Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Б. Чжан, Слабая сходимость случайных сумм, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 28–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:48:42

© 2001 г.

КРУГЛОВ В. М.* , ЧЖАН БО**

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СУММ¹⁾

Исследуется слабая сходимость сумм независимых случайных величин со случайным числом слагаемых, центрированных вещественными числами, в предположении, что слагаемые и число слагаемых в каждой сумме независимы и слагаемые предельно равномерно малы. Доказанные теоремы являются аналогами известных предельных теорем для сумм независимых случайных величин с неслучайным числом слагаемых.

Ключевые слова и фразы: слабая сходимость, слабая компактность, сходимость по вероятности, случайная сумма, функция распределения, характеристическая функция.

1. Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ определены независимые случайные величины N_n , $X_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots$, причем N_n принимает свои значения из множества натуральных чисел. Нас интересуют условия, при которых функции распределения *случайных сумм*

$$X_n = \sum_{k=1}^{N_n} X_{n,k} - A_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

слабо сходятся при подходящем выборе вещественных чисел A_n .

В том случае, когда N_n являются натуральными числами (неслучайными), построена глубокая теория предельных теорем для сумм (1). Соответствующий обзор результатов можно найти в монографиях [1]–[3]. Об асимптотическом поведении случайных сумм в интересующем нас случае известны многочисленные результаты, но стройная теория еще не создана. Обзор результатов, полученных до 1990 года, можно найти в монографии [4]. Еще меньше известно о случайных суммах, если не предполагать независимость между слагаемыми и числом слагаемых. Некоторые сведения о результатах такого сорта можно найти в монографии [5].

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

**School of Economics, Peking University, 100871 Beijing, China.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 99-01-00846, 99-01-00847, и INTAS, грант 99-01317.

Приводимые ниже теоремы являются аналогами классических теорем и совпадают с ними, когда число слагаемых N_n в сумме (1) не является случайной величиной. Наше изложение напоминает изложение соответствующих результатов в монографии [1]. Сначала, в п. 2, мы рассмотрим случайные суммы, слагаемые которых имеют конечные дисперсии, суммы которых в определенном смысле ограничены. В п. 3 будет рассмотрен общий случай. В п. 4 приведены вспомогательные утверждения. Мы пользуемся общепринятой терминологией. Исключениями, быть может, являются обозначения $P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ и $W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ для сходимости по вероятности и слабой сходимости последовательности $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ случайных величин.

2. Случайные суммы с ограниченными дисперсиями. Утверждения из этого пункта можно трактовать как обобщения соответствующих утверждений из теории суммирования независимых случайных величин (см., например, [1, § 21]). Рассмотрим случайные суммы (1), слагаемые которых подчиняются следующим условиям:

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq N_n} DX_{n,k} = 0. \quad (2)$$

Последовательность $\{D_n\}_{n \geq 1}$ случайных величин, $D_n = DX_{n,1} + \dots + DX_{n,N_n}$, является плотной, другими словами,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} P\{D_n > r\} = 0. \quad (3)$$

Условие (3) представляет собой критерий относительной слабой компактности последовательности $\{D_n\}_{n \geq 1}$. Заметим также, что слабая сходимость в (2) равносильна сходимости по вероятности.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия (2) и (3). Для того чтобы при надлежащем подборе постоянных A_n функции распределения случайных сумм (1) сходились к функции распределения с характеристической функцией f , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \exp \{itY_n + Z_n(t)\} = f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1, \quad (4)$$

где $Y_n = \sum_{k=1}^{N_n} EX_{n,k} - A_n$, $Z_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} [E e^{it(X_{n,k} - EX_{n,k})} - 1]$.

Доказательство. Фиксируем $t \in \mathbf{R}^1$ и положим

$$f_{n,k}(t) = E \exp \{itX_{n,k}\}, \quad f_n(t) = \prod_{k=1}^{N_n} f_{n,k}(t) \exp \{-itA_n\},$$

$$\tilde{f}_{n,k}(t) = f_{n,k}(t) \exp \{-itEX_{n,k}\},$$

$$\beta_{n,k} = \tilde{f}_{n,k}(t) - 1, \quad \beta_n = \sup_{1 \leq k \leq N_n} |\beta_{n,k}|.$$

В силу неравенства $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \alpha^2/2$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$, мы имеем

$$|\beta_{n,k}| = \left| E \left[e^{it(X_{n,k} - EX_{n,k})} - 1 - it(X_{n,k} - EX_{n,k}) \right] \right| \leq \frac{t^2}{2} DX_{n,k}.$$

Из этого неравенства и условий (2) и (3) следует, что последовательности $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\beta_n D_n\}_{n \geq 1}$ сходятся по вероятности к нулю. Обозначим $\Psi_n = itY_n + Z_n(t)$. На множестве $\{\beta_n \leq \frac{1}{2}\}$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - e^{\Psi_n}| &= \left| e^{-itA_n} \prod_{k=1}^{N_n} e^{it\mathbf{E}X_{n,k}} \left[\prod_{k=1}^{N_n} \tilde{f}_{n,k}(t) - \prod_{k=1}^{N_n} e^{\beta_{n,k}} \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_n} |\tilde{f}_{n,k}(t) - e^{\beta_{n,k}}| = \sum_{k=1}^{N_n} |e^{\beta_{n,k}} - \beta_{n,k} - 1| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_n} |\beta_{n,k}|^2 \leq \frac{t^2}{2} \beta_n D_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь мы воспользовались неравенством $|e^z - z - 1| \leq |z|^2$, справедливым для любого комплексного числа z , $|z| \leq \frac{1}{2}$. В силу приведенных выше оценок мы имеем, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|f_n(t) - e^{\Psi_n}| > \varepsilon\} &= \mathbf{P}\{|f_n(t) - e^{\Psi_n}| > \varepsilon, \beta_n \leq \tfrac{1}{2}\} \\ &+ \mathbf{P}\{|f_n(t) - e^{\Psi_n}| > \varepsilon, \beta_n > \tfrac{1}{2}\} \leq \mathbf{P}\{t^2 \beta_n D_n > 2\varepsilon\} + \mathbf{P}\{\beta_n > \tfrac{1}{2}\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|f_n(t) - e^{\Psi_n}| > \varepsilon\} = 0$, $\forall \varepsilon > 0$. По теореме Лебега об предельном переходе под знаком интеграла $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|f_n(t) - e^{\Psi_n}| = 0$. Отсюда следует справедливость теоремы, если заметить, что характеристическая функция случайной величины X_n из (1) равна $\mathbf{E}f_n(t)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В классической теории предельных теорем указывается правило, по которому можно выбирать центрирующие постоянные A_n . В нашем случае их можно определить следующим образом: $A_n = \text{med}(\sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E}X_{n,k}) + C_n$, где $\{C_n\}_{n \geq 1}$ — ограниченная последовательность вещественных чисел. В этом можно убедиться, повторив рассуждения из [6, теорема 2], где вместо $\mathbf{E}X_{n,k}$ использовалась медиана $X_{n,k}$. Заметим, что наше правило выбора центрирующих постоянных совпадает с правилом выбора, предлагаемым классической теорией суммирования, если N_n — неслучайная величина.

Напомним описание класса Колмогорова безгранично делимых функций распределения [1, с. 92]. Функция распределения F (соответственно ее характеристическая функция f) принадлежит классу Колмогорова, если f можно записать по формуле Колмогорова

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}^1, \quad (6)$$

где γ — вещественное число, K — ограниченная, неубывающая, непрерывная слева функция, $K(-\infty) = 0$. Это представление безгранично

делимой характеристической функции из класса Колмогорова единственно.

Функция K отличается от функции распределения только одним свойством, а именно, значение $K(\infty)$ может быть произвольным неотрицательным числом. Условимся, ради краткости, такие функции называть *квази-функциями распределения*. Таким образом, каждая безгранично делимая функция распределения из класса Колмогорова определяется вещественным числом и квази-функцией распределения.

Назовем функцию двух переменных $K(x, \omega)$, $x \in \mathbf{R}^1$, $\omega \in \Omega$, *случайной квази-функцией распределения*, если: 1) для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функция $K(x, \omega)$, $x \in \mathbf{R}^1$, является квази-функцией распределения; 2) для каждого фиксированного $x \in \mathbf{R}^1$ функция $K(x, \omega)$, $\omega \in \Omega$, является случайной величиной.

По случайной величине η и случайной квази-функции распределения $K(x, \omega)$ можно определить характеристическую функцию

$$\psi(t) = \mathbf{E} \exp \left\{ it\eta + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x, \omega) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}^1. \quad (7)$$

Такую характеристическую функцию и соответствующую функцию распределения естественно назвать смесью безгранично делимой характеристической функции и смесью безгранично делимой функции распределения.

Понятие смеси безгранично делимой функции распределения позволяет доказать следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. Если выполнено условие (2), существует всюду плотное счетное множество $D \subset \mathbf{R}^1$ такое, что

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int_{-\infty}^x u^2 d\mathbf{P} \{X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k} < u\} = K(x, \omega), \quad \forall x \in D, \quad (8)$$

и существует случайная величина η такая, что при некотором выборе вещественных чисел A_n

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E}X_{n,k} - A_n \right) = \eta, \quad (9)$$

то последовательность функций распределения случайных сумм (1) слабо сходится к функции распределения с характеристической функцией (7).

Доказательство. Запишем $Z_n(t)$ в следующем виде:

$$Z_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK_{N_n}(x), \quad (10)$$

$$K_{N_n}(x) = \sum_{k=1}^{N_n} \int_{-\infty}^x u^2 d\mathbf{P} \{X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k} < u\}, \quad x \in \mathbf{R}^1. \quad (11)$$

По лемме 2 из п. 4 и условию (8)

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(t) = Z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x, \omega), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1.$$

Отсюда в силу условия (9) следует $\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (itY_n + Z_n(t)) = \eta + Z(t, \omega)$, $\forall t \in \mathbf{R}^1$. Заметим, что $|\exp\{itY_n + Z_n(t)\} - \exp\{it\eta + Z(t, \omega)\}| \leq 2$. По теореме Лебега об предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp\{itY_n + Z_n(t)\} = \psi(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1.$$

По теореме 1 последовательность функций распределения случайных сумм (1) сходится к функции распределения с характеристической функцией (7). Следствие доказано.

Следующее определение усиливает требования к последовательности $\{D_n\}_{n \geq 1}$ из (3). Назовем эту последовательность *строго плотной*, если любая ее подпоследовательность содержит свою подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторому числу. Это свойство совпадает со свойством ограниченности последовательности $\{D_n\}_{n \geq 1}$, если N_n , $n = 1, 2, \dots$, — неслучайные числа.

Теорема 2. *Предположим, что выполнено условие (2), последовательность $\{D_n\}_{n \geq 1}$ строго плотна и*

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} X_{n,k} - A_n \right] = \eta, \quad (12)$$

где A_n — вещественные числа, η — случайная величина, характеристическая функция которой не обращается в нуль. Для того чтобы функции распределения случайных сумм (1) слабо сходились к функции распределения с характеристической функцией $r(t) = f(t)\mathbf{E} \exp\{it\eta\}$, где $f(t)$ — безгранично делимая характеристическая функция (6) с $\gamma = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int_{-\infty}^x u^2 d\mathbf{P} \{X_{n,k} - \mathbf{E} X_{n,k} < u\} = K(x) \quad (13)$$

в каждой точке непрерывности x функции K .

Доказательство. Достаточность. Запишем $Z_n(t)$, как указано в (10). Слабая сходимост в (13) равносильна сходимости по вероятности. По лемме 2 из п. 4

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(t) = Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1.$$

Заметим, что $|\exp\{Z_n(t)\} - \exp\{Z(t)\}| \leq 2$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $\mathbf{E}|\exp\{Z_n(t)\} - \exp\{Z(t)\}| \rightarrow 0$. По условию (12) мы имеем, что $\mathbf{E} \exp\{itY_n\} \rightarrow \mathbf{E} \exp\{it\eta\}$. Отсюда вытекает следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp\{itY_n + Z_n(t)\} = r(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1. \quad (14)$$

В этом можно убедиться с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \exp \{itY_n + Z_n(t)\} - r(t) \right| = \left| \mathbf{E} \exp \{itY_n + Z_n(t)\} - \mathbf{E} \exp \{it\eta + Z(t)\} \right| \\ & = \left| \mathbf{E} \exp \{itY_n + Z_n(t)\} - \mathbf{E} \exp \{itY_n + Z(t)\} \right| \\ & \quad + \left| \mathbf{E} \exp \{itY_n + Z(t)\} - \mathbf{E} \exp \{it\eta + Z(t)\} \right| \\ & \leq \left| \mathbf{E} \exp \{Z_n(t)\} - \exp \{Z(t)\} \right| + \left| \mathbf{E} \exp \{itY_n\} - \mathbf{E} \exp \{it\eta\} \right|. \end{aligned}$$

По теореме 1 и в силу равенства (14) последовательность функций распределения случайных сумм (1) слабо сходится к функции распределения с характеристической функцией $r(t)$. Обратим внимание, что условие $\mathbf{E} \exp \{it\eta\} \neq 0, \forall t \in \mathbf{R}^1$, не использовалось.

Необходимость. Для доказательства (13) достаточно доказать, что любая подпоследовательность последовательности случайных сумм (1) содержит свою подпоследовательность, для которой выполнено (13). Возьмем произвольную подпоследовательность случайных сумм (1). Выделим из нее подпоследовательность $\{X_{m_n}\}_{n \geq 1}$, чтобы $\{D_{m_n}\}_{n \geq 1}$ сходилась слабо к некоторому числу σ^2 . Чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что $m_n = n, n = 1, 2, \dots$. Мы имеем

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} DX_{n,k} = \sigma^2. \quad (15)$$

Для любого $q \in (0, 1)$ определим левую q -квантиль по следующему правилу: $l_n(q) = \sup\{l: \mathbf{P}\{N_n < l\} \leq q\}$. Нетрудно доказать [4, с. 41], что условия (2) и (15) равносильны условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq l_n(q)} DX_{n,k} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} DX_{n,k} = \sigma^2 \quad (16)$$

для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Обозначим $\mathscr{D}$ множество таких $q \in (0, 1)$. Для любого $q \in \mathscr{D}$ последовательность $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$,

$$Y_n(q) = \sum_{k=1}^{l_n(q)} [X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}], \quad (17)$$

слабо компактна, так как последовательность $\{DY_n(q)\}_{n \geq 1}$ ограничена. В силу (16)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{D}(Y_n(q) - Y_n(q')) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{D}Y_n(q) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{D}Y_n(q') = 0, \quad \forall q, q' \in \mathscr{D}.$$

Поэтому предельные распределения для подпоследовательностей последовательности функций распределения случайных величин $Y_n(q), n = 1, 2, \dots$, не зависят от $q \in \mathscr{D}$. Пусть G — функция распределения и $\{k_n\}_{n \geq 1}$ — неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_{k_n}(q) < x\} = G(x), \forall q \in \mathscr{D}$, для

любой точки непрерывности x функции G . В соответствии с известной теоремой [1, с. 107] характеристическую функцию g функции распределения G можно записать по формуле Колмогорова (6) с постоянной $\gamma = 0$ и функцией $K = K'$ и, кроме того, выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_{k_n}(q)} \int_{-\infty}^x u^2 d\mathbf{P} \{X_{k_n,k} - \mathbf{E}X_{k_n,k} < u\} = K'(x) \quad (18)$$

для каждой точки непрерывности x функции K' . Пусть x — точка непрерывности функции K' . Величина $K_n(x; q) = \sum_{k=1}^{l_{k_n}(q)} \int_{-\infty}^x u^2 d\mathbf{P} \{X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k} < u\}$ является левой q -квантилью величины $K_{N_n}(x)$ из (11). Из определения левой q -квантили следует равенство

$$\mathbf{P} \{K_{N_n}(x) < z\} = \int_0^1 \mathbf{P} \{K_n(x; q) < z\} dq, \quad z \in \mathbf{R}^1.$$

Отсюда и из (18) следует, что $W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} K_{N_n}(x) = K'(x)$. По доказанному в части достаточности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp \{itY_{k_n} + Z_{k_n}(t)\} = \mathbf{E} e^{it\eta} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK'(x) \right\}.$$

С другой стороны, имеет место (4). Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} e^{it\eta} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK'(x) \right\} \\ &= \mathbf{E} e^{it\eta} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x) \right\}. \end{aligned}$$

Разделив это равенство на $\mathbf{E} e^{it\eta}$ (по предположению $\mathbf{E} e^{it\eta} \neq 0, \forall t \in \mathbf{R}^1$), мы получим

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK'(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x) \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $K = K'$. Тем самым доказано, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{K_{N_n}(x)\}_{n \geq 1}$ имеет своим пределом $K(x)$. Следовательно, сама последовательность слабо сходится к $K(x)$, другими словами, выполнено условие (13). Теорема доказана.

Следствие 2. *Предположим, что выполнены условие (2) и последовательность $\{D_n\}_{n \geq 1}$ строго плотна. Для того чтобы функции распределения случайных сумм*

$$X_n = \sum_{k=1}^{N_n} [X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

слабо сходились к функции распределения с характеристической функцией (6) с $\gamma = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (13).

Возможно, стоит отметить, что предположение о строгой плотности последовательности $\{D_n\}_{n \geq 1}$ использовалось только при доказательстве необходимости условия (13) в теореме 2 и ее следствии 2.

Пусть F — функция распределения с характеристической функцией $\mathbf{E} \exp\{-\sigma^2 t^2/2\}$, где σ — неотрицательная случайная величина. Если эта случайная величина ограничена, скажем, числом b , то

$$\begin{aligned} F(-x) + 1 - F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{|u| > x/v} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du d\mathbf{P}\{\sigma < v\} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u| > x/b} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du, \quad \forall x > 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(-x) + 1 - F(x)) \exp\{\alpha x \ln(1+x)\} = 0, \quad \forall \alpha > 0. \quad (20)$$

Определим класс $\mathcal{K}$ неотрицательных случайных величин σ таких, что функция распределения F с характеристической функцией $\mathbf{E} \exp\{-\sigma^2 t^2/2\}$ удовлетворяет условию (20). Приведенный выше пример показывает, что класс $\mathcal{K}$ не пуст.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия (2) и*

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{D}X_{n,k} = \sigma^2, \quad (21)$$

где σ — случайная величина из класса $\mathcal{K}$. Для того чтобы функции распределения случайных сумм (19) слабо сходились к функции распределения F с характеристической функцией $f(t) = \mathbf{E} \exp\{-\sigma^2 t^2/2\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 d\mathbf{P}\{X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k} < x\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (22)$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим через $L_n(q)$ и $l_{\sigma^2}(q)$ левые q -квантили случайной суммы из (21) и случайной величины σ^2 . Нетрудно убедиться [4, с. 12], что

$$\sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{D}X_{n,k} = L_n(q) \rightarrow l_{\sigma^2}(q) \quad (23)$$

при $n \rightarrow \infty$ для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Равенство $L_n(q)$ указанной сумме следует из определения левой квантили. Обозначим $\mathcal{D}$ множество $q \in (0, 1)$, для которых имеет место сходимость квантилей (23). Последовательность $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$ сумм (17) слабо компактна для каждого $q \in \mathcal{D}$, так как в силу (23) дисперсии $\mathbf{D}Y_n(q)$ равномерно по n ограничены. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 d\mathbf{P}\{X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k} < x\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall q \in \mathcal{D}. \quad (24)$$

Для этого достаточно доказать, что из любой подпоследовательности последовательности $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$ можно выделить новую подпоследовательность, для которой справедливо (24). Для доказательства этого мы воспользуемся теоремой Колмогорова [2, с. 103], согласно которой можно построить вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ и определенные на нем независимые случайные величины $N'_n, X'_{n,k}, X''_{n,k}, n, k = 1, 2, \dots$, такие, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины N_n и N'_n , а также $X'_{n,k}, X''_{n,k}, X_{n,k}$ одинаково распределены. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что вероятностные пространства $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ совпадают и $N'_n = N_n, X''_{n,k} = X_{n,k}$. Аналогично суммам (17) и (19) построим суммы $Y'_n(q)$ и X'_n слагаемых $X'_{n,k}$ с числом слагаемых $l_n(q)$ и N_n . По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{|X_n - X'_n| > x\} \\ & \geq \sum_{r=l_n(q)}^{\infty} \mathbf{P}\{N_n = r\} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^r (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| > x \right\}, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

По неравенству Леви [2, с. 261]

$$2\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^r (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| > x \right\} \geq \mathbf{P} \{|Y_n(q) - Y'_n(q)| > x\}, \quad r \geq l_n(q),$$

и, следовательно,

$$(1 - q) \mathbf{P} \{|Y_n(q) - Y'_n(q)| > x\} \leq 4\mathbf{P} \left\{ |X_n| \geq \frac{x}{2} \right\}, \quad \forall x > 0. \quad (25)$$

Пусть $q \in \mathcal{D}$ и G — функция распределения, являющаяся слабым пределом функций распределения случайных величин $Y_{k_n}(q)$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что $l_{\sigma^2}(q) > 0$. По теореме Хинчина [1, с. 123] функция распределения G безгранично делима, так как она является слабым пределом функций распределения сумм независимых равномерно малых случайных величин. В силу (25) свертка $G * \bar{G}$ функций распределения $G(x)$ и $\bar{G}(x) = 1 - G(-x + 0)$ удовлетворяет неравенству

$$G * \bar{G}(-x) + 1 - G * \bar{G}(+x) \leq \frac{4}{1 - q} \left(F\left(-\frac{x}{2}\right) + 1 - F\left(\frac{x}{2}\right) \right), \quad \forall x > 0.$$

По предположению функция распределения F удовлетворяет условию (20), и, следовательно, свертка $G * \bar{G}$ также удовлетворяет этому условию. С помощью интегрирования по частям нетрудно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ \alpha |x| \ln(1 + |x|) \} dG * \bar{G} < \infty, \quad \forall \alpha > 0.$$

Отсюда следует (см. [8]), что безгранично делимая функция распределения $G * \bar{G}$ должна быть нормальной. По теореме Крамера [2, с. 286] функция распределения G также должна быть нормальной. По теореме

Линдберга–Феллера [2, с. 309]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_{k_n}(q)} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где $F_{n,k}(x) = \mathbf{P}\{X_{k_n,k} - \mathbf{E}X_{k_n,k} < x\}$. Если $l_\sigma(q) = 0$, то предыдущее соотношение очевидно. Таким образом, (24) доказано. Условие (22) следует из (24) и равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) < z \right\} \\ &= \int_0^1 \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) < z \right\} dq, \quad z \in \mathbf{R}^1. \end{aligned}$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Можно показать, что условия теоремы влекут выполнение условий теоремы 1 и тем самым доказать достаточность. Мы дадим другое, более короткое, доказательство. Нетрудно доказать [4, с. 41], что условия (2), (21) и (22) равносильны соответственно первому из двух условий (16), условию (23) и условию (24) для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Обозначим $\mathcal{D}$ множество таких $q \in (0, 1)$. По теореме Линдберга–Феллера [2, с. 309]

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} [X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}] < x \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/l_{\sigma^2}(q)} e^{-u^2/2} du, \quad \forall x \in \mathbf{R}^1, \quad q \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

где функция справа равна нулю при $x < 0$ и единице при $x > 0$, если $l_{\sigma^2}(q) = 0$. Отсюда и из равенства

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} [X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}] < x \right\} = \int_0^1 \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} [X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}] < x \right\} dq$$

следует, что последовательность функций распределения случайных сумм (19) слабо сходится к функции распределения F с характеристической функцией $\mathbf{E} \exp\{-\sigma^2 t^2/2\}$. Теорема доказана.

Заметим, что предположение $\sigma \in \mathcal{K}$ было использовано только при доказательстве необходимости условия (22).

В заключение этого пункта мы рассмотрим два примера, которые показывают, что условия типа (8), (9) в общем случае не могут быть необходимыми.

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ и $\{U_n\}_{n \geq 1}$ — две последовательности, каждая из которых состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть также эти последовательности будут независимыми между собой и случайные величины U_n принимают свои значения из мно-

жества натуральных чисел, а случайные величины X_n удовлетворяют условиям $\mathbf{E}X_n = a$, $\mathbf{D}X_n = 1$.

Пример 1. Пусть $a = 1$. Положим $N_n = n + \sqrt{n}U_n$ и построим случайную сумму $(X_1 + \dots + X_{N_n})/\sqrt{n} - \sqrt{n}$. Последовательность функций распределения так построенных случайных сумм слабо сходится. Последовательность $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, $Y_n = U_n$, сходится слабо к U_1 , но не сходится по вероятности.

Пример 2. Пусть $a = 0$. Положим $N_n = nU_n$ и построим случайную сумму $(X_1 + \dots + X_{N_n})/\sqrt{n}$. В данном случае функции K_{N_n} и K имеют следующий вид:

$$K_{N_n}(x) = U_n \int_{-\infty}^{x\sqrt{n}} u^2 d\mathbf{P}\{X_1 < u\},$$

$K(x, \omega) = 0$, если $x < 0$, $K(x, \omega) = U_1$, если $x > 0$. Последовательность функций распределения так построенных случайных сумм слабо сходится. Последовательность $\{K_{N_n}(x)\}_{n \geq 1}$ сходится слабо к $K(x, \omega)$, но не сходится по вероятности.

3. Случайные суммы без моментных ограничений. Мы ограничимся исследованием асимптотического поведения случайных сумм (1) при условии

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq N_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (26)$$

Разумеется, в этом условии слабая сходимостъ равносильна сходимости по вероятности.

Все теоремы этого пункта представляют собой обобщения теорем из предыдущего пункта и доказываются аналогичным образом. Их можно рассматривать также как обобщения соответствующих теорем из теории суммирования независимых случайных величин (см., например, [1, § 24]).

Теорема 4. Предположим, что выполнено условие (26). Для того чтобы при некотором подборе вещественных чисел A_n функции распределения случайных сумм (1) слабо сходились к функции распределения с характеристической функцией f , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp \{itV_n + W_n(t)\} = f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1, \quad (27)$$

где

$$V_n = \sum_{k=1}^{N_n} a_{n,k} - A_n, \quad W_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} \left[\mathbf{E} e^{it(X_{n,k} - a_{n,k})} - 1 \right],$$

$$a_{n,k} = \int_{|x| < v} x d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\}, \quad v > 0 \text{ — фиксированное число.}$$

Доказательство. Фиксируем $t \in \mathbf{R}^1$ и положим

$$f_{n,k}(t) = \mathbf{E} \exp \{itX_{n,k}\}, \quad f_n(t) = \prod_{k=1}^{N_n} f_{n,k}(t) \exp \{-itA_n\},$$

$$\tilde{f}_{n,k}(t) = f_{n,k}(t) \exp \{-ita_{n,k}\},$$

$$\beta_{n,k} = \tilde{f}_{n,k}(t) - 1, \quad b_{n,k} = |f_{n,k}(t) - 1|, \quad \beta_n = \sup_{1 \leq k \leq N_n} |\beta_{n,k}|,$$

$$b_n = \sup_{1 \leq k \leq N_n} |b_{n,k}|, \quad a_n = \sup_{1 \leq k \leq N_n} |a_{n,k}|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ и $\gamma = \min\{\varepsilon, v\}$ выполняются следующие соотношения:

$$|a_{n,k}| = \left| \mathbf{E} [X_{n,k} I_{\{|X_{n,k}| < \gamma\}}] + \mathbf{E} [X_{n,k} I_{\{\gamma \leq |X_{n,k}| < v\}}] \right| \gamma + v \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \gamma\},$$

$$b_{n,k} = \mathbf{E} \left[|\exp \{itX_{n,k}\} - 1| I_{\{|X_{n,k}| \leq \varepsilon\}} \right] + \mathbf{E} \left[|\exp \{itX_{n,k}\} - 1| I_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}} \right] \\ \leq |t| \varepsilon + 2 \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\},$$

$$|\beta_{n,k}| \leq |f_{n,k}(t) - 1| + |\exp \{-ita_{n,k}\} - 1| \leq b_{n,k} + |t| |a_{n,k}|.$$

Отсюда и из условия (26) следует, что последовательности $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ сходятся по вероятности к нулю. Обозначим $\lambda = \min\{\frac{1}{2}, v/2\}$, $A = \{a_n \leq \lambda, \beta_n \leq \lambda\}$. Для любых k , $1 \leq k \leq N_n(\omega)$, и $\omega \in A$ выполняется неравенство $|a_{n,k}| \leq v/2$. Это дает нам право воспользоваться оценкой [1, с. 122]

$$|\beta_{n,k}| \leq C(t, v) \mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2},$$

где

$$C(t, v) = \frac{1 + v^2}{2} |t|^2 + 2 \frac{1 + v^2}{v^2} + 2|t| \frac{4 + v^2}{v}. \quad (28)$$

Обозначим $\Psi_n(t) = itV_n + W_n(t)$. Рассуждения, которые привели нас к (5), применимы в рассматриваемой ситуации. Поэтому можно считать доказанным, что на множестве A выполняется неравенство

$$|f_n(t) - \exp \{\Psi_n(t)\}| \leq \sum_{k=1}^{N_n} |\beta_{n,k}|^2 \leq C(t, v) \beta_n B_n,$$

где

$$B_n = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2}. \quad (29)$$

Теперь доказательство теоремы можно завершить, повторив заключительные рассуждения из доказательства теоремы 1, если последовательность $\{B_n\}_{n \geq 1}$ плотна. Если последовательность функций распределения случайных сумм (1) слабо компактна, то [6, теорема 3] последовательность $\{B_n\}_{n \geq 1}$ плотна. Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось доказать, что свойство плотности последовательности $\{B_n\}_{n \geq 1}$ является следствием (27). Убедимся в этом. Запишем

комплекснозначную функцию $\Psi_n(t)$ в виде линейной комбинации ее вещественной и мнимой частей:

$$\Psi_n(t) = A_n(t) + iB_n(t), \quad A_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} \left[\cos(t(X_{n,k} - a_{n,k})) - 1 \right].$$

В силу (27) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_{n \geq 1} \left| 2 - \mathbf{E} \exp \{ \Psi_n(t) \} - \mathbf{E} \exp \{ \Psi_n(-t) \} \right| < 2\varepsilon, \quad |t| \leq \delta,$$

и, следовательно,

$$1 - \varepsilon < \inf_{n \geq 1} \mathbf{E} \left[\cos B_n(t) \exp \{ A_n(t) \} \right] \leq \inf_{n \geq 1} \mathbf{E} \exp \{ A_n(t) \}, \quad |t| \leq \delta.$$

Другими словами, последовательность характеристических функций $\{\mathbf{E} \exp \{ A_n(t) \}\}_{n \geq 1}$ равномерно непрерывна в точке $t = 0$. По известной теореме [2, с. 206] соответствующая последовательность функций распределения слабо компактна. Определим симметричные функции распределения

$$\mathbf{R}_{n,k}(x) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{P} \{ X_{n,k} - a_{n,k} < x \} + \mathbf{P} \{ X_{n,k} - a_{n,k} > -x \} \right],$$

где $x \in \mathbf{R}^1$, $n, k = 1, 2, \dots$, и заметим, что

$$\mathbf{E} \exp \{ A_n(t) \} = \mathbf{E} \left[\prod_{k=1}^{N_n} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right\} \right].$$

Функция $\mathbf{E} \exp \{ A_n(t) \}$ является характеристической функцией случайной суммы $Y_n = Y_{n,1} + \dots + Y_{n,N_n}$, слагаемые которой независимы между собой и от N_n . Случайная величина $Y_{n,k}$ определяется симметричной безгранично делимой характеристической функцией $\exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right\}$. Справедливо неравенство [7, теорема 2.1] $1 - \mathbf{R}_{n,k}(x) \leq 8\mathbf{P} \{ Y_{n,k} > x/2 \}$, $\forall x > 0$. С помощью этого неравенства и интегрирования по частям легко убедиться, что

$$\mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2} \leq 8\mathbf{E} \frac{4|Y_{n,k}|^2}{1 + 4|Y_{n,k}|^2} \leq 32\mathbf{E} \frac{|Y_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k}|^2}.$$

По упомянутой теореме [6, теорема 3] последовательность $\{B'_n\}_{n \geq 1}$,

$$B'_n = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} \frac{|Y_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k}|^2},$$

плотна, и, следовательно, последовательность $\{B_n\}_{n \geq 1}$ также обладает этим свойством. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Как следует из [6, теорема 1], центрирующие постоянные A_n можно определить следующим образом: $A_n = \text{med}(\sum_{k=1}^{N_n} a_{n,k}) + C_n$, где $\{C_n\}_{n \geq 1}$ — ограниченная последовательность

вещественных чисел. Если N_n — неслучайные величины, то наше правило построения центрирующих постоянных совпадает с правилом построения, предлагаемым классической теорией суммирования.

Напомним описание безгранично делимых функций распределения [1, с. 83]. Функция распределения F (соответственно ее характеристическая функция f) безгранично делима тогда и только тогда, когда f можно записать по формуле Леви–Хинчина:

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}^1, \quad (30)$$

где γ — вещественное число, G — квази-функция распределения. Это представление безгранично делимой характеристической функции единственно.

Пусть η — случайная величина и $G(x, \omega)$ — случайная квази-функция распределения. Формула

$$\psi(t) = \mathbf{E} \exp \left\{ it\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x, \omega) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}^1, \quad (31)$$

определяет смесь безгранично делимой характеристической функции.

Следствие 3. Если выполнено условие (26), существует всюду плотное счетное множество $D \subset \mathbf{R}^1$ такое, что

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int_{-\infty}^x \frac{u^2}{1+u^2} d\mathbf{P} \{X_{n,k} - a_{n,k} < u\} = G(x, \omega), \quad \forall x \in D \cup \{\infty\},$$

и существует случайная величина η такая, что при некотором выборе вещественных чисел A_n

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{N_n} \left(a_{n,k} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\mathbf{P} \{X_{n,k} - a_{n,k} < x\} \right) - A_n \right] = \eta,$$

то последовательность функций распределения случайных сумм (1) слабо сходится к функции распределения с характеристической функцией (31).

Доказательство. Запишем $itV_n + W_n(t)$ в следующем виде:

$$itV_n + W_n(t) = it\gamma_{N_n} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_{N_n}(x), \quad (32)$$

$$\gamma_{N_n} = -A_n + \sum_{k=1}^{N_n} \left[a_{n,k} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\mathbf{P} \{X_{n,k} - a_{n,k} < x\} \right], \quad (33)$$

$$G_{N_n}(x) = \sum_{k=1}^{N_n} \int_{-\infty}^x \frac{u^2}{1+u^2} d\mathbf{P} \{X_{n,k} - a_{n,k} < u\}, \quad x \in \mathbf{R}^1. \quad (34)$$

В силу условий следствия и леммы 3 из п. 4

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (itV_n + W_n(t)) = it\eta + W(t, \omega), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1,$$

где

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x, \omega).$$

По теореме 4 последовательность функций распределения случайных сумм сходится к функции распределения с характеристической функцией (31). Следствие доказано.

Теорема 5. *Предположим, что выполнено условие (26), последовательность $\{B_n\}_{n \geq 1}$ величин (29) строго плотна и*

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \left[a_{n,k} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\mathbf{P}\{X_{n,k} - a_{n,k} < x\} \right] - A_n \right\} = \eta, \quad (35)$$

A_n — вещественные числа и η — случайная величина, характеристическая функция которой не обращается в нуль. Для того чтобы функции распределения случайных сумм (1) слабо сходились к функции распределения с характеристической функцией $r(t) = f(t) \mathbf{E} \exp\{it\eta\}$, где $f(t)$ — безгранично делимая характеристическая функция (30) с $\gamma = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int_{-\infty}^x \frac{u^2}{1+u^2} d\mathbf{P}\{X_{n,k} - a_{n,k} < u\} = G(x) \quad (36)$$

в каждой точке непрерывности x функции G и для $x = \infty$.

Доказательство. Достаточность. Запишем $itV_n + W_n(t)$ как указано в (32)–(34). Рассуждая, как при доказательстве достаточности в теореме 2, мы убедимся, что условия (35), (36) и лемма 3 из п. 4 влекут равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp\{itV_n + W_n(t)\} = \mathbf{E} \exp\{it\eta + W(t)\}, \quad \forall t \in \mathbf{R}^1,$$

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x).$$

По теореме 4 последовательность функций распределения случайных сумм (1) слабо сходится к функции распределения с характеристической функцией $r(t)$.

Необходимость. Для доказательства (36) достаточно доказать, что любая подпоследовательность последовательности случайных сумм (1) содержит свою подпоследовательность, для которой выполнено (36). Возьмем произвольную подпоследовательность случайных сумм (1). Выделим из нее подпоследовательность $\{X_{m_n}\}_{n \geq 1}$, чтобы подпоследовательность $\{B_{m_n}\}_{n \geq 1}$ сходилась слабо к некоторому числу σ^2 . Чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что $m_n = n$,

$n = 1, 2, \dots$. Нетрудно доказать [4, с. 41], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq l_n(q)} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (37)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2} = \sigma^2 \quad (38)$$

для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Обозначим $\mathcal{D}$ множество таких $q \in (0, 1)$. Для любого $q \in \mathcal{D}$ последовательность $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$,

$$Y_n(q) = \sum_{k=1}^{l_n(q)} [X_{n,k} - a_{n,k}], \quad (39)$$

слабо компактна [6, теорема 1]. Для произвольных q и q' из $\mathcal{D}$ определим величины $\gamma_n = \min\{l_n(q), l_n(q')\}$ и $\nu_n = \max\{l_n(q), l_n(q')\}$. В силу (38)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\gamma_n}^{\nu_n} \mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2} = 0, \quad \forall q, q' \in \mathcal{D}. \quad (40)$$

Отсюда следует

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\gamma_n}^{\nu_n} (X_{n,k} - a_{n,k}) = 0. \quad (41)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что выполняются условия критерия вырожденной сходимости [2, с. 331]. Эти условия в нашем случае выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\gamma_n}^{\nu_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| > \varepsilon\} &= 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\gamma_n}^{\nu_n} \mathbf{D}[(X_{n,k} - a_{n,k}) I_{\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \leq v\}}] &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\gamma_n}^{\nu_n} \mathbf{E}[(X_{n,k} - a_{n,k}) I_{\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \leq v\}}] &= 0. \end{aligned}$$

Первые два условия очевидным образом вытекают из (40). Для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\max_{1 \leq k \leq l_n(q)} |a_{n,k}| \leq v/2$. Для таких n справедлива оценка [1, с. 121]

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}((X_{n,k} - a_{n,k}) I_{\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \leq v\}}) \right| \\ & \leq \frac{2(4 + v^2)}{v} \mathbf{E} \left[\frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2} I_{\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq v/2\}} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Из этой оценки и (40) вытекает третье условие, и, следовательно, справедливо (41). Поэтому предельные распределения для подпоследовательностей последовательности функций распределения случайных величин $Y_n(q)$, $n = 1, 2, \dots$, не зависят от $q \in \mathcal{D}$. С этого места рассуждения совпадают с соответствующими рассуждениями из доказательства теоремы 2. Мы не будем их повторять. Теорема доказана.

Теорема 6. *Предположим, что выполнены условия (26) и*

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2} = \sigma^2, \quad (43)$$

где σ — случайная величина из класса $\mathcal{X}$. Для того чтобы функции распределения случайных сумм $X_n = (X_{n,1} - a_{n,1}) + \dots + (X_{n,N_n} - a_{n,N_n})$, $n = 1, 2, \dots$, слабо сходились к функции распределения F с характеристической функцией $f(t) = \mathbf{E} \exp\{-\sigma^2 t^2 / 2\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$W\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (44)$$

Доказательство. **Необходимость.** Обозначим через $L_n(q)$ и $l_{\sigma^2}(q)$ левые q -квантили случайной суммы из (43) и случайной величины σ^2 . Нетрудно убедиться [4, с. 12], что

$$\sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{E} \frac{|X_{n,k} - a_{n,k}|^2}{1 + |X_{n,k} - a_{n,k}|^2} = L_n(q) \rightarrow l_{\sigma^2}(q) \quad (45)$$

при $n \rightarrow \infty$ для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Равенство $L_n(q)$ указанной сумме следует из определения левой квантили. Обозначим $\mathcal{D}$ множество $q \in (0, 1)$, для которых имеет место сходимост квантилей (45). Известно [6, теорема 1], что последовательность $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$ сумм (39) слабо компактна для каждого $q \in \mathcal{D}$. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall q \in \mathcal{D}. \quad (46)$$

Для этого достаточно доказать, что из любой подпоследовательности последовательности $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$ можно выделить новую подпоследовательность, для которой справедливо (46). Возьмем любую подпоследовательность последовательности $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$. Выделим из нее слабо сходящуюся подпоследовательность $\{Y_{k_n}(q)\}_{n \geq 1}$. Пусть $q \in \mathcal{D}$ и G — функция распределения, являющаяся слабым пределом функций распределения случайных величин $Y_{k_n}(q)$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что $l_{\sigma^2}(q) > 0$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 3, мы убедимся, что $G * \bar{G}$ и G — нормальные функции распределения. По центральной предельной теореме [2, с. 323] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_{k_n}^{(q)}} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| > \varepsilon\} = 0$. Если $l_{\sigma^2}(q) = 0$, то предыдущее соотношение очевидно. Таким образом, (46) доказано. Условие (44) следует из (46) и равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| > \varepsilon\} < z \right\} \\ &= \int_0^1 \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| > \varepsilon\} < z \right\} dq, \quad z \in \mathbf{R}^1. \end{aligned}$$

Достаточность. Можно было бы убедиться, что условия теоремы влекут выполнение условий теоремы 4 и тем самым доказать достаточность. Мы приведем другое, более короткое доказательство. Нетрудно доказать [4, с. 41], что условия (26), (43) и (44) равносильны соответственно условиям (37), (45) и (46) для почти всех по мере Лебега $q \in (0, 1)$. Обозначим $\mathcal{D}$ множество таких $q \in (0, 1)$. Из (37), (45) и (46) следует, что последовательность $\{Y_n(q)\}_{n \geq 1}$ сумм (39) слабо сходится к нормальной случайной величине с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $l_{\sigma^2}(q)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что сумма $Y_n(q) = Y_{n,1} + \dots + Y_{n,l_n(q)}$, $Y_{n,k} = X_{n,k} - a_{n,k}$, удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы [2, с. 323]. В рассматриваемом случае эти условия имеют следующий вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq l_n(q)} \mathbf{P} \{|Y_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (47)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \mathbf{E} \frac{|Y_{n,k} - c_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k} - c_{n,k}|^2} = l_{\sigma^2}(q), \quad (48)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2}{1 + x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (49)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \left[c_{n,k} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1 + x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right] = 0, \quad \forall q \in \mathcal{D}, \quad (50)$$

где $c_{n,k} = \int_{|x| < v} x d\mathbf{P}\{Y_{n,k} < x\}$, $\mathbf{R}_{n,k}(x) = \mathbf{P}\{Y_{n,k} - c_{n,k} < x\}$. Условие (47) следует из (37) и определения $a_{n,k}$. В свою очередь, из (47) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $c_n = \max_{1 \leq k \leq l_n(q)} |c_{n,k}|$. Поэтому для всех достаточно больших n выполняется неравенство $c_n < v/2$. Для таких n применима оценка (42), что вместе с (46) влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} |c_{n,k}| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} |c_{n,k}|^2 = 0. \quad (51)$$

В силу этих соотношений, (45) и неравенств

$$\begin{aligned} \frac{|Y_{n,k} - c_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k} - c_{n,k}|^2} &\leq \frac{|Y_{n,k}|^2 + 2|c_{n,k}||Y_{n,k}| + |c_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k}|^2 + 2|c_{n,k}||Y_{n,k}| + |c_{n,k}|^2} \\ &\leq \frac{|Y_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k}|^2} + |c_{n,k}| + |c_{n,k}|^2, \\ \frac{|Y_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k}|^2} &= \frac{|Y_{n,k} - c_{n,k} + c_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k} - c_{n,k} + c_{n,k}|^2} \\ &\leq \frac{|Y_{n,k} - c_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k} - c_{n,k}|^2} + |c_{n,k}| + |c_{n,k}|^2, \end{aligned}$$

выполняется (48). Из (45), (46), (51) и неравенства

$$\frac{|Y_{n,k} - c_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k} - c_{n,k}|^2} I_{\{|Y_{n,k} - c_{n,k}| > \varepsilon\}} \leq \frac{|Y_{n,k}|^2}{1 + |Y_{n,k}|^2} \left(I_{\{|Y_{n,k}| > \varepsilon/2\}} + I_{\{|c_{n,k}| > \varepsilon/2\}} \right) + |c_{n,k}| + |c_{n,k}|^2$$

следует (49), если учесть тот, отмеченный выше, факт, что последовательность $\{c_n\}_{n \geq 1}$ сходится к нулю.

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы доказать (50). В силу (49) и соотношений

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right| \\ &= \left| \int_{|x| < v} x d\mathbf{R}_{n,k}(x) - \int_{|x| < v} \frac{x^3}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) + \int_{|x| \geq v} \frac{x}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{|x| < v} x d\mathbf{R}_{n,k}(x) - \int_{|x| < v} \frac{x^3}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right| + \frac{1}{v} \int_{|x| \geq v} \frac{x^2}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x), \end{aligned}$$

достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \left| \int_{|x| < v} x d\mathbf{R}_{n,k}(x) - \int_{|x| < v} \frac{x^3}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right| = 0. \quad (52)$$

Для всех достаточно больших n выполняется неравенство $c_n < v/2$ и, следовательно, имеет место неравенство

$$\left| \int_{|x| < v} x d\mathbf{R}_{n,k}(x) \right| \leq \frac{2(4+v^2)}{v} \int_{|x| > v/2} \frac{|x|^2}{1+|x|^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x),$$

аналогичное неравенству (42). В силу этой оценки и (49) для доказательства (52) достаточно убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n(q)} \int_{|x| < v} \frac{x^3}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) = 0.$$

Последнее вытекает из (48), (49) и неравенства

$$\int_{|x| < v} \frac{|x|^3}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) \leq \delta \int_{|x| < \delta} \frac{x^2}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x) + v \int_{|x| > \delta} \frac{x^2}{1+x^2} d\mathbf{R}_{n,k}(x),$$

справедливого для любого $0 < \delta < v$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_n(q) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/l_{\sigma^2}(q)} e^{-u^2/2} du, \quad \forall x \in \mathbf{R}^1.$$

Отсюда и из равенства

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} [X_{n,k} - a_{n,k}] < x \right\} = \int_0^1 \mathbf{P} \{Y_n(q) < x\} dq$$

следует, что последовательность функций распределения случайных сумм X_n слабо сходится к функции распределения F с характеристической функцией $E \exp \{-\sigma^2 t^2/2\}$. Теорема доказана.

4. Вспомогательные утверждения. В этом пункте доказаны обобщения известных теорем Хелли–Брея [2, с. 193–195] о сходимости интегралов по квази-функциям распределения на случайные квази-функции распределения.

Лемма 1. Пусть на сегменте $[a, b]$ определены случайные квази-функции распределения G, G_n , $n = 1, 2, \dots$. Если последовательность $\{G_n(b, \omega) - G_n(a, \omega)\}_{n \geq 1}$ плотна и существует счетное всюду плотное множество $D \subset [a, b]$, $a, b \in D$, такое, что для каждого $x \in D$ последовательность $\{G_n(x, \omega)\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к $G(x, \omega)$, то

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f(x) dG_n(x, \omega) = \int_{[a, b]} f(x) dG(x, \omega) \quad (53)$$

для любой непрерывной функции f , определенной на $[a, b]$.

Доказательство. Нетрудно убедиться (см. [9, леммы 2 и 3]), что существование указанного множества D влечет существование счетного всюду плотного множества D' , обладающего теми же самыми свойствами, и, кроме того, каждая точка $x \in D'$ является точкой непрерывности случайной квази-функции G для $\mathbf{P}$ -почти всех $\omega \in \Omega$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $D' = D$. Обозначим $D_n = G(b, \omega) - G(a, \omega) + G_n(b, \omega) - G_n(a, \omega)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$ такое, что $\sup_{n \geq 1} \mathbf{P}\{D_n > C\} < \varepsilon$. Пусть γ — произвольное положительное число. Выберем $\delta > 0$ такое, чтобы $2\delta C < \gamma$. Разобьем сегмент $[a, b]$ точками $x_k \in D$, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1} = b$, таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\max_{1 \leq k \leq m} \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| < \delta$. Определим функцию f_δ на $[0, 1]$, положив $f_\delta(x) = f(x_m)$ для $x_m \leq x \leq x_{m+1} = b$ и $f_\delta(x) = f(x_k)$ для $x_k \leq x < x_{k+1}$, $k = 1, \dots, m-1$. Воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[a, b]} f(x) dG(x, \omega) - \int_{[a, b]} f dG_n(x, \omega) \right| \\ & \leq \left| \int_{[a, b]} f(x) dG(x, \omega) - \int_{[a, b]} f_\delta(x) dG(x, \omega) \right| \\ & \quad + \left| \int_{[a, b]} f_\delta(x) dG(x, \omega) - \int_{[a, b]} f_\delta(x) dG_n(x, \omega) \right| \\ & \quad + \left| \int_{[a, b]} f(x) dG_n(x, \omega) - \int_{[a, b]} f_\delta(x) dG_n(x, \omega) \right|. \end{aligned}$$

Обозначим Δ_n величину, стоящую слева, и A_n, B_n, C_n соответственно первое, второе, третье слагаемое, стоящее справа. Мы имеем $\Delta_n \leq A_n + B_n + C_n \leq \delta D_n + 2M \sum_{k=1}^{m+1} |G(x_k, \omega) - G_n(x_k, \omega)|$, где $M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Отсюда следует

$$\mathbf{P}\{\Delta_n > \gamma\} \leq \mathbf{P}\left\{\delta D_n > \frac{\gamma}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{2M \sum_{k=1}^{m+1} |G(x_k, \omega) - G_n(x_k, \omega)| > \frac{\gamma}{2}\right\}.$$

Второе слагаемое справа стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. В силу неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\delta D_n > \frac{\gamma}{2}\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\delta D_n > \frac{\gamma}{2}, D_n \leq C\right\} + \mathbf{P}\{D_n > C\} = \mathbf{P}\{D_n > C\}$$

мы имеем $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Delta_n > \gamma\} \leq \varepsilon$. Отсюда следует (53). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть на вещественной прямой определены случайные квази-функции распределения $G, G_n, n = 1, 2, \dots$. Если последовательность $\{G_n(\infty, \omega)\}_{n \geq 1}$ плотна и существует счетное всюду плотное множество $D \subset \mathbf{R}^1$ такое, что для каждого $x \in D$ последовательность $\{G_n(x, \omega)\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к $G(x, \omega)$, то

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG_n(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x, \omega) \quad (54)$$

для любой непрерывной функции $f(x), x \in \mathbf{R}^1, \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что каждая точка $x \in D$ является точкой непрерывности случайной квази-функции G для $\mathbf{P}$ -почти всех $\omega \in \Omega$. Для любого $A > 0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x, \omega) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG_n(x, \omega) \right| \\ & \leq \left| \int_{[-A, A)} f(x) dG(x, \omega) - \int_{[-A, A)} f(x) dG_n(x, \omega) \right| \\ & \quad + \left| \int_{x \notin [-A, A)} f(x) dG(x, \omega) - \int_{x \notin [-A, A)} f(x) dG_n(x, \omega) \right|. \end{aligned}$$

Обозначим Δ_n и A_n, B_n соответственно левую часть этого неравенства и первое и второе слагаемые, стоящие в правой части этого неравенства, а также $D_n = G(\infty, \omega) + G_n(\infty, \omega)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$ такое, что $\sup_{n \geq 1} \mathbf{P}\{D_n > C\} < \varepsilon$. Пусть γ — произвольное положительное число. Выберем числа $\delta > 0$ и $0 < A \in D$ такие, чтобы $2\delta C < \gamma$, $\sup_{|x| \geq A} |f(x)| < \delta$. Мы имеем

$$\mathbf{P}\{\Delta_n > \gamma\} \leq \mathbf{P}\left\{A_n > \frac{\gamma}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{B_n > \frac{\gamma}{2}\right\}. \quad (55)$$

По лемме 1 первое слагаемое справа стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Так как $B_n < 2\delta D_n$, то $\mathbf{P}\{B_n > \gamma/2\} \leq \mathbf{P}\{\delta D_n > \gamma/2, D_n \leq C\} + \mathbf{P}\{D_n > C\} = \mathbf{P}\{D_n > C\}$. Отсюда следует

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Delta_n > \gamma\} \leq \varepsilon, \quad (56)$$

что влечет (54). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть на вещественной прямой определены случайные квази-функции распределения $G, G_n, n = 1, 2, \dots$. Если последовательность $\{G_n(\infty, \omega)\}_{n \geq 1}$ плотна и существует счетное всюду плотное

множество $D \subset \mathbf{R}^1$ такое, что для любого $x \in D$ и $x = \infty$ последовательность $\{G_n(x, \omega)\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к $G(x, \omega)$, то

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG_n(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x, \omega) \quad (57)$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$.

Доказательство. Как и в двух предыдущих леммах, мы можем считать, что каждая точка множества D является точкой непрерывности случайной квази-функции G для $\mathbf{P}$ -почти всех $\omega \in \Omega$. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве предыдущей леммы. Положив $M = \sup |f(x)|$, $G(x) = G(x, \omega)$, $G_n(x) = G_n(x, \omega)$, мы будем иметь

$$\begin{aligned} B_n &\leq M [G_n(-A) + (G(\infty) - G(A)) + G_n(-A) + (G(\infty) - G_n(A))] \\ &\leq M [|G_n(-A) - G(-A)| + |G_n(A) - G(A)| + |G_n(\infty) - G(\infty)|] \\ &\quad + 2M[G(-A) + G(\infty) - G(A)]. \end{aligned}$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ найдется $A \in D$ такое, что $\mathbf{P}\{2M[G(-A) + G(\infty) - G(A)] > \gamma/4\} \leq \varepsilon$. По предположению величина $\mathbf{P}\{M[|G_n(-A) - G(-A)| + |G_n(A) - G(A)| + |G_n(\infty) - G(\infty)|] > \gamma/4\}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{B_n > \gamma/2\} \leq \varepsilon$. По лемме 1 последовательность $\{A_n\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к нулю. Отсюда и из (55) следует (56), что, в свою очередь, влечет (57). Лемма доказана.

В заключение мы благодарим рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: ГИТТЛ, 1949, 264 с.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
4. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990, 269 с.
5. Gut A. Stopped Random Walks, Limit Theorems and Applications. New York: Springer-Verlag, 1988, 199 с.
6. Круглов В. М. Слабая компактность случайных сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 248–271.
7. Прозоров Ю. В. Усиленная устойчивость сумм и неограниченно делимые распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1958, т. III, в. 2, с. 153–165 (исправл.: 1958, т. III, в. 4).
8. Круглов В. М. Характеризация одного класса безгранично делимых распределений в гильбертовом пространстве. — Матем. заметки, 1974, т. 16, № 5, с. 777–782.
9. Cheng Shihong. Stable convergence of square integrable martingale array. — Acta Math. Sinica. (N.S.), 1990, v. 6, № 4, p. 334–348.

Поступила в редакцию
2.II.2000