d_X(\psi(t), \varphi(t))}{d_X(\psi(t), \varphi(t)) + 1} dt,$$

где d_X — метрика в X . Метрика d соответствует топологии сходимости по мере, т.е. последовательность ψ_n сходится в этой топологии к ψ , если для всякого $\delta > 0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{t: d_X(\psi_n(t), \psi(t)) > \delta\}) = 0$. Ясно, что h есть непрерывное правое обратное для отображения $\psi \mapsto \lambda \circ \psi^{-1}$ из $L^0(\lambda, X)$ на $\mathcal{P}(X)$. Напомним, что в нетривиальных случаях сходимость почти всюду нельзя топологизировать, т.е. задать такую топологию, в которой сходящимися были бы последовательности, сходящиеся почти всюду, и только они. Для отсутствия топологизации достаточно иметь последовательность, сходящуюся по мере, но не сходящуюся ни в одной точке. Действительно, по теореме Рисса всякая подпоследовательность этой последовательности имеет подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к одному и тому же пределу, что при наличии топологии означало бы сходимость всей последовательности.

Предложение 3.1. Пусть X и Y — суслинские множества в полных сепарабельных метрических пространствах и $f: X \rightarrow Y$ — открытое сюръективное отображение. Тогда отображения

$$f_*: L^0(\lambda, X) \rightarrow L^0(\lambda, Y), \quad \varphi \mapsto f \circ \varphi, \quad \hat{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y),$$

сюръективны и открыты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V \subset L^0(\lambda, X)$ — открытое множество. Для доказательства открытости $f_*(V)$ достаточно показать, что всякая окрестность $f \circ \varphi$, где $\varphi \in V$, содержит окрестность $W \subset L^0(\lambda, X)$,

входящую в $f_*(V)$. Обозначим через d_Y метрику в Y и будем искать W в виде $U_Y(f \circ \varphi, \varepsilon)$, где

$$U_Y(\zeta, \delta) = \left\{ u \in L^0(\lambda, Y) : \lambda\left(t \in [0, 1] : d_Y(u(t), \zeta(t)) > \delta\right) < \delta \right\}.$$

Аналогичным образом определим окрестности $U_X(\varphi, \delta)$ в $L^0(\lambda, X)$. Выберем окрестность $U_X(\varphi, \delta) \subset V$. По теореме Лузина существует компакт $K \subset [0, 1]$ с $\lambda(K) > 1 - \delta/4$, на котором отображение φ непрерывно. Отметим, что справедливость теоремы Лузина для измеримых отображений со значениями в X и Y вытекает из теоремы Лузина для отображений со значениями в компактных метрических пространствах, ибо для всякого $c > 0$ найдется такое компактное множество $B \subset X$, что $\lambda \circ \varphi^{-1}(X \setminus B) < c$. Выберем в K непересекающиеся компактные части $K_1, \dots, K_n$ так, что $\lambda(K \setminus \bigcup_{j=1}^n K_j) < \delta/4$ и колебание φ на каждой из частей K_i не превосходит $\delta/4$, т.е. $d_X(\varphi(t), \varphi(s)) \leq \delta/4$ для всех $t, s \in Z_i$. Компакты $\varphi(K_i)$ обладают $\delta/4$ -окрестностями V_i . В силу открытости f множества $f(V_i)$ открыты. Найдется такое положительное $\varepsilon < \delta/(4n)$, что при каждом $i = 1, \dots, n$ открытая ε -окрестность компакта $f(\varphi(K_i))$ содержится в $f(V_i)$. Пусть $u \in U_Y(f \circ \varphi, \varepsilon)$. Пользуясь теоремой Лузина и определением $U_Y(f \circ \varphi, \varepsilon)$, в каждом компакте K_i выберем компактную часть Z_i так, что $\lambda(K_i \setminus Z_i) \leq \varepsilon$, $d_Y(u(t), f \circ \varphi(t)) \leq \varepsilon$ на $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ и u непрерывно на Z_i . Обозначим через ν меру $\lambda \circ u^{-1}$. По теореме об измеримом выборе существуют такие борелевские отображения $g_i: f(V_i) \rightarrow V_i$, что $f(g_i(y)) = y$ для ν -почти всех $y \in f(V_i)$ (см., например, [11, теорема 13, гл. II, § 3, с. 127] или [15, дополнение 3]). Это означает, что $f(g_i(u(t))) = u(t)$ для почти всех $t \in Z_i$, ибо $u(t) \in f(V_i)$ при $t \in Z_i$ в силу нашего выбора ε и оценки $d_Y(u(t), f \circ \varphi(t)) < \varepsilon$ при $t \in Z_i$. Зададим отображение $\psi: [0, 1] \rightarrow Y$ так: при $t \in Z_i$ положим $\psi(t) = g_i(u(t))$, а вне $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ положим $\psi(t) = g(u(t))$, где $g: Y \rightarrow X$ — такое борелевское отображение, что $f(g(y)) = y$ для ν -почти всех y (это отображение существует по теореме об измеримом выборе). Тогда по определению меры ν получаем $f(\psi(t)) = u(t)$ для почти всех t из $[0, 1]$. Кроме того, $d_X(\psi(t), \varphi(t)) \leq \delta/2$ при $t \in Z_i$ в силу выбора множеств Z_i и включения $\psi(t)$ в $\delta/4$ -окрестность множества $\varphi(Z_i)$. Значит, $\psi \in U_X(\varphi, \delta)$, ибо $\lambda(\bigcup_{j=1}^n (K_j \setminus Z_j)) \leq \delta/4$ и потому $\lambda(\bigcup_{j=1}^n Z_j) > 1 - \delta$. Сюръективность f_* очевидна из доказательства, ибо для всякого $u \in L^0(\lambda, Y)$ с $\lambda \circ u^{-1} = \nu$ имеем $u = f \circ g$ почти всюду, где $g: Y \rightarrow X$ — упомянутое выше борелевское отображение с $f(g(y)) = y$ ν -п.в.

Приведем теперь новое доказательство сюръективности и открытости $\hat{f}$. Пусть

$$h_1: \mathcal{P}(X) \rightarrow L^0(\lambda, X) \quad \text{и} \quad h_2: \mathcal{P}(Y) \rightarrow L^0(\lambda, Y)$$

— топологические вложения, упомянутые в замечании 3.2. Тогда отображение $\hat{f} = h_2^{-1} \circ f_* \circ h_1$ сюръективно. Из рассуждений выше выте-

кает и его открытость. Действительно, для меры μ вида $\mu = \lambda \circ \varphi^{-1}$ множества $W(\mu, \delta) = \{\lambda \circ \zeta^{-1} : \zeta \in U_x(\varphi, \delta)\}$ образуют базис окрестностей μ в слабой топологии, а множество $\hat{f}(W(\mu, \delta))$ содержит окрестность $\{\lambda \circ v^{-1} : v \in U_Y(f \circ \varphi, \varepsilon)\}$, входящую, как показано выше, в $\hat{f}(W(\mu, \delta))$. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 3.3. Если X и Y — полные пространства, то отображение f_* в предыдущем предложении обладает непрерывным правым обратным g_* . Достаточно положить $g_* = \xi \circ g \circ i_Y$, где $\xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow L^0(\lambda, X)$ — отображение из теоремы 3.1, g — непрерывное правое обратное для $\hat{f}$ и $i_Y: L^0(\lambda, Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, $i_Y(\psi) = \lambda \circ \psi^{-1}$. Это можно извлечь также из теоремы Майкла.

Лемма 3.3. Пусть S — дискретное пространство, т.е. каждая точка в S открыта. Тогда S обладает сильным свойством Скорохода для радоновских мер.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что S вполне упорядочено. Произвольная радоновская мера μ на S сосредоточена на некотором счетном множестве $\{\omega_i\}$. В качестве вероятностного пространства возьмем отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега λ . Представим его в виде объединения непересекающихся полуинтервалов $[a_i, b_i)$ и точки 1 так, чтобы выполнялись следующие свойства: $b_i - a_i = \mu(\omega_i)$ и если $\omega_{i_1} < \omega_{i_2}$, то $b_{i_1} \leq a_{i_2}$. Положим $\xi_\mu(x) = \omega_i$, если $x \in [a_i, b_i)$. В силу того, что любая последовательность радоновских мер на S сосредоточена на не более чем счетном числе точек и слабая сходимост $\mu_n \Rightarrow \mu$ влечет, что $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ для всякого $A \subset S$, легко видеть, что ξ_μ — искомое представление. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Бэровское пространство $B(\tau) = \prod_{i=1}^\infty X_i$, где X_i — копия дискретного пространства S мощности τ , обладает сильным свойством Скорохода для радоновских мер.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \in \mathcal{P}_\tau(B(\tau))$ и $P_n: B(\tau) \rightarrow X_n$ — проекция на n -й сомножитель. По лемме 3.3 строим параметризацию Скорохода $\xi^\mu = \xi_{\mu \circ P_1^{-1}}: [0, 1] \rightarrow X_1$ для проекции меры на первый сомножитель. В силу радоновости $\mu \circ P_1^{-1}$ соотношение $\mu \circ P_1^{-1}(\omega_{i_1}) \neq 0$ имеет место для не более чем счетного числа точек $\omega_{i_1} \in X_1$, $i_1 = 1, 2, \dots$. Для каждого ω_{i_1} положим

$$B_{i_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \in B(\tau) : x_1 = \omega_{i_1}\}.$$

Через μ_{i_1} обозначим условную меру $\mu|_{B_{i_1}}/\mu \circ P_1^{-1}(\omega_{i_1})$. Во всех остальных точках в качестве условной меры μ_ω можно взять любую заранее фиксированную радоновскую вероятностную меру. Для каждого борелевского $A \subset B(\tau)$ имеем

$$\mu(A) = \int \mu_{i_1}(A \cap B_{i_1}) \mu \circ P_1^{-1}(dx_1).$$

Если теперь $\mu^n \Rightarrow \mu$, то $\mu^n \circ P_1^{-1}(\omega_{i_1}) \neq 0$ для всех достаточно больших n . В силу того, что B_{i_1} открыто-замкнуто, получаем, что последовательность $\mu_{i_1}^n$ сходится слабо к μ_{i_1} .

Заметим, что каждое B_{i_1} гомеоморфно $B(\tau)$. Теперь ту же процедуру применяем к каждому из пространств B_{i_1} , проектируя на этот раз на X_2 . Для каждой меры μ_{i_1} рассмотрим ее проекцию $\mu_{i_1} \circ P_2^{-1}$ на X_2 . Обозначим через $\xi_{i_1}^\mu$ представление Скорохода для этой меры, построенное по лемме 3.3. Для тех точек ω_{i_2} , где $\mu_{i_1} \circ P_2^{-1}(\omega_{i_2}) \neq 0$, строим открыто-замкнутые множества

$$B_{i_1, i_2} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) : x_1 = \omega_{i_1}, x_2 = \omega_{i_2} \right\}$$

и условные меры

$$\mu_{i_1, i_2} = \mu_{i_1} |_{B_{i_1, i_2}} / \mu_{i_1} \circ P_2^{-1}(\omega_{i_2}).$$

Слабая сходимость μ^n к μ влечет сходимость почти всюду $\xi_{i_1}^{\mu^n}$ к $\xi_{i_1}^\mu$ и слабую сходимость μ_{i_1, i_2}^n к μ_{i_1, i_2} .

Продолжая этот процесс счетное число раз, получаем последовательность индексов $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$, каждый из которых принимает не более чем счетное число значений, меры $\mu_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ на множествах $B_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ и борелевские отображения

$$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\mu : [0, 1] \longrightarrow X_{k+1},$$

для которых $\lambda \circ (\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\mu)^{-1} = \mu_{i_1, i_2, \dots, i_k} \circ P_{k+1}^{-1}$. Слабая сходимость μ^n к μ влечет сходимость почти всюду $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{\mu^n}$ к $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\mu$ и слабую сходимость $\mu_{i_1, i_2, \dots, i_k}^n$ к $\mu_{i_1, i_2, \dots, i_k}$. При этом для любого борелевского множества B верно равенство

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{X_1} \mu \circ P_1^{-1}(dx_1) \int_{X_2} \mu_{i_1} \circ P_2^{-1}(dx_2) \\ &\quad \cdots \int_{X_n} \mu_{i_1, \dots, i_n}(B \cap B_{i_1, \dots, i_n}) \mu_{i_1, \dots, i_{n-1}} \circ P_n^{-1}(dx_n), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Зададим теперь отображение $\eta^\mu : [0, 1]^\infty \rightarrow B(\tau)$ формулой

$$\eta^\mu(t_1, t_2, \dots, t_n, \dots) = (\xi^\mu(t_1), \xi_{i_1}^\mu(t_2), \dots, \xi_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}^\mu(t_n), \dots),$$

причем каждый индекс i_n зависит от $t_1, \dots, t_n$ следующим образом:

$$\xi^\mu(t_1) = \omega_{i_1}, \dots, \xi_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}^\mu(t_n) = \omega_{i_n}, \dots$$

Очевидно, что отображение η^μ — борелевское. Докажем, что счетное произведение мер Лебега $P = \bigotimes_{n=1}^\infty \lambda$ переходит при этом отображении в μ . Это достаточно проверить для множеств вида $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$, для которых формула (3.3) имеет вид

$$\mu(B) = \int_{B_1} \mu \circ P_1^{-1}(dx_1) \int_{B_2} \mu_{i_1} \circ P_2^{-1}(dx_2) \cdots \int_{B_n} \mu_{i_1, \dots, i_{n-1}} \circ P_n^{-1}(dx_n). \quad (3.4)$$

Действительно,

$$P((\eta^\mu)^{-1}(B)) = \int_{(\xi^\mu)^{-1}(B_1)} \lambda(dt_1) \int_{(\xi_{i_1}^\mu)^{-1}(B_2)} \lambda(dt_2) \dots \int_{(\xi_{i_1, \dots, i_{n-1}}^\mu)^{-1}(B_n)} \lambda(dt_n). \quad (3.5)$$

Сравнивая формулы (3.4) и (3.5), получаем необходимое равенство $P((\eta^\mu)^{-1}(B)) = \mu(B)$. Полученное семейство отображений η^μ есть сильное представление Скорохода. Это легко следует из замечаний выше о свойствах отображений $\xi_{i_1, \dots, i_n}^\mu$. Заметим, что в качестве вероятностного пространства можно также взять единичный отрезок с мерой Лебега. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Всякое полное метрическое пространство Y обладает сильным свойством Скорохода для радоновских мер.*

Доказательство. Согласно [20, гл. 6, задача 150], для некоторой мощности τ существует открытая сюръекция $f: B(\tau) \rightarrow Y$. Отображение $\hat{f}: \mathcal{P}_\tau(B(\tau)) \rightarrow \mathcal{P}_\tau(Y)$ открыто по следствию 2.2. Теперь утверждение следует из леммы 3.4 и леммы 3.2, так как $\hat{f}$ имеет непрерывное правое обратное по теореме Майкла, которая применима, поскольку пространство $\mathcal{P}_\tau(M)$ со слабой топологией полно и метризуемо для каждого полного метрического пространства M .

Следствие 3.1. *Всякое метрическое пространство обладает сильным свойством Скорохода для радоновских мер.*

Доказательство. Вытекает из леммы 3.1 и предыдущей теоремы.

4. Дополнительные замечания. Напомним, что топологическое пространство X называется пространством Прохорова, если всякое компактное в слабой топологии множество вероятностных мер M на X равномерно плотно, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset X$, что $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$. Если же равномерно плотной является всякая слабо сходящаяся последовательность вероятностных мер на X , то X называется секвенциально прохоровским (см. [9] по поводу различных вариантов свойства Прохорова). Согласно теореме Ю. В. Прохорова [26], всякое полное сепарабельное метрическое пространство обладает свойством Прохорова. Отметим, что из теоремы Скорохода вытекает, что такое пространство X является секвенциально прохоровским. Действительно, если отображения $\xi_n: [0, 1] \rightarrow X$ сходятся почти всюду к отображению ξ , то по теоремам Егорова и Лузина для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset [0, 1]$, что все отображения ξ_n непрерывны на этом компакте и сходятся равномерно. Из этого легко усмотреть равномерную плотность мер $\lambda \circ \xi_n^{-1}$. С другой

стороны, не всякое борелевское подмножество отрезка имеет свойство Прохорова. Например, как показано Д. Прайсом [27], пространство рациональных чисел отрезка с естественной топологией не является прохоровским. Таким образом, для универсально измеримых подмножеств полных сепарабельных метрических пространств сильное свойство Скорохода является более слабым, чем свойство Прохорова, хотя из него можно вывести последнее для полных пространств. Если X — неметризуемое лузинское пространство (т.е. непрерывный взаимно однозначный образ польского пространства), то оно может не обладать сильным свойством Скорохода. В качестве примера укажем пространство l^2 со слабой топологией. В этом примере, однако, пространство не является и секвенциально прохоровским (см. доказательство в работе [28], рассуждения в которой показывают и отсутствие сильного свойства Скорохода; см. также [29] и пример лузинского пространства без сильного свойства Скорохода в [30]); прохоровское пространство с аналогичными свойствами построено ниже в примере 4.1.

Произведение континуума отрезков сильным свойством Скорохода для радоновских мер не обладает, ибо l^2 со слабой топологией можно вложить в это произведение.

Определение сильного свойства Скорохода можно расширить, заменив в нем отрезок с мерой Лебега классом всех вероятностных пространств (тогда такое свойство можно называть сильным свойством Скорохода в широком смысле). Указанное расширение целесообразно для тех топологических пространств, на которых не всякая вероятностная мера является образом меры Лебега. Еще одна разновидность свойства Скорохода получается, если параметризовать все бэровские вероятностные меры, а не только радоновские (либо борелевские меры с топологией, заданной (1.1)). По аналогии с секвенциальным свойством Прохорова и в духе исходной теоремы Скорохода можно рассмотреть также секвенциальное свойство Скорохода (для радоновских или борелевских мер), т.е. возможность параметризовать отображениями слабо сходящиеся последовательности вероятностных мер. Например, в [31] показано, что всякое неполное сепарабельное метрическое пространство X обладает секвенциальным свойством Скорохода в широком смысле для борелевских мер, т.е. для каждой слабо сходящейся последовательности борелевских вероятностных мер на X имеется почти всюду сходящаяся последовательность отображений из некоторого вероятностного пространства, индуцирующих эти меры (см. [29] по поводу связанных с этим дополнительных ссылок). А. Шиф ([30]) построил пример пространства без сильного свойства Скорохода в широком смысле для борелевских мер, обладающего упомянутым выше секвенциальным свойством Скорохода в широком смысле для борелевских мер. Наконец, можно рассматривать параметризацию Скорохода лишь для равномерно плот-

ных или слабо компактных семейств мер. Было бы интересно выяснить, какие нетривиальные связи имеются между свойствами, получаемыми упомянутыми способами. Ряд результатов в этом направлении получен недавно в [29]. Кроме того, представляет интерес рассмотрение неметризуемых пространств с сильным свойством Скорохода и операций над ними (например, произведений, проективных и индуктивных пределов и т.п.). В [29] было доказано, что если хаусдорфово пространство можно непрерывно и инъективно вложить в $\mathbf{R}^N$, то для любой равномерно плотной последовательности радоновских вероятностных мер μ_n на X можно найти такие борелевские отображения $\xi_n: [0, 1] \rightarrow X$ с распределениями μ_n , что существует подпоследовательность $\xi_{n_i}: [0, 1] \rightarrow X$, сходящаяся почти всюду (т.е. имеется представление Скорохода для подпоследовательностей). Мы дадим пример, показывающий, что даже в случае прохоровских лузинских пространств может не быть представления для всей последовательности $\{\mu_n\}$.

Напомним, что локально выпуклое пространство $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ называется строгим индуктивным пределом строго возрастающей последовательности локально выпуклых пространств X_n , являющихся линейными подпространствами в X , если выпуклые окрестности нуля в X есть в точности выпуклые множества, дающие в пересечении с каждым X_n открытое в X_n множество (см. [33, гл. VII]).

Пример 4.1. Пусть $X = \mathbf{R}_0^{\infty} = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\}$ — строгий индуктивный предел пространств $\mathbf{R}^n$. Тогда X — прохоровское суслинское пространство, в котором существует слабо сходящаяся последовательность вероятностных мер, не имеющая представления Скорохода.

Доказательство. Пусть J — отрезок с концами a и b , лежащий в $\mathbf{R}^n$ для некоторого n , но не лежащий в $\mathbf{R}^{n-1}$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ определим отображение $F(J, \varepsilon)$ из J в $\mathbf{R}^{n+1}$ следующим образом: точка $(a+b)/2$ переходит в точку $(a+b)/2 + \varepsilon e_{n+1}$, где $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $F(J, \varepsilon)(a) = a$, $F(J, \varepsilon)(b) = b$, а на отрезках $[a, (a+b)/2]$ и $[(a+b)/2, b]$ определим $F(J, \varepsilon)$ по линейности. Преобразование определяется тем, что середина отрезка поднимается на ε в пространство следующей размерности. Образ отрезка J при этом преобразовании обозначим через $T(J, \varepsilon)$. Пусть отрезок $I = [0, 1]$ наделен мерой Лебега μ . Мы построим последовательность ломаных $I_m \subset \mathbf{R}^{d_m} \subset X$, каждая из которых состоит из 2^{k_m} отрезков, причем вероятностная мера μ_m на I_m устроена так: на каждом из составляющих I_m отрезков она совпадает с обычной линейной мерой, нормированной так, что мера этого отрезка равна 2^{-k_m} . Ломаные строятся индуктивно; на каждом шаге количество ломаных увеличивается, причем вершины некоторых из них попадают во все большие $\mathbf{R}^n$, а номер шага на 1 меньше максимальной достигнутой размерности. При этом в некотором смысле построенные ломаные приближаются к отрезку I . На первом шаге по-

ложим $I_1 = T([0, 1], 2^{-1})$. На втором шаге строим двумерную ломаную $T([0, 1], 2^{-2})$, состоящую из двух отрезков I_2^1 и I_2^2 , а также две трехмерные ломаные $T(I_2^1, 2^{-2}) \cup I_2^2$ и $I_2^1 \cup T(I_2^2, 2^{-2})$, получаемые изгибанием первого отрезка при неподвижном втором и аналогичным преобразованием второго отрезка при неподвижном первом. На следующем шаге строим двумерную ломаную с $\varepsilon = 2^{-3}$, из которой получаются трехмерные поочередным изгибанием ее половинок (с $\varepsilon = 2^{-3}$), а из трехмерных получаем четырехмерные поочередным применением преобразования J (с $\varepsilon = 2^{-3}$) к звеньям трехмерных ломаных. Шаг с номером n начинается с построения плоской ломаной $I_{n,1} := T([0, 1], 2^{-n})$, из которой поэтапно строятся трехмерные и т.д. как описано выше. В частности, если на k -м этапе этого шага построены $(k+1)$ -мерные ломаные $I_{n,k,1}, \dots, I_{n,k,n_k}$ и $k+1 < n+1$, то на $(k+1)$ -м этапе из каждой ломаной $I_{n,k,j}$ получаем $(k+2)$ -мерные ломаные $I_{n,k+1,i}$ следующим образом: один из отрезков J' , составляющих $I_{n,k,j}$, преобразуется посредством $F(J', 2^{-n})$, а остальные остаются на месте, причем это делается с каждым таким J' . Меры на построенных ломаных задаются указанным выше способом. Затем полученные меры нумеруем в естественном порядке и получаем последовательность $\{\mu_m\}$. Последовательность $\{\mu_m\}$ слабо сходится к μ . Действительно, достаточно доказать, что $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mu_m(U) \geq \mu(U)$ для каждого открытого множества U . Пусть P^n — проекция на $\mathbf{R}^n$. Легко проверить, что тогда $\mu_m \circ (P^n)^{-1} \Rightarrow \mu$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mu_m \circ (P^n)^{-1}(U) \geq \mu(U)$. Однако $|\mu_m(U) - \mu_m \circ (P^n)^{-1}(U)| \leq 2^{-n}$. Отсюда и вытекает нужное неравенство.

Предположим теперь, что существует какая-нибудь параметризация Скорохода $\{\xi_{\mu_m}\}$ для $\{\mu_m\}$. Для каждого n рассмотрим множество $A_n := \{\omega: \xi_{\mu_m}(\omega) \in \mathbf{R}^n, \forall m \in \mathbf{N}\}$. Поскольку $\{\xi_{\mu_m}\}$ сходится п.в., а всякая сходящаяся последовательность в строгом индуктивном пределе $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ содержится в одном из X_n (см. [33, гл. VII, предложение 4]), то $P(\bigcup_n A_n) = 1$. Возьмем такое N , что $P(A_N) > 0$. Случайные величины ξ_{μ_m} на A_N , получим последовательность мер $\tau_m = P|_{A_N} \circ \xi_{\mu_m}^{-1}$ со следующими свойствами: $\mu_m - \tau_m \geq 0$, меры τ_m сосредоточены на $\mathbf{R}^N$ и слабо сходятся в $\mathbf{R}^N$. Но, как нетрудно видеть, предел τ таких мер может быть равен только нулю, что противоречит тому, что $P(A_N) > 0$. Действительно, пространство $\mathbf{R}^N$ представим в виде объединения $\mathbf{R}^N = \bigcup_{i=1}^{2^N} B_i \cup B$ множеств

$$B_i = \left\{ x_1 \in \left[\frac{i-1}{2^N}, \frac{i}{2^N} \right] \right\}, \quad B = \mathbf{R}^N \setminus \bigcup_{i=1}^{2^N} B_i.$$

Поскольку $\tau \leq \mu$, то $\tau(\partial B_i) = 0$ и $\tau(B) = 0$. Поэтому $\tau(B_i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(B_i)$. Остается заметить, что существует бесконечно много индексов m_i , для которых $\tau_{m_i}(B_i) = 0$. Это можно усмотреть из постро-

ения наших ломаных. Например, если $N = 2$, то на каждом шаге $n > 1$ есть этап (с $k = 2$), на котором строится ломаная, не пересекающая $(\frac{1}{2}, 1)$. Для соответствующей случайной величины ξ_{m_i} это означает, что $P(A_2 \cap \{\xi_{m_i} \in (\frac{1}{2}, 1)\}) = 0$. При $N > 2$ на шагах с номерами больше $N - 1$ ситуация аналогична. Тот факт, что X — прохоровское пространство, легко проверяется (см., например, пример 8.3.10 в [9]).

Будем говорить, что топологическое пространство X обладает слабым свойством Скорохода, если найдется такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, что для всякой радоновской вероятностной меры μ на X существует μ -измеримое отображение $\xi_\mu: \Omega \rightarrow X$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $P \circ \xi_\mu^{-1} = \mu$, причем из последовательности $\{\xi_{\mu_n}\}$, где μ_n — плотная последовательность мер на X , можно извлечь почти всюду сходящуюся подпоследовательность. При этом, в отличие от [29], требуется одновременная параметризация всех мер, а не только мер из всякой фиксированной равномерно плотной последовательности. Последнее свойство, введенное в [29], можно назвать слабым секвенциальным свойством Скорохода; согласно [29], таким секвенциальным свойством обладает всякое пространство, на котором есть счетное множество непрерывных функций, разделяющих точки.

Идея следующей леммы восходит к работе [29].

Лемма 4.1. (i) Пусть X — топологическое пространство, обладающее непрерывной инъекцией в $\mathbf{R}^N$, и пусть $\Phi: X \rightarrow Y$ — такое борелевское отображение со значениями в метризуемом суслинском пространстве Y , что множества $\Phi(A)$ и $\Phi^{-1}(B)$ имеют компактные замыкания для всех компактных множеств A и B . Тогда X обладает слабым свойством Скорохода.

(ii) Пусть f — такая непрерывная сюръекция пространства X со слабым свойством Скорохода на пространство Y , что прообразы компактных множеств компактны. Тогда Y обладает слабым свойством Скорохода.

Доказательство. (i) Пусть $F: X \rightarrow \mathbf{R}^N$ — инъективное непрерывное вложение. Положим

$$\Gamma: X \rightarrow \mathbf{R}^N \times Y, \quad \Gamma(x) = (F(x), \Phi(x)).$$

Рассмотрим представление Скорохода (ξ_μ, η_μ) в $\mathbf{R}^N \times Y$ для мер вида $\mu \circ \Gamma^{-1}$, где μ — радоновская вероятностная мера на X . Ясно, что в этом случае можно взять единичный отрезок с мерой Лебега в качестве вероятностного пространства (Ω, P) . Мы увидим, что отображение $\mu \mapsto \zeta_\mu := F^{-1} \circ \xi_\mu$ является искомым представлением на X . Так как мера μ сосредоточена на счетном объединении компактных множеств в X , множество $F(X)$ является $\mu \circ F^{-1}$ -измеримым, а отображение F^{-1} на $F(X)$ измеримо относительно μ (действительно, компактные множес-

тва в X метризуемы согласно условиям леммы, следовательно, радоновские меры на X сконцентрированы на суслинских множествах). Образ P относительно отображения ξ_μ совпадает с $\mu \circ F^{-1}$, следовательно, $P \circ \zeta_\mu^{-1} = \mu$. Заметим, что

$$\eta_\mu = \Phi \circ F^{-1}(\xi_\mu) \quad \text{п.в.} \quad (4.1)$$

Действительно, применим отображение

$$T: (x, y) \mapsto (\Phi \circ F^{-1}(x), y), \quad (F(X), Y) \rightarrow (Y, Y),$$

к случайной величине (ξ_μ, η_μ) . Образ меры Лебега относительно отображения $T \circ (\xi_\mu, \eta_\mu)$ совпадает с мерой $\mu \circ \Gamma^{-1} \circ T^{-1}$, которая есть образ μ при отображении $G: x \mapsto (\Phi(x), \Phi(x))$, $X \rightarrow Y \times Y$. Действительно, мера $\mu \circ G^{-1}$ сосредоточена на диагонали $\Delta = \{(y, y): y \in Y\}$. Следовательно, $T(\xi_\mu(t), \eta_\mu(t)) \in \Delta$ для почти всех $t \in [0, 1]$, что влечет (4.1). Из свойств Φ получаем, что если $\{\mu_n\}$ — равномерно плотная последовательность радоновских вероятностных мер на X , то последовательность $\{\mu_n \circ \Gamma^{-1}\}$ тоже равномерно плотна. Поэтому можно извлечь подпоследовательность $(\xi_{n_i}, \Phi \circ F^{-1}(\xi_{n_i}))$, сходящуюся почти всюду в $\mathbb{R}^N \times Y$. Тогда для почти всех ω последовательность $\Phi \circ F^{-1}(\xi_{n_i})(\omega)$ — сходящаяся, а значит, по свойствам Φ , последовательность $F^{-1}(\xi_{n_i})$ принадлежит некоторому компакту $K(\omega)$ пространства X , а так как она еще и сходится в $\mathbb{R}^N$, то она сходится и в X , ибо топологии X и $\mathbb{R}^N$ совпадают на $K(\omega)$.

(ii) Пусть $\mu \mapsto \xi_\mu$ — параметризация радоновских вероятностных мер на X , требуемая в определении слабого свойства Скорохода. Из условий, наложенных на f , следует (см. [9, теорема 6.1.8]), что для любой радоновской вероятностной меры ν на Y существует такая радоновская вероятностная мера μ_ν на X , что $\mu_\nu \circ f^{-1} = \nu$. Положим $\eta_\nu = f \circ \xi_{\mu_\nu}$. Если последовательность радоновских вероятностных мер ν_n на Y равномерно плотна, то последовательность μ_{ν_n} также равномерно плотна. Действительно, если K — компакт в Y , то $f^{-1}(K)$ — компакт в X и $\mu_{\nu_n}(f^{-1}(K)) = \nu_n(K)$. Это означает, что $\{\eta_{\nu_n}\}$ имеет сходящуюся почти всюду подпоследовательность. Лемма доказана.

Рассмотрим примеры пространств со слабым свойством Скорохода. Число примеров можно умножить, используя тот факт, что каждое подмножество пространства со слабым свойством Скорохода обладает тем же свойством.

Пример 4.2. Пусть $X = \prod_{m=1}^{\infty} X^m$, где каждое пространство X^m обладает непрерывным вложением в $\mathbb{R}^N$ и имеет фундаментальную последовательность $\{K_n^m\}$ компактных множеств (т.е. каждое компактное множество из X^m содержится в одном из K_n^m). Тогда X обладает слабым свойством Скорохода.

Доказательство. Пусть K_n^m таково, что $K_n^m \subset K_{n+1}^m$, и пусть

$$\Phi: X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad (\Phi(x))^m = \{\min n: x^m \in K_n^m\}.$$

Остается применить лемму 4.1.

Заметим, что пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ обладает фундаментальной последовательностью компактных множеств; то же верно для всех сепарабельных рефлексивных банаховых пространств со слабой топологией и сопряженных к сепарабельным банаховым пространствам со $*$ -слабой топологией. Пример 4.2 охватывает также пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (которое гомеоморфно замкнутому подпространству счетного произведения пространств, имеющих фундаментальную последовательность компактных множеств).

Пример 4.3. Пусть локально выпуклое пространство X есть строгий индуктивный предел возрастающей последовательности своих замкнутых метризуемых суслинских линейных подпространств X_j . Тогда X обладает слабым свойством Скорохода. То же верно для счетного произведения таких пространств.

Доказательство. В [9, пример 8.1.14] показано, что если последовательность вероятностных мер μ_n на X слабо сходится к мере μ , то для любого ε найдется такое j , что $\mu_n(X_j) > 1 - \varepsilon$ для всех n . Пусть ϱ_α — семейство полунорм, задающих топологию в X . Поскольку X_j метризуемо, то можно найти счетное семейство полунорм ϱ_m^j , $m = 1, 2, \dots$, сужение которых на X_j задает топологию X_j . Зададим теперь топологию τ на X семейством полунорм ϱ_m^j , $j = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Это — локально выпуклая метризуемая топология. Пусть $F: X \rightarrow (X, \tau)$ — тождественное отображение, $\Phi(x) = \{\min j: x \in X_j\}$. Применяя те же рассуждения, что и в лемме 4.1 (которая напрямую неприменима), и учитывая, что σ и τ совпадают на всех X_j , получаем доказательство первого утверждения. Доказательство второго утверждения аналогично.

Отметим, что пример 4.3 охватывает пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ гладких функций с компактными носителями на $\mathbb{R}^d$ (с естественной топологией индуктивного предела пространств $C_0^\infty(U_n)$, где U_n — открытый шар радиуса n с центром в нуле).

Заметим также, что, используя идеи примеров 4.2 и 4.3, можно показать, что слабым свойством Скорохода обладает банахово пространство со слабой топологией, если его сопряженное сепарабельно. Обсуждение некоторых приложений представления Скорохода см. в [32].

Сделаем несколько замечаний о свойствах отображений ξ_μ , которыми можно параметризовать меры на польском пространстве X . Отображения, построенные Н. В. Крыловым [6] в случае $\mathbb{R}^d$ и заданные также на подмножествах $\mathbb{R}^d$ (а не на отрезке, как у нас), почти всюду дифференцируемы. Ясно, что не всегда эти отображения можно сде-

вать непрерывными. Как показано в [35], вероятностная мера μ на X является образом меры Лебега на $[0, 1]$ при непрерывном отображении в точности тогда, когда топологический носитель μ (наименьшее замкнутое множество полной меры) является связным и локально связным компактом. Отображения, задаваемые формулой (3.2), монотонны. Значит, отображения ξ_μ , построенные в доказательстве теоремы о представлении, принадлежат пространству Скорохода $D(X)$, состоящему из отображений $[0, 1]$ в X , непрерывных справа и имеющих левосторонние пределы во всех точках $(0, 1]$. Если X — полное сепарабельное метрическое пространство, то $D(X)$ наделяется некоторой естественной полной сепарабельной метрикой d_0 (см. [7], [34]). Однако даже в случае, когда $X = [0, 1]$, не существует параметризации вероятностных мер на $[0, 1]$ отображениями класса $D([0, 1])$, для которой слабая сходимост мер влечет сходимост соответствующих отображений в топологии Скорохода (см. [7]). Пусть, например, последовательность мер μ_n на $[0, 1]$ такова: $\mu_n(\{0\}) = 1/n$, $\mu_n(\{1\}) = 1 - 1/n$. Эта последовательность сходится слабо (даже по вариации) к дираковской мере в точке 1, но расстояние в метрике d_0 между любыми отображениями из $D([0, 1])$, индуцирующими эти меры, равно 1.

Авторы признательны Т. О. Банаху, Н. В. Крылову, В. И. Пономареву, М. Рёкнеру и В. В. Федорчуку за полезные обсуждения. Мы благодарим математический факультет университета Билефельда и SFB 343, где работа была завершена, за поддержку и гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ditor S., Eifler L. Some open mapping theorems for measures. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, v. 164, p. 287–293.
2. Банах Т. О. Топология пространств вероятностных мер. — Mat. Stud. Pr. L'viv Mat. Tov., 1995, т. 5, с. 65–87.
3. Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319.
4. Blackwell D., Dubins L. E. An extension of Skorohod's almost sure representation theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1983, v. 89, № 4, p. 691–692.
5. Fernique X. Un modèle presque sûr pour la convergence en loi. — C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1988, v. 306, p. 335–338.
6. Krylov N. V. On SPDE's and superdiffusions. — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 4, p. 1789–1809.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
8. Вазаниа Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобания С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1984, 368 с.
9. Bogachev V. I. Measures on topological spaces. — J. Math. Sci., 1998, v. 91, № 4, p. 3033–3156.
10. Topsøe F. Topology and measure. — Lecture Notes in Math., 1970, v. 133, p. 1–79.
11. Schwartz L. Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures. London: Oxford Univ. Press, 1973, 393 p.

12. *Michael E.* A selection theorem. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1966, v. 17, p. 1404–1406.
13. *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций. М.: Мир, 1970.
14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
15. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. М.: Наука, 1975, 338 с.
16. *Ершов М. П.* Продолжения мер и стохастические уравнения. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1974, т. 19, в. 3, с. 457–471.
17. *Lembcke J.* On simultaneous preimage measures on Hausdorff spaces. — *Lecture Notes in Math.*, 1982, v. 945, p. 110–115.
18. *Sion M.* On uniformization of sets in topological spaces. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1960, v. 96, p. 237–245.
19. *Банаш Т. О., Радул Т. Н.* Геометрия отображений пространств вероятностных мер. — *Mat. Stud. Pr. L'viv Mat. Tov.*, 1999, т. 11, № 1, с. 17–30.
20. *Арзангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
21. *Ershov M. P.* The Choquet theorem and stochastic equations. — *Anal. Math.*, 1975, v. 1, № 4, p. 259–271.
22. *Michael E.* A linear mapping between function spaces. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1964, v. 15, p. 407–409.
23. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
24. *Anderson R. D.* Monotone interior dimension-raising mappings. — *Duke Math. J.*, 1952, v. 19, p. 359–366.
25. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
26. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
27. *Preiss D.* Metric spaces in which Prohorov's theorem is not valid. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1973, B. 27, S. 109–116.
28. *Fernique X.* Processus linéaires, processus généralisés. — *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1967, v. 17, p. 1–92.
29. *Jakubowski A.* The almost sure Skorokhod representation for subsequences in non-metric spaces. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, т. 42, в. 1, с. 209–217.
30. *Schief A.* Almost surely convergent random variables with given laws. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1989, v. 81, p. 559–567.
31. *Dudley R. M.* Distances of probability measures and random variables. — *Ann. Math. Statist.*, 1967, v. 39, p. 1563–1572.
32. *Cuesta-Albertos J. A., Matrán-Bea C.* Stochastic convergence through Skorokhod representation theorems and Wasserstein distances. — *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 1994, v. 35, p. 89–113.
33. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
34. *Jakubowski A.* On the Skorokhod topology. — *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 1986, v. 22, № 3, p. 263–285.
35. *Колесников А. В.* О непрерывных образах меры Лебега. — *Матем. заметки*, 1999, т. 65, № 5, с. 790–792.

Поступила в редакцию
9.VI.1999