Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 50–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 09:20:28

© 2001 г.

НАГАЕВ С. В.*

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Выводятся нижние оценки вероятностей больших отклонений для суммы независимых случайных величин. Область, в которой действуют эти оценки, описывается в терминах ляпуновского отношения. Полученные оценки сравниваются с нижними оценками, принадлежащими Колмогорову, Феллеру, Ленарту и Архангельскому.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, метод сопряженных распределений, независимые случайные величины, неравенство Колмогорова, ляпуновское отношение, оценки Берри-Эссена, свертка функций распределения, условие Бернштейна, характеристическая функция.

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с нулевыми средними и конечными третьими моментами, $S = \sum X_j$. Здесь и в дальнейшем $\sum$ означает $\sum_1^n$, случай $n = \infty$ не исключается.

Мы будем заниматься нижними оценками вероятности $P\{S > x\}$. Обозначим $\sigma_j^2 = EX_j^2$, $B^2 = \sum \sigma_j^2$, $\beta_j = E|X_j|^3$, $C = \sum \beta_j$. Пусть $L = C/B^3$ — ляпуновское отношение.

Пусть $\Phi(x)$ — стандартный нормальный закон. Обозначим $\Phi_1(x)$ функцию Миллса $\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x))e^{x^2/2}$ (по поводу функции Миллса см., например, [1, с. 204–205]). Положим $\Psi(x) = x\Phi_1(x)$.

Первая нижняя оценка вероятности $P\{S > x\}$ была получена А. Н. Колмогоровым [2] для равномерно ограниченных случайных величин $|X_j| < M$ в связи с доказательством закона повторного логарифма. В наших обозначениях неравенство Колмогорова выглядит следующим образом: если $x^2 > 512$ и $a = xM/B \leq \frac{1}{256}$, то

$$P\{S > Bx\} > \exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1 + \varepsilon)\right\},$$

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev-s@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).

где $\varepsilon = \max\{64\sqrt{a}, 32\sqrt{\ln x^2}/x\}$. Сформулированный ниже результат принадлежит Ленарту [4].

Если $|X_k| < M$ и $0 < xM/B < \frac{1}{12}$, то

$$P\{S > Bx\} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2} Q(x)\right\} \left(1 - \Phi(x) + \tau \frac{M}{B} e^{-x^2/2}\right), \quad (1)$$

где $Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k x^k$, $q_1 < M/3B$, $q_k < 8^{-1}(12M/B)^k$, $k = 2, 3, \dots, \infty$, $|\tau| < 7,465$ (см. также по этому поводу [5, с. 308]). Этот результат по форме совпадает с результатом Феллера [3] и отличается от последнего несколько меньшими значениями постоянных.

Из (1) нетрудно извлечь неравенство

$$P\{S > Bx\} \geq (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-c(\gamma) \frac{Mx^3}{B}\right\} \left(1 - 7,465 \sqrt{2\pi} \frac{Mx}{B\Psi(x)}\right), \quad (2)$$

где $1 < x < \gamma B/M$, $c(\gamma) = \frac{1}{6} + 9\gamma/(1 - 12\gamma)$, $\gamma < \frac{1}{12}$.

Неравенство (2) действует в более широкой области, нежели неравенство Колмогорова, и, кроме того, оно значительно точнее. Чтобы показать последнее, нам понадобятся некоторые вычисления. Прежде всего, используя тождество (76) (см. п. 2), имеем при условии $x^2 > 512$

$$1 - \Phi(x) > \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi x}} > \frac{e^{-x^2/2 - \ln cx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3)$$

где $c = \frac{512}{511}$. Далее, при $x^2 > 512$ справедливо неравенство $\sqrt{\ln x} < 0,0781 x$, т.е. $\sqrt{2} \ln x < 0,0781 x \sqrt{\ln x^2}$. При $x^2 > 512$ и $c = \frac{512}{511}$

$$\ln cx = \left(1 + \frac{\ln c}{\ln x}\right) \ln x < 1,00063 \ln x.$$

В результате мы приходим к оценке

$$\ln cx < 0,111 \frac{x^2}{2} \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$0,111 \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} < 0,00346 \varepsilon, \quad (5)$$

где ε имеет тот же смысл, что и в неравенстве Колмогорова.

Комбинируя (3) и (5), мы заключаем, что

$$1 - \Phi(x) > \frac{\exp\{-(x^2/2)(1 + 0,00346 \varepsilon)\}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (6)$$

если $x^2 > 512$. Оценим теперь $1 - 7,465\sqrt{2\pi} Mx/(B\Psi(1))$ в предположении, что $x^2 > 512$ и $a := xM/B \leq \frac{1}{256}$. Заметим, прежде всего, что

$$\frac{7,465}{\Psi(1)} < 11,397. \quad (7)$$

Следовательно,

$$z := 7,465 \sqrt{2\pi} \frac{Mx}{B\Psi(1)} < 0,113.$$

Используя теперь неравенство (80) (см. ниже п. 2), имеем

$$1 - z > \exp\left\{-z - \frac{z^2}{1 - z}\right\} > \exp\{-1,128z\} > \exp\left\{-32,75 \frac{Mx}{B}\right\}.$$

Очевидно, $x < x^3/512$, если $x^2 > 512$. Следовательно,

$$1 - z > \exp\left\{-0,024 \frac{Mx^3}{B}\right\}. \quad (8)$$

Условие $a \leq \frac{1}{256}$ соответствует условию $\gamma = \frac{1}{256}$ в неравенстве (2). Несложные вычисления показывают, что

$$c\left(\frac{1}{256}\right) < 0,204. \quad (9)$$

Комбинируя неравенства (8), (9) и $a \leq \sqrt{a}/16$, мы получаем

$$\begin{aligned} (1 - z) \exp\left\{-c\left(\frac{1}{256}\right) \frac{Mx^3}{B}\right\} &> \exp\left\{-0,268 \frac{Mx^3}{B}\right\} \\ &\geq \exp\left\{-0,0335 \left(\frac{x^2 \sqrt{a}}{2}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что

$$0,0335\sqrt{a} \leq 53 \cdot 10^{-5}\varepsilon. \quad (11)$$

Из (2), (6), (10), (11) следует оценка

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \frac{\exp\{-(1 + 4 \cdot 10^{-3}\varepsilon) x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Из приведенных выкладок видно, насколько трудоемким является сравнение уже имеющихся оценок, не говоря уже о выводе новых.

Сравним теперь оценку (2) с оценкой из недавней работы [6]:

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \exp\left\{-(1 + 50\alpha) \frac{x^2}{2}\right\}, \quad (12)$$

которая справедлива при условии

$$\frac{1}{\alpha} < x < \frac{\alpha M}{B}, \quad 0 < \alpha < 10^{-2}. \quad (13)$$

Прежде всего, вследствие (76)

$$1 - \Phi(x) > \frac{\exp\{\ln(1 - 1/x^2) - \ln x - x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Далее, $1 - 1/x^2 > 0,9999$, $\ln x < 0,0461x < 0,0461\alpha x^2$. Следовательно,

$$1 - \Phi(x) > 0,9999 \frac{\exp\{-(1 + 0,0922\alpha) x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (14)$$

Несложные вычисления с использованием (7), (80) и условия (13) приводят к оценке

$$1 - 7,465 \sqrt{2\pi} \frac{Mx}{B\Psi(1)} > \exp\left\{-28,89 \frac{Mx}{B}\right\} > \exp\left\{-58 \cdot 10^{-4} \alpha \frac{x^2}{2}\right\}. \quad (15)$$

Из (2), (14), (15) следует, что при условии (13)

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \frac{\exp\{-(1 + 0,098\alpha) x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, оценка (2) точнее, чем (12).

До сих пор речь шла о нижних оценках в случае, когда слагаемые равномерно ограничены. Перейдем к случаю, когда это условие не выполняется. При условии Бернштейна

$$\mathbf{E}|X_j|^k \leq \frac{k!}{2} \sigma_j^2 c^{k-2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (16)$$

нижнюю оценку можно извлечь из работы [7] (см. по этому поводу [8]). Существенное продвижение было сделано в работе А. Н. Архангельского [8], который заменил условие равномерной ограниченности слагаемых условием $\sup_j \mathbf{E}|X_j|^{2+\delta}/\sigma_j^2 < \infty$, $\delta > 0$.

Наша цель в настоящей работе заключается в том, чтобы заменить индивидуальные ляпуновские отношения на обычное ляпуновское отношение. Более точно, мы хотим получить аналог оценки (2) с заменой M/B на L .

Сформулируем наши результаты, полученные в этом направлении.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$0 < x < (1 - 4\gamma) \left(\frac{\gamma}{L} \wedge \frac{\alpha B}{\max_j \sigma_j} \right), \quad \gamma < \frac{1}{16}, \quad e\alpha^2 < \gamma. \quad (17)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S > Bx\} &> (1 - \Phi(x)) \exp \left\{ - \left(c_1(\gamma) L + c_2(\gamma, \alpha) \sum \frac{\sigma_j^3}{B^3} \right) x^3 \right\} \\ &\times \left(1 - \frac{(c_3(\gamma) L + c_4(\alpha) \sum \sigma_j^3/B^3) x}{\Psi(x)} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $c_1(\gamma) \leq 1,5/(1 - 4\gamma)^3$, $c_2(\gamma, \alpha) \leq 2\alpha/(1 - 4\gamma)^3$, $c_3(\gamma) \leq 9,79 + 76,26\gamma$, $c_4(\alpha) \leq 106\alpha$.

Близкий результат сформулирован в [9], однако без указания значений постоянных.

Сравним оценку (18) с соответствующим результатом из [8]. Положим $c = \max_j \beta_j/\sigma_j^2$. Из теоремы 1 этой работы следует, что при $a := xc/B < \alpha$ и $x > x_0$

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\{-\rho ax^2\} (1 - Ka), \quad (19)$$

где $K = K(\alpha, x_0)$, $\rho = \rho(\alpha)$, но явный вид зависимости от α и x_0 не приводится. Отмечается только, что при $\alpha = 0,031$, $K = 16,37$, $\rho = 3,06$. Заметим, что $c^{-1} < (B^2/C) \wedge (1/\max \sigma_j)$. Поэтому из условия $a < \alpha$ следует, что

$$x < \alpha \left(\frac{1}{L} \wedge \frac{B}{\max \sigma_j} \right). \quad (20)$$

Если $\alpha < \frac{3}{4}$, то условие (20) является частным случаем (17). Если $\alpha = 0,031$, то (20) переходит в условие (17) с $\gamma = \alpha = 0,032$. В этом случае оценка (18) принимает вид

$$P\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) e^{-1,858Lx^3} (1 - 8,25 Lx).$$

Учитывая, что $Lx \leq a$, мы видим, что в рассматриваемом случае неравенство (18) дает значительно более точный результат, нежели (19).

Следствие 1. Если выполнены условия (17), то

$$P\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp \left\{ -c_1(\alpha, \gamma) Lx^3 \right\} \left(1 - \frac{c_2(\alpha, \gamma) Lx}{\Psi(x)} \right), \quad (21)$$

где

$$c_1(\alpha, \gamma) \leq \frac{1,5 + 2\alpha}{(1 - 4\gamma)^3}, \quad c_2(\alpha, \gamma) \leq 9,79 + 76,26 \gamma + 106 \alpha. \quad (22)$$

Полагая в (17) $\gamma = \frac{1}{20}$, $\alpha = \frac{1}{20}$ и учитывая, что $\Psi(1,7) > 0,805$, мы получаем

Следствие 2. Если $1,7 < x < ((1/L) \wedge (B/\max \sigma_j))/25$, то

$$\begin{aligned} P\{S > Bx\} &> (1 - \Phi(x)) e^{-3,13Lx^3} (1 - 23,4Lx) \\ &> 0,06 (1 - \Phi(x)) e^{-3,13Lx^3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Если случайные величины X_i одинаково распределены, то

$$\max_j \frac{\sigma_j}{B} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{C}{B^3} = \frac{\beta}{\sigma^3 \sqrt{n}},$$

где σ^2 и β — соответственно второй и третий абсолютный моменты величин X_i .

Если $|X_i| < M$, $i = 1, \dots, n$, то $C/B^3 < M/B$, $\max_j \sigma_j/B < M/B$. Таким образом, как в случае одинаково распределенных, так и в случае ограниченных слагаемых, можно исключить из условия (17) $B/\max \sigma_j$. Сформулируем теперь получающиеся в результате оценки.

Следствие 3. Если X_i одинаково распределены и

$$1,7 < x \leq \frac{1}{25} \sqrt{n} \frac{\sigma^3}{\beta}, \quad (24)$$

то

$$\begin{aligned} P\{S > Bx\} &> (1 - \Phi(x)) \exp \left\{ -\frac{(2,35\beta/\sigma^3 + 0,2) x^3}{\sqrt{n}} \right\} \\ &\times \left(1 - \frac{(16,88\beta/\sigma^3 + 6,58) x}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Для стандартного нормального закона значения $x \geq 3$ следует рассматривать как большие. Заметим в этой связи, что значение $x = 3$ удовлетворяет условию (24) для $n \geq 64^2(\beta/\sigma^3)^2$. На статистическом языке это означает, что нам нужно произвести не менее $2^{12} = 4096$ наблюдений, чтобы иметь возможность воспользоваться неравенством (25) для $x \geq 3$.

Следствие 4. Если $|X_j| < M$ и

$$1,7 < x \leq \frac{1}{25} \frac{B}{M}, \quad (26)$$

то

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-2,13 \frac{Mx^3}{B}\right\} \left(1 - 23,4 \frac{Mx}{B}\right). \quad (27)$$

Несложные вычисления показывают, что при $1,7 < x < \frac{1}{25} M/B$ неравенство (2) дает более точную оценку, нежели следствие 4:

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-1,291 \frac{Mx^3}{B}\right\} \left(1 - 23,2 \frac{Mx}{B}\right).$$

Можно исключить $\max \sigma_j/B$ из условия (17) и в общем случае, однако ценой значительного увеличения постоянных, а именно, справедлива

Теорема 2. Если $\frac{3}{2} < x < \gamma/L$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$, то

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-c_1(\gamma) Lx^3\right\} (1 - c_2(\gamma) Lx),$$

где

$$c_1(\gamma) \leq \frac{29 + 38\sqrt{\gamma}}{(1 - 28\gamma)^3} + \frac{41}{\sqrt{\gamma}}, \quad c_2(\gamma) \leq 60 + 1630\gamma + 1212\sqrt{\gamma} + \frac{0,63}{\sqrt{\gamma}}. \quad (28)$$

Следствие 5. Если $\frac{3}{2} < x < \gamma/L$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$, то

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > (1 - \Phi(x)) \exp\left\{-1419 Lx^3\right\} (1 - 164 Lx). \quad (29)$$

Сформулированные выше нижние оценки лучше использовать в комбинации с неравенством

$$\mathbf{P}\{S > Bx\} > \frac{1}{2} \sum_j \mathbf{P}\{X_j > 2Bx\}, \quad (30)$$

которое справедливо, по крайней мере, для $x > 2$ (см. [10, с. 759]). Если распределения случайных величин X_j имеют тяжелые хвосты, то предлагаемые нами оценки точнее, чем оценка (30), лишь для сравнительно небольших значений x .

Предположим для простоты, что X_j одинаково распределены $\mathbf{P}\{X > x\} > c/x^t$, $x > 1$, $t > 3$. Если $x > b\sqrt{\ln n}$, где $b > \sigma(t-2)^{1/2}$, то для достаточно больших n

$$n\mathbf{P}\{S > 2\sigma x\sqrt{n}\} > 2(1 - \Phi(x)).$$

Поэтому при $x > b\sqrt{\ln n}$ оценка (30) оказывается точнее оценки (25), если n достаточно велико.

Рассмотрим теперь совсем конкретный пример. Пусть плотность $p(x)$ определяется равенством

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \frac{2}{|x|^5}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Сравним оценки (25) и (30) в случае, когда X_j одинаково распределены с плотностью $p(x)$, в точке $x = 3$. В данном случае $\sigma^2 = 2$, $\beta = 4$.

При $\gamma = \frac{1}{16}$ оценка (25) применима при $n > 11\,250$. Неравенство (25) при $n > 11\,250$ принимает вид

$$\mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\} > 0,13 e^{-1,12}(1 - \Phi(3)) > 0,042(1 - \Phi(3)) > 56 \cdot 10^{-6}.$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (30), мы получаем для $n > 11\,250$ оценку

$$\mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\} > \frac{n}{2} \mathbf{P}\{X > 6\sqrt{2n}\} > \frac{1}{3^4 \cdot 2^{20}} \sim 11 \cdot 10^{-9}.$$

Мы видим, что при $x = 3$, $n = 11\,250$ оценка (25) на четыре порядка точнее, чем оценка (30). Обратим внимание читателя, что в рассматриваемом примере $x < \sigma((t-2)\ln n)^{1/2}$.

Посмотрим, что в данном случае дает оценка Берри-Эссеена

$$|\Phi(3) - \mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\}| < c_0 \sqrt{\frac{2}{n}}$$

с постоянной $c_0 = 0,7655$ [11] (см. также [12, с. 229]).

При $n = 11\,250$ мы получаем тривиальную оценку

$$\mathbf{P}\{S > 3\sqrt{2n}\} > 1 - \Phi(3) - 0,0103 > -0,091.$$

Нетривиальная оценка получается для $n > 643 \cdot 10^3$.

Наши рассмотрения лишний раз показывают, какую большую роль играют постоянные, когда дело касается практических вычислений. На первый взгляд, постоянная $\frac{3}{64}$ в условии (24) не слишком мала, но тем не менее именно она является причиной того, что неравенство (25) справедливо только при больших n .

Доказательство теорем 1 и 2 технически сложно. В основе его лежит модификация метода, предложенного в [13]. Последний является комбинацией урезания с последующим применением метода сопряженных распределений (по поводу последнего см. [5], а также [14]).

В п. 2, в котором собрано 19 лемм, проводится подготовка к доказательству теорем 1 и 2. В п. 3 доказывается теорема 1, а в п. 4 — теорема 2.

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения и обозначения.

Определим срезку $X(y)$ случайной величины X равенством

$$X(y) = \begin{cases} X, & X \leq y, \\ 0, & X > y. \end{cases}$$

Положим $r(h, y) = \mathbf{E}e^{hX(y)}$, $a(h, y) = \mathbf{E}X(y)e^{hX(y)}$, $\sigma^2(h, y) = \mathbf{E}X^2(y)e^{hX(y)}$, $\beta(h, y) = \mathbf{E}|X(y)|^3e^{hX(y)}/r(h, y)$.

Обозначим

$$a(y) = a(0, y), \quad \sigma^2(y) = \sigma^2(0, y), \quad \beta(y) = \beta(0, y).$$

Пусть

$$A(y) = \sum a_j(y), \quad B^2(y) = \sum \sigma^2(y).$$

Положим

$$m(h, y) = \frac{a(h, y)}{r(h, y)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} r(h, y), \quad M(h, y) = \sum m_j(h, y),$$

$$b^2(h, y) = \frac{\sigma^2(h, y)}{r(h, y)} - m^2(h, y) \equiv \frac{\partial^2}{\partial h^2} \ln r(h, y).$$

Индекс j здесь и ниже означает, что соответствующая характеристика относится к случайной величине X_j . Заметим, что $M(h, y)$ как функция h возрастает при $y > 0$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial h} M(h, y) = \sum b_j^2(h, y) > 0.$$

С другой стороны, $M(0, y) = A(y) \leq 0$. Поэтому уравнение относительно h $M(h, y) = x$ при $x \geq 0$ имеет единственное решение, которое мы обозначим через $h(x, y)$.

Положим $F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$, $B^2(h, y) = \sum_j b_j^2(h, y)$. Пусть

$$C(h, y) = \sum \mathbf{E} \frac{e^{hX_j(y)}}{r_j(h, y)} |X_j(y) - m_j(h, y)|^3.$$

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Если $0 < h \leq 1/y$, то

$$0 < r(h, y) - 1 - a(y)h < \frac{eh^2\sigma^2(y)}{2}. \quad (31)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из тождества

$$r(h, y) = 1 + a(y)h + \int_{-\infty}^y (e^{hu} - 1 - hu) dF(u)$$

и неравенства $0 < e^u - 1 - u < eu^2/2$, $u < 1$.

Положим $\beta_+ = \mathbf{E}\{X^3; X > 0\}$, $\beta_- = \mathbf{E}\{|X|^3; X < 0\}$.

Лемма 2. Если $0 < h \leq 1/y$, то

$$a(h, y) \geq a(y), \quad (32)$$

$$-\frac{\beta_-h^2}{2} < a(h, y) - a(y) - \sigma^2(y)h < \beta_+ \left(\frac{(e-2)}{y^2} \wedge \frac{eh^2}{2} \right). \quad (33)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (32) следует из тождества

$$a(h, y) - a(y) = \int_{-\infty}^y (e^{hu} - 1) u dF(u) \quad (34)$$

и неравенства $(e^{hu} - 1) u \geq 0$. Выведем теперь неравенство (33). Очевидно, $a(h, y) - a(y) - \sigma^2(y) h = \int_{-\infty}^y (e^{hu} - 1 - hu) u dF(u)$. Остается воспользоваться неравенствами

$$0 < e^{hu} - 1 - hu < \left(\frac{eh^2}{2} \wedge \frac{e-2}{y^2} \right) u^2, \quad u > 0,$$

$$e^{hu} - 1 - hu < \frac{h^2 u^2}{2}, \quad u < 0.$$

Лемма 3. Пусть $0 < h < 1/y$,

$$y > \left(\alpha^{-1} \max_j \sigma_j \right) \vee \frac{C}{\gamma B^2}, \quad e\alpha^2 < \gamma. \quad (35)$$

Тогда при $\gamma < 1$

$$M(h, y) > \left((1 - 2\gamma) h - \frac{2\gamma}{y} \right) B^2. \quad (36)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $a(y) \leq 0$, $a(h, y) - a(y) \geq 0$ (см. лемму 2), имеем

$$M(h, y) > \frac{A(y)}{\min_j r_j(h, y)} + \frac{\sum_j (a_j(h, y) - a_j(y))}{\max_j r_j(h, y)}. \quad (37)$$

В силу леммы 1 при условии (35)

$$1 - e^{-1}\gamma < 1 - \frac{\sigma^2}{y^2} < r(h, y) < 1 + \frac{e\sigma^2}{2y^2} < 1 + \frac{e\alpha^2}{2}. \quad (38)$$

Далее,

$$B^2(y) > B^2 - \frac{C}{y} > (1 - \gamma) B^2. \quad (39)$$

Используя (39) и левое неравенство в (33), мы получаем

$$\sum_j (a_j(h, y) - a_j(y)) > B^2(y) h - \frac{Ch^2}{2} > \left(1 - \frac{3\gamma}{2} \right) B^2 h. \quad (40)$$

Наконец,

$$|A(y)| < \frac{C}{y^2} < \frac{\gamma B^2}{y}. \quad (41)$$

Комбинируя (37)–(41), мы заключаем, что

$$M(h, y) > \frac{(1 - 3\gamma/2) B^2 h}{1 + e\alpha^2/2} - \frac{\gamma B^2}{(1 - e^{-1}\gamma)y}.$$

Заметим, что при $e\alpha^2 < \gamma$

$$\frac{1}{1 + e\alpha^2/2} > 1 - \frac{e\alpha^2}{2} > 1 - \frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Из двух последних оценок следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (35). Тогда при $\gamma \leq \frac{1}{4}$

$$h(x, y) < \frac{x + 2\gamma B^2/y}{(1 - 2\gamma) B^2} \leq \frac{1}{y}, \quad (43)$$

если

$$x \leq \frac{(1 - 4\gamma) B^2}{y}. \quad (44)$$

Доказательство. Обозначим $M_1(h, y) = ((1 - 2\gamma)h - 2\gamma/y) B^2$. Согласно (36), при $0 < h < 1/y$

$$M(h, y) > M_1(h, y). \quad (45)$$

Пусть $h_1(x, y)$ — корень уравнения $M_1(h, y) = x$. Очевидно,

$$M_1\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{(1 - 4\gamma) B^2}{y}. \quad (46)$$

Вследствие (45) и (46) при $x < (1 - 4\gamma) B^2/y$

$$h(x, y) < h_1(x, y) = \frac{x + 2\gamma^2 B^2/y}{(1 - 2\gamma) B^2} \leq \frac{1}{y},$$

что и требовалось доказать.

Положим

$$Q(h, y) = \sum (r_j(h, y) - 1),$$

$$C^+ = \sum \mathbf{E}\{X_j^3; X_j > 0\}, \quad C^- = \sum \mathbf{E}\{|X_j|^3; X_j < 0\}.$$

Лемма 5. Если $h < 1/y$, то

$$A(y)h + \frac{B^2(y)h^2}{2} - \frac{C^-h^3}{6} < Q(h, y) < \frac{eB^2h^2}{2}. \quad (47)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} r(h, y) &= 1 + a(y)h + \frac{\sigma^2(y)h^2}{2} + \int_{-\infty}^y \left(e^{hu} - 1 - hu - \frac{h^2u^2}{2} \right) dF(u) \\ &> 1 + a(y)h + \frac{\sigma^2(y)h^2}{2} - \frac{h^3\beta_-}{6}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает левое неравенство в (47). Правое неравенство следует из оценки $r(h, y) - 1 < eh^2\sigma^2/2$.

Лемма 6. Пусть $0 < \gamma < \frac{1}{16}$,

$$y = \frac{(1 - 4\gamma) B^2}{x}, \quad (48)$$

$$x < (1 - 4\gamma) B^2 \left(\frac{\gamma B^2}{C} \wedge \frac{\alpha}{\max_j \sigma_j} \right), \quad (49)$$

$$e\alpha^2 < \gamma. \quad (50)$$

Тогда при $h = h(x, y)$

$$Q(h, y) - hx > -\frac{x^2}{2B^2} - 1,5C \left(\frac{x}{(1-4\gamma)B^2} \right)^3. \quad (51)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу (48)–(50) y удовлетворяет условию (35). Таким образом, выполняются условия леммы 4, т.е. имеет место неравенство (43). Из (43) и (48) следует

$$h(x, y) < \frac{x}{(1-4\gamma)B^2} = \frac{1}{y}. \quad (52)$$

Комбинируя (47), (52), мы заключаем, что

$$Q(h, y) > \frac{B^2 h^2}{2} - C^+ \left(\frac{h}{y^2} + \frac{h^2}{2y} \right) - C^- \frac{h^3}{6} > \frac{B^2 h^2}{2} - 1,5 \frac{C}{y^3}.$$

Заметим, что $B^2 h^2/2 - hx > -x^2/(2B^2)$ при любом $h > 0$. Из двух последних неравенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 7. Пусть $0 < h < 1/y$ и выполнено условие (35). Тогда при $\alpha^2 < 1$

$$h(x, y) > \frac{(1-\alpha^2)x}{(1+e\gamma/2)B^2}. \quad (53)$$

Доказательство. Используя правое неравенство (33), имеем $M(h, y) \leq (B^2 h + Ceh^2/2)/\min_j r_j(h, y)$. Заметим, что в силу (35) $Ch^2 < \gamma B^2 h$. Согласно левому неравенству (38), при условии (35)

$$r(h, y) > 1 - \frac{\sigma^2}{y^2} > 1 - \alpha^2. \quad (54)$$

Таким образом,

$$M(h, y) \leq \frac{h(1+e\gamma/2)B^2}{1-\alpha^2}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 8. Если выполнены условия (35) и (48), то при $h < 1/y$

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1+e\gamma/2}{(1-4\gamma)(1-\alpha^2)} h(x, y). \quad (55)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из (48) и (53).

Лемма 9. Если $0 < h \leq 1/y$, то

$$-\frac{\sigma^2}{y} < a(h, y) < \sigma^2 \left(eh \wedge \frac{(e-1)}{y} \right). \quad (56)$$

Доказательство. Используя (34), нетрудно показать, что

$$a(h, y) - a(y) < \sigma^2 \left(eh \wedge \frac{e-1}{y} \right).$$

Остается заметить, что $-\sigma^2/y \leq a(y) \leq 0$, и воспользоваться оценкой (32).

Лемма 10. Пусть $0 < h \leq 1/y$ и выполнены условия

$$y > \frac{\max_j \sigma_j}{\alpha}, \quad \alpha^2 < \frac{1}{16e}. \quad (57)$$

Тогда

$$\max_j \frac{|m_j(h, y)|}{\sigma_j} < 1,76\alpha. \quad (58)$$

Доказательство. В силу (54), (56), (57) $|m(h, y)| < (e-1)\alpha\sigma/(1-\alpha^2)$. Остается воспользоваться условием $\alpha^2 < 1/16e$.

Лемма 11. В условиях леммы 10

$$C(h, y) < 2,782C + 19\alpha \sum \sigma_j^3, \quad (59)$$

если $\gamma < \frac{1}{16}$.

Доказательство. В качестве отправной точки мы используем неравенство

$$(1 - \alpha^2) C(h, y) < \sum \beta_j(h, y) + 3 \sum \sigma_j^2(h, y) |m_j(h, y)| + 3 \sum \alpha_j(h, y) m_j^2(h, y) + \sum |m_j(h, y)|^3, \quad (60)$$

которое нетрудно получить с помощью (54). Здесь $\alpha(h, y) = \int_{-\infty}^y |u| e^{hu} dF(u)$.

Вследствие оценок (58) и

$$\sigma^2(h, y) < e\sigma^2 \quad (61)$$

имеем

$$\sum \sigma_j^2(h, y) |m_j(h, y)| < 4,79\alpha \sum \sigma_j^3. \quad (62)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \sum \beta_j(h, y) &< eC, \quad \sum \alpha_j(h, y) m_j^2(h, y) < 8,42\alpha^2 \sum \sigma_j^3, \\ \sum |m_j(h, y)|^3 &< 5,46\alpha^3 \sum \sigma_j^3. \end{aligned} \quad (63)$$

Из (60), (62), (63) следует желаемый результат.

Лемма 12. Если $h \leq 1/y$, то

$$(e-1) \frac{\beta}{y} > \sigma^2(h, y) - \sigma^2(y) > -\beta h. \quad (64)$$

Доказательство. Очевидно, $\sigma^2(h, y) = \sigma^2(y) + \int_{-\infty}^y u^2(e^{hu} - 1) dF(u)$. Далее,

$$\frac{e-1}{y} \beta_+ > \int_0^y u^2(e^{hu} - 1) dF(u) > 0, \quad \int_{u < 0} u^2(1 - e^{hu}) dF(u) < h\beta_-,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 13. Пусть $0 < h \leq 1/y$ и выполнены условия (35) с $\gamma < \frac{1}{16}$. Тогда

$$B^2(h, y) > \frac{32}{33} (1 - 2\gamma - 3,2\alpha^2) B^2. \quad (65)$$

Доказательство. Мы начнем с оценки $\sum \sigma_j^2(h, y) > B^2(y) - \sum \beta_j/y > B^2 - 2C/y > (1 - 2\gamma) B^2$, которая следует из (35) и (64).

Принимая теперь во внимание (38), мы находим, что

$$\frac{\sum \sigma_j^2(h, y)}{r_j(h, y)} > \frac{32}{33} (1 - 2\gamma) B^2.$$

Согласно (58), $\sum m_j^2(h, y) < 3,1\alpha^2 B^2$. Комбинируя приведенные выше неравенства, мы получаем желаемый результат.

Лемма 14. Пусть $0 < h < 1/y$ и выполнены условия (35) с $\gamma < \frac{1}{16}$. Тогда

$$\left| hB(h, y) - \frac{M(h, y)}{B(y)} \right| < \frac{2,78\alpha \sum \sigma_j^3 h}{By} + 1,686 \frac{C}{By^2}. \quad (66)$$

Доказательство. Прежде всего, согласно (33), (35) и (54),

$$m(h, y) = \sigma^2(y) h + \frac{\theta}{1 - \alpha^2} \left(\beta_+(e - 2)y^{-2} + \alpha h y^{-1} \sigma^2(y) \sigma \right).$$

Здесь и ниже θ означает величину, по модулю не превосходящую 1. Отсюда

$$\frac{M(h, y)}{B(y)} = hB(y) + 1,023 \theta \left(\frac{(e - 2)C}{y^2 B(y)} + \frac{\alpha h \sum \sigma_j^3}{y B(y)} \right). \quad (67)$$

Аналогично в силу (64) и (54)

$$\frac{\sum \sigma_j^2(h, y)}{r_j(h, y)} = \sum \sigma_j^2(y) + 1,023 \theta \left(\frac{(e - 1)C}{y} + \frac{\alpha \sum \sigma_j^3}{y} \right).$$

Далее, согласно (57) и (56),

$$\sum m_j^2(h, y) = \theta \left(\frac{e - 1}{1 - \alpha^2} \right)^2 \alpha \sum \frac{\sigma_j^3}{y}. \quad (68)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B^2(h, y) &:= \frac{\sum \sigma_j^2(h, y)}{r_j(h, y)} - m_j^2(h, y) \\ &= B^2(y) + \theta \left(1,023 \frac{(e - 1)C}{y} + 3,1 \alpha \sum \frac{\sigma_j^3}{y} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Очевидно,

$$hB(h, y) = hB(y) + h(B(h, y) - B(y)). \quad (70)$$

Далее,

$$B(h, y) - B(y) = \frac{B^2(h, y) - B^2(y)}{B(h, y) + B(y)}. \quad (71)$$

Заметим, что $B(h, y) + B(y) > 2\sqrt{B(y)B(h, y)}$. Используя лемму 13, имеем при $\gamma \leq \frac{1}{16}$: $1/\sqrt{B(h, y)} < 1,065/\sqrt{B}$. Аналогично, учитывая (39),

получаем $1/\sqrt{B(y)} < 1,017/\sqrt{B}$. Из трех последних оценок следует

$$\frac{1}{B(h, y) + B(y)} < \frac{0,541}{B}. \quad (72)$$

Комбинируя (69), (71), (72), имеем

$$B(h, y) - B(y) = \frac{\theta(0,951C + 1,68\alpha \sum \sigma_j^3)}{By}. \quad (73)$$

Из (67), (70), (73) получаем, учитывая (39), оценку (66).

Лемма 15. Для любых $0 < u_1 \leq u_2$

$$1 < \frac{\Phi_1(u_1)}{\Phi_1(u_2)} < \exp \left\{ \frac{u_2 - u_1}{u_1^2 \Phi_1(u_1)} \right\}. \quad (74)$$

Доказательство. Исследуем функцию $\ln \Phi_1(u)$. Очевидно,

$$\frac{d}{du} \ln \Phi_1(u) = u - \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(u))} = u \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}ue^{u^2/2}(1 - \Phi(u))} \right). \quad (75)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sqrt{2\pi}ue^{u^2/2}(1 - \Phi(u)) = 1 - ue^{u^2/2} \int_u^\infty e^{-v^2/2} v^{-2} dv. \quad (76)$$

Функция $g(u) = ue^{u^2/2}(1 - \Phi(u))$ возрастает. Действительно,

$$\frac{d}{du} \ln g(u) = u + \frac{1}{u} - \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(u))}.$$

Далее, в силу (76)

$$1 - \Phi(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{u\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-v^2/2} v^{-2} dv.$$

Отсюда

$$\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} - u(1 - \Phi(u)) = \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-v^2/2} v^{-2} dv < u^{-1}(1 - \Phi(u)).$$

Таким образом,

$$\left(u + \frac{1}{u}\right)(1 - \Phi(u)) > \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

т.е. $\frac{d}{du} \ln g(u) \geq 0$. Следовательно, $g(u)$ возрастает при $u > 0$. Это в силу (76) означает, что функция $\Phi_2(u) = ue^{u^2/2} \int_u^\infty v^{-2} e^{-v^2/2} dv$ убывает. Согласно (76),

$$\Phi_2(u) = 1 - \sqrt{2\pi}ue^{u^2/2}(1 - \Phi(u)) = 1 - \Psi(u). \quad (77)$$

Используя равенство $1/(1-x) = 1 + x/(1-x)$, мы заключаем, что при $u \geq u_1$

$$1 < \frac{1}{1 - \Phi_2(u)} < 1 + \frac{\Phi_2(u)}{1 - \Phi_2(u_1)}. \quad (78)$$

Из (75)–(78) следует

$$0 < -\frac{d}{du} \ln \Phi_1(u) < \frac{u\Phi_2(u)}{1 - \Phi_2(u_1)}, \quad u > u_1.$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_2(u) < 1/u^2$. Таким образом,

$$0 < -\frac{d}{du} \ln \Phi_1(u) < \frac{1}{(1 - \Phi_2(u_1))u},$$

а это равносильно утверждению леммы.

Лемма 16. Для любых $0 < u_1 < u_2$

$$\frac{1 - \Phi(u_2)}{1 - \Phi(u_1)} > \exp \left\{ \frac{(u_1 - u_2)u_2}{\Psi(u_1)} \right\}. \quad (79)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = \ln(1 - \Phi(x))$. Очевидно, $g'(x) = -\Phi'(x)/(1 - \Phi(x)) = -x/\Psi(x)$. Функция $\Psi(x)$ возрастает (см. доказательство леммы 15). Поэтому для $u_2 > x > u_1$

$$-g'(x) < \frac{u_2}{\Psi_1(u_1)}.$$

Из этой оценки легко следует утверждение леммы.

Положим $\lambda(x) = (1 - ax)e^{-cx^3}(1 - \Phi(x))$, где a и c — некоторые постоянные.

Лемма 17. Если $a > 0$, то функция $\lambda(x)$ выпукла при $0 < x \leq 1/a$.

Доказательство. Очевидно, $\lambda(x) = e^{g(x)}$, где $g(x) = \ln(1 - ax) + \ln(1 - \Phi(x)) - cx^3$. Нетрудно видеть, что

$$g'(x) = -3cx^2 - \frac{a}{1 - ax} - \frac{1}{\Phi_1(x)},$$

$$g''(x) = -6cx - \frac{a^2}{(1 - ax)^2} - \frac{1}{\Phi_1^2(x)} + \frac{x}{\Phi_1(x)}.$$

Если $0 < x \leq 1/a$, то $g'^2(x) > 6cx + a^2(1 - ax)^{-2} + 1/\Phi_1^2(x)$. Таким образом, при $0 \leq x \leq 1/a$ имеем $g'^2(x) + g''(x) > 0$ и, следовательно, $\lambda''(x) = (g'^2(x) + g''(x))e^{g(x)} \geq 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 18. Для любого $0 < x < 1$

$$e^{-x-x^2/(1-x)} < 1 - x. \quad (80)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $1/(1+y) > e^{-y}$, т.е.

$$e^{-y} < 1 - \frac{y}{1+y}. \quad (81)$$

Полагая $x = y/(1+y)$, имеем $y = x/(1-x) = x + x^2/(1-x)$. Подставляя это выражение в (81), мы получаем нужный результат.

Лемма 19. Если выполнено условие $\max_j \sigma_j < B\varepsilon$, то для любого $h > 0$

$$\left| h \int_0^\infty e^{-hx} \left(\mathbf{P}\{S < x\} - \Phi\left(\frac{x}{B}\right) \right) dx \right| < \frac{L(\varepsilon)}{6\sqrt{2\pi}(1 - 0,61L^{2/3}(\varepsilon))^{3/2}} + \frac{2,473 C^2 h}{\pi B^5} + \frac{L^{2/3}}{\pi} (0,607e^{-0,82L^{-2/3}} + 0,304e^{-1,64L^{-2/3}}) + L^2 e^{-0,225L^{-2}}, \quad (82)$$

где $L(\varepsilon) = C/B_\varepsilon^3$, $B_\varepsilon^2 = (1 - \varepsilon^2) B^2$.

Доказательство. Прежде всего,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-hx} \left(\Phi\left(\frac{x}{B}\right) - \mathbf{P}\{S < x\} \right) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(t) - e^{-B^2 t^2/2}}{it(h+it)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|t| < \tau_1} \frac{g(t) - e^{-B^2 t^2/2}}{it(h+it)} dt + \int_{\tau_1 < |t| \leq \tau_2} \frac{g(t) dt}{it(h+it)} \right. \\ &\quad + \int_{\tau_2 < |t| < \tau_3} \frac{g(t) dt}{it(h+it)} + \int_{|t| > \tau_3} \frac{g(t) dt}{it(h+it)} \\ &\quad \left. - \int_{|t| > \tau_1} \frac{e^{-B^2 t^2/2}}{it(h+it)} dt \right) = \sum_1^5 I_j. \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь $g(t) = \mathbf{E}e^{itS}$, $\tau_1 = (6/C)^{1/3}$, $\tau_2 = 1,5 B^2/C$, $\tau_3 = 2,4 B^2/C$. Для любой характеристической функции $f(t)$

$$|f(t)| < \exp\left\{\frac{1}{2}(|f(t)|^2 - 1)\right\}.$$

Отсюда

$$|\mathbf{E}e^{itX}| < \exp\left\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{\beta|t|^3}{6}\right\}, \quad (84)$$

поскольку $|f(t)|^2 < 1 - \sigma^2 t^2 + \beta|t|^3/3$. Используя теперь неравенство $|\prod_1^n a_j - \prod_1^n b_j| < \sum_{j=1}^n |a_j - b_j| \prod_{k=1}^{j-1} |a_k| \prod_{l=j+1}^n |b_l|$, имеем

$$\left| g(t) - e^{-B^2 t^2/2} \right| < \frac{C|t|^3}{6} \exp\left\{-\frac{B_\varepsilon^2 t^2}{2} + \frac{C|t|^3}{6}\right\}. \quad (85)$$

Несложные вычисления показывают, что при $|t| < \tau_1$

$$\frac{B_\varepsilon^2 t^2}{2} - \frac{C|t|^3}{6} > \frac{B_\varepsilon^2}{2} (1 - 0,61L^{2/3}(\varepsilon)). \quad (86)$$

Из (85) и (86) следует оценка

$$|I_1| < \frac{L(\varepsilon)}{6\sqrt{2\pi}(1 - 0,61L^{2/3}(\varepsilon))^{3/2}h}. \quad (87)$$

В силу (84)

$$\pi h |I_2| < \int_{\tau_1 < t < \tau_2} \exp\left\{-\frac{B^2 t^2}{2} + \frac{Ct^3}{6}\right\} \frac{dt}{t} < \int_{t > \tau_1} e^{-B^2 t^2/4} \frac{dt}{t} < \frac{2e^{-B^2 \tau_1^2/4}}{B^2 \tau_1^2}.$$

Отсюда

$$|I_2| < \frac{2}{6^{2/3}\pi h} L^{2/3} e^{-6^{2/3}/4L^{-2/3}} < \frac{0,607}{\pi h} L^{2/3} e^{-0,82L^{-2/3}}. \quad (88)$$

Аналогично,

$$|I_3| < \frac{L^2}{\pi h} e^{-0,225L^{-2}}, \quad |I_4| < \frac{0,304}{\pi h} L^{2/3} e^{-1,64L^{-2/3}}. \quad (89)$$

Используя (84), получаем оценку

$$\int_{t>\tau_2} \frac{|g(t)| dt}{t^2} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s_k^2} \int_{\Delta_k} |g(t)| dt, \quad (90)$$

где $s_k = \tau_2 + 1,3kB^2/C$, $\Delta_k = [s_k, s_{k+1})$. В силу леммы 3 из работы [15]

$$\int_{\Delta_k} |g(t)| dt < \frac{5,86}{B}. \quad (91)$$

С другой стороны,

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{s_k^2} < 0,422 \frac{C^2}{B^4}. \quad (92)$$

Из (90)–(92) следует

$$|I_5| < 2,473 \frac{C^2}{\pi B^5}. \quad (93)$$

Комбинируя тождество (83) и оценки (87)–(89), (93), мы получаем желаемый результат.

3. Доказательство теоремы 1. Поскольку $X_j(y) \leq X_j$, то

$$\mathbf{P}\{S > x\} \geq \mathbf{P}\{S(y) > x\}, \quad (94)$$

где $S(y) = \sum X_j(y)$. Пусть $G(x; y) = \mathbf{P}\{S(y) < x\}$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{S(y) > x\} = R(h, y) \int_x^{\infty} e^{-hu} G_h(du),$$

где $R(h, y) = \mathbf{E}e^{hS(y)} = \prod r_j(h, y)$, $G_h(du) = e^{hu} G(du; y)/R(h, y)$. Полагая $\bar{G}_h(u) = G_h(u+x)$, имеем

$$\mathbf{P}\{S(y) > x\} = R(h, y) e^{-hx} \int_0^{\infty} e^{-hu} d\bar{G}_h(u). \quad (95)$$

Функция распределения G_h является сверткой функций распределения $F_j(u; h, y)$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $F(du; h, y) = e^{hu} F(du; y)/r(h, y)$. Нетрудно видеть, что $\int_{-\infty}^y u F(du; y) = m(h, y)$, $\int_{-\infty}^y (u - m(h, y))^2 F(du; y) = \sigma^2(h, y)$. Следовательно, функции распределения G_h соответствуют математическое ожидание $M(h, y) = \sum m_j(h, y)$ и дисперсия $B^2(h, y) = \sum b_j^2(h, y)$.

В дальнейшем будем считать, что y удовлетворяет условию (48). Положим теперь $h = h(x, y)$. Тогда, согласно определению, $x = M(h, y)$ (см. п. 1).

Не нарушая общности, можно считать, что

$$x \geq 1,7. \quad (96)$$

Действительно, согласно оценке Берри-Эссеена,

$$P\{S > x\} > (1 - \Phi(x)) \left(1 - \frac{c_0 L}{1 - \Phi(x)}\right), \quad (97)$$

где $c_0 < 0,7915$ (см. [11], а также [12, с. 229]). С другой стороны, $c_3(\gamma)$ в (18) не может быть меньше 9,79. Поэтому оценка (97) заведомо точнее (18), если $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2} > c_0/9,79$, т.е. $x < 1,7$.

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-hu} d\bar{G}_h(u) &= \int_0^\infty e^{-hu} d\Phi\left(\frac{u}{B(h,y)}\right) + h \int_0^\infty e^{-hu} r_h(u) du - r_h(0) \\ &= I_1 + hI_2 - r_h(0), \end{aligned} \quad (98)$$

где $r_h(u) = \bar{G}_h(u) - \Phi(u/B(h,y))$. Нетрудно показать, что

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{h^2 B^2(h,y)/2} \int_{hB(h,y)}^\infty e^{-u^2/2} du = \frac{\Phi_1(hB(h,y))}{\sqrt{2\pi}}. \quad (99)$$

Пусть $\Delta(h,y) = hB(h,y) - M(h,y)/B(y)$. Предположим, что $\Delta(h,y) > 0$. В силу леммы 14, а также равенства (48)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(h,y) B(y)}{x} &< \frac{x(1,686C + 2,78\alpha \sum \sigma_j^3)}{(1 - 4\gamma)^2 B^4} \\ &< \frac{x((1,686 + 20\gamma)C + 6,26\alpha \sum \sigma_j^3)}{B^4}. \end{aligned}$$

Полагая в лемме 15 $u_1 = x/B(y)$, $u_2 = hB(h,y)$ и используя предыдущую оценку, имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} I_1 &= \Phi_1(hB(h,y)) > \Phi_1\left(\frac{x}{B(y)}\right) \\ &\times \exp\left\{-\frac{((1,686 + 20\gamma)C + 6,26\alpha \sum \sigma_j^3)x}{B^4 \Psi(x/B)}\right\}. \end{aligned} \quad (100)$$

Мы учитывали здесь, что $\Psi(x/B) < \Psi(x/B(y))$. Пусть теперь $u_1 = x/B$, $u_2 = x/B(y)$. Подставляя эти значения в неравенство (74), находим, что

$$\Phi_1\left(\frac{x}{B(y)}\right) > \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right) \exp\left\{-\frac{1 - B/B(y)}{\Psi(x/B)}\right\}.$$

Используя (39) и (48), имеем

$$\frac{B}{B(y)} - 1 = \frac{B^2 - B^2(y)}{B(y)(B + B(y))} < \frac{C}{2yB^2(y)} < \frac{Cx}{2(1 - \gamma)(1 - 4\gamma) B^4}.$$

Таким образом,

$$\Phi_1\left(\frac{x}{B(y)}\right) > \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right) \left(1 - \frac{(1 + 6,76\gamma)Cx}{2\Psi(x/B) B^4}\right). \quad (101)$$

Из (100) и (101) следует

$$\sqrt{2\pi}I_1 > \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right) \exp\left\{-\frac{((2,186 + 23,38\gamma)C + 6,26\alpha \sum \sigma_j^3)x}{B^4\Psi(x/B)}\right\}. \quad (102)$$

Если $\Delta(h, y) < 0$, то $\Phi_1(hB(h, y)) > \Phi_1(x/B(y))$. Отсюда, используя (101), мы получаем, что при $\Delta(h, y) < 0$

$$\sqrt{2\pi}I_1 > \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right) \left(1 - \frac{(1 + 6,76\gamma)Cx}{2\Psi(x/B)B^4}\right). \quad (103)$$

Перейдем теперь к оценке I_2 . Для этого мы применим лемму 19 к сумме независимых случайных величин с функцией распределения $\bar{G}_h$. Нетрудно видеть, что ляпуновское отношение $L(h, y)$, соответствующее $\bar{G}_h$, равно $C(h, y)/B^3(h, y)$. Из леммы 11 следует, что при $\alpha^2 < 1/16e$

$$C(h, y) < 5,67C. \quad (104)$$

Положим $B_1^2(h, y) = \inf_j(B^2(h, y) - b_j^2(h, y))$. В силу леммы 13 $B_1^2(h, y) > 0,777(B^2 - \sup_j \sigma_j^2)$. Заметим, что вследствие (17) $x/B < 3\alpha(B/(4\max \sigma_j))$. Отсюда в силу (96)

$$\left(\frac{\max \sigma_j}{B}\right)^2 < \left(\frac{3}{4x}\right)^2 \alpha^2 < 0,005. \quad (105)$$

Таким образом,

$$B_1^2(h, y) > 0,773B^2. \quad (106)$$

Сравнивая (104) и (106), имеем

$$\frac{C^{2/3}(h, y)}{B_1^2(h, y)} < 4,15L^{2/3}. \quad (107)$$

Вследствие (17) и (96)

$$L < \frac{3}{64x} < 0,028. \quad (108)$$

Комбинируя (107) и (108), получаем после несложных вычислений

$$R_1 := \frac{L_1(h, y)}{6\sqrt{2\pi}(1 - 0,61L_1^{2/3}(h, y))^{3/2}} < 0,075L_1(h, y), \quad (109)$$

где $L_1(h, y) = C(h, y)/B_1^3(h, y)$.

В силу (65) и (105)

$$B_1^2(h, y) > 0,96B^2(1 - 2\gamma - 3,2\alpha^2). \quad (110)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{(1 - 2\gamma - 3,2\alpha^2)^{3/2}} < \frac{1}{(1 - 3,178\gamma)^{3/2}} < 1 + 6,3\gamma < 1,394. \quad (111)$$

Из (59), (110), (111) следует

$$L_1(h, y) < \frac{(2,96 + 18,7\gamma)C + 28,2\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \quad (112)$$

Сравнивая (109) и (112), получаем

$$R_1 < \frac{(0,24 + 1,515\gamma) C + 2,285\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \quad (113)$$

В силу (17), (43) и (48) $h(x, y) < x/(1 - 4\gamma) B^2 < \gamma B^2/C < B^2/16C$. Отсюда, учитывая (59) и (65), заключаем, что

$$\frac{hC^2(h, y)}{B^5(h, y)} < 1,08 \frac{2,782^2 C + (38 \cdot 2,782\alpha + 361\alpha^2) \sum \sigma_j^3}{16(1 - 3,178\gamma)^{5/2} B^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{2,473hC^2(h, y)}{\pi B^5(h, y)} < \frac{(0,412 + 4,89\gamma) C + 14,91\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \quad (114)$$

Подставляем теперь в правую часть (82) вместо L и $L(\varepsilon)$ соответственно $L(h, y)$ и $L_1(h, y)$. Первые два слагаемых оцениваются посредством (113) и (114). Что касается остальных, то, как показывают вычисления, ими можно пренебречь. В результате мы приходим к оценке

$$h|I_2| < \frac{(0,652 + 6,1\gamma) C + 17,195\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \quad (115)$$

Далее, согласно оценке Берри-Эсеена,

$$\sup_u |r_h(u)| < \frac{c_0 C(h, y)}{B^3(h, y)}. \quad (116)$$

Применяя теперь леммы 11 и 13, получаем

$$\begin{aligned} |r_h(0)| &< \frac{1,08c_0(2,782C + 19\alpha \sum \sigma_j^3)}{(1 - 2\gamma - 3,5\alpha^2)^{3/2} B^3} \\ &< \frac{(2,38 + 15\gamma) C + 22,65\alpha \sum \sigma_j^3}{B^3}. \end{aligned} \quad (117)$$

Между прочим, можно было бы воспользоваться неравенством (116) и для оценки hI_2 , поскольку $h|I_2| < \sup_u |r(u)|$.

Так до сих пор и поступали, начиная с основополагающей работы Крамера [14]. Однако при этом мы бы проиграли в точности. Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить оценки (115) и (117). В значительной степени потеря точности связана с тем, что оценка для c_0 , которой мы пользовались, не является оптимальной.

Продолжая доказательство, заметим, что в силу (38) и (54) при $e\alpha^2 < \gamma$, $\gamma < \frac{1}{16}$

$$|r(h, y) - 1| < \frac{1}{32}.$$

Отсюда, используя лемму 18 и неравенство $1 + x > e^{x-x^2/(1-x)}$, где $0 < x < \frac{1}{2}$, имеем

$$R(h, y) > \exp \left\{ Q(h, y) - \frac{32}{31} \sum (r_j(h, y) - 1)^2 \right\} \quad (118)$$

(определение $Q(h, y)$ см. перед леммой 5). Вследствие (31) и (55) $|\tau(h, y) - 1| < eh^2\sigma^2/2 \vee \sigma^2h/y \leq e\sigma^2/(2y^2)$. Отсюда, используя (31) и условия (48), (49), имеем

$$\begin{aligned} \sum (r_j(h, y) - 1)^2 &< \left(\frac{e}{2}\right)^2 y^{-4} \max_l \sigma_l \sum \sigma_j^3 < \frac{x^4 \max_l \sigma_l \sum \sigma_j^3}{(1 - 4\gamma)^4 B^8} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \\ &< \frac{1,85\alpha x^3 \sum \sigma_j^3}{(1 - 4\gamma)^3 B^6}. \end{aligned} \quad (119)$$

Из (51), (118), (119) следует

$$e^{-hx} R(h, y) > \exp \left\{ -\frac{x^2}{2B^2} - \frac{(1,5C + 1,91\alpha \sum \sigma_j^3) x^3}{(1 - 4\gamma)^3 B^6} \right\}. \quad (120)$$

Комбинируя (94), (95), (98), (102), (103), (115), (117), (120), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S > x\} &> \left[\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B}\right)\right) \exp \left\{ -\frac{((2,186 + 23,38\gamma)C + 6,26\alpha \sum \sigma_j^3) x}{B^4 \Psi(x/B)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-x^2/2B^2}}{B^3} \left((3,032 + 21,1\gamma)C + 39,845\alpha \sum \sigma_j^3 \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(1,5C + 1,98\alpha \sum \sigma_j^3) x^3}{(1 - 4\gamma)^3 B^6} \right\}. \end{aligned} \quad (121)$$

Очевидно,

$$e^{-x^2/2B^2} = \sqrt{2\pi} \frac{(1 - \Phi(x/B)) x}{\Psi(x/B) B}. \quad (122)$$

Из (121) и (122) следует утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть числа γ и $\alpha > 0$ связаны равенством $\gamma = \alpha^2$. Предположим, что выполняется неравенство

$$x < \frac{\gamma B^4}{C}. \quad (123)$$

Определим

$$N(x) = \left\{ j: \sigma_j < \frac{\alpha B^2}{3x} \right\}.$$

Положим $S_1 = \sum' X_j$, $S_2 = \sum'' X_j$. Здесь и ниже $\sum' = \sum_{j \in N(x)}$, $\sum'' = \sum_{j \notin N(x)}$. Пусть $B_1^2 = \sum' \sigma_j^2$, $B_2^2 = \sum'' \sigma_j^2$, $C_1 = \sum' \beta_j$. Тогда

$$B_2^2 < \frac{3xC}{\alpha B^2} < 3 \frac{\gamma B^2}{\alpha} = 2\sqrt{\gamma} B^2. \quad (124)$$

Если $\gamma < \frac{1}{14^2}$, то $B_2^2 < 3B^2/14$, т.е.

$$B_1^2 > \frac{11}{14} B^2. \quad (125)$$

Положим $\gamma_1 = 3,5\gamma$. Очевидно,

$$\frac{(1 - 4\gamma_1)\alpha B_1^2}{\max_{j \in N(x)} \sigma_j} \geq \frac{33(1 - 14\gamma)x}{14} > 2x,$$

если $\gamma \leq 1/14^2$. Далее, при $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\frac{\gamma B^4}{C} < \left(\frac{14}{11}\right)^2 \frac{\gamma_1 B_1^4}{3,5C_1} < \frac{(1 - 4\gamma_1)\gamma_1 B_1^4}{2C_1}.$$

Таким образом, при $\gamma < \frac{1}{14^2}$ ($\gamma_1 < \frac{1}{16}$) выполняется условие

$$2x < (1 - 4\gamma_1) B_1^2 \left(\frac{\gamma_1 B_1^2}{C_1} \wedge \frac{\alpha}{\max_{j \in N(x)} \sigma_j} \right),$$

т.е. для S_1 и x , удовлетворяющих неравенству (123), выполняется условие (17) с $\gamma = \gamma_1$.

Применяя теперь к S_1 следствие 1, мы заключаем, что при $B_1 < x < \omega = (1 - 4\gamma_1) B_1^2 (\gamma_1 B_1^2 / C_1 \wedge \alpha / \max_{j \in N(x)} \sigma_j)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_1 > x\} &> \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B_1}\right)\right) \exp\left\{-\frac{c_1(\alpha, \gamma_1) C_1 x^3}{B_1^3}\right\} \\ &\times \left(1 - \frac{c_2(\alpha, \gamma_1) C_1 x}{B_1^4 \Psi(1)}\right) \equiv f(x), \end{aligned}$$

где $c_j(\cdot, \cdot)$ определяются равенствами (22). Отсюда, обозначая $\mathbf{P}\{S_i \leq x\} = G_i(x)$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S > x\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (G_1(x - u)) dG_2(u) \\ &> \int_{u_1}^{u_2} f(x - u) dG_2(u) + f(x) (1 - G_2(u_2)), \end{aligned} \quad (126)$$

где $u_1 = x - \omega$, $u_2 = x - B_1$. Согласно лемме 17, функция $f(x - u)$ выпукла по u при $u_1 \leq u < x$. Следовательно, по неравенству Юнга

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x - u) dG_2(u) > pf(x - q), \quad (127)$$

где $p = G_2(u_2) - G_2(u_1)$, $q = \int_{u_1}^{u_2} u dG_2(u) / p$. Если $3B/2 < x < \omega/2$, то $|u_1| > \omega/2 > 3B/2$ и, согласно (124),

$$G_2(u_1) < \frac{B_2^2}{u_1^2} < \frac{8}{9} \frac{x C}{\alpha B^4}. \quad (128)$$

Оценим теперь величину q . Если $x > B$, то в силу (124)

$$-\int_{u_1}^{u_2} u dG_2(u) < \frac{B_2^2}{u_2} < \frac{3B_2^2}{x} < \frac{6C}{\sqrt{\gamma} B^2}. \quad (129)$$

Далее, $p > 1 - B_2^2/u_1^2 \wedge u_2^2$. Согласно (124), при $3B/2 < x < \omega/2$

$$\frac{B_2^2}{u_1^2} < \frac{4}{9} \sqrt{\gamma}, \quad \frac{B_2^2}{u_2^2} < \frac{4B_2^2}{B^2} < 4\sqrt{\gamma}.$$

Таким образом,

$$p > 1 - 4\sqrt{\gamma} > 0,465, \quad (130)$$

если $3B/2 < x < \omega/2$, $\gamma < \frac{1}{56}$. Из (129) и (130) следует

$$-q < \frac{12,91C}{\sqrt{\gamma}B^2} = \eta. \quad (131)$$

Используя лемму 16 и оценку (131), заключаем, что при $3B/2 < x < \omega/2$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\begin{aligned} f(x-q) &> \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B_1}\right)\right) \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{\Psi(3/2)}\left(\frac{x\eta}{B_1^2} + \frac{\eta^2}{B_1^2}\right) - \frac{c_1(\alpha, \gamma_1)(x+\eta)^3 C}{B_1^6}\right\} \\ &\times \left(1 - \frac{c_2(\alpha, \gamma_1)(x+\eta)C}{B_1^4 \Psi(3/2)}\right). \end{aligned} \quad (132)$$

Согласно условию (123), при $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\frac{Cx}{\sqrt{\gamma}B^4} < \sqrt{\gamma} < \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Отсюда $L/\sqrt{\gamma} < \frac{1}{3\sqrt{14}}$, поскольку $x > 3B/2$. Следовательно,

$$\frac{\eta}{B} < 1,16, \quad \frac{\eta^2}{B^2} < 1,16 \frac{\eta}{B} < \frac{14,98C}{\sqrt{\gamma}B^3}. \quad (133)$$

В силу (133) и (125)

$$\frac{x\eta + \eta^2}{B_1^2} < 63,76 \frac{Cx}{\sqrt{\gamma}B^4} < 27,89 \frac{Cx^3}{\sqrt{\gamma}B^6}, \quad (134)$$

$$x + \eta < x + 1,16B < 1,774x. \quad (135)$$

Из (132) в силу (125), (134), (135) вытекает

$$\begin{aligned} f(x-q) &> \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B_1}\right)\right) \exp\left\{-\left(\frac{36,07}{\sqrt{\gamma}} + 18,85c_1(\alpha, \gamma_1)\right) \frac{Cx^3}{B^6}\right\} \\ &\times \left(1 - \frac{4c_2(\alpha, \gamma_1)Cx}{\Psi(1)B^4}\right). \end{aligned} \quad (136)$$

Из (124), (125) и леммы 16 следует

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{x}{B_1}\right) &\geq \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B}\right)\right) \exp\left\{-\frac{B_2^2 x^2}{B_1^2 B(B_1 + B_2)\Psi(3/2)}\right\} \\ &> \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B}\right)\right) \exp\left\{-\frac{3\sqrt{3}Cx^3}{\sqrt{2\gamma}B^6\Psi(3/2)}\right\}, \end{aligned} \quad (137)$$

если $3B/2 < x < \gamma B^4/C$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$. Комбинируя оценки (126), (128), (136), (137), мы заключаем, что при $3B/2 < x < \gamma B^4/C$, $\gamma < \frac{1}{14^2}$

$$\mathbf{P}\{S > x\} > \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{B}\right)\right) \exp\left\{-\frac{c'_1(\alpha, \gamma)Cx^3}{B^4}\right\} \left(1 - \frac{c'_2(\alpha, \gamma)Cx}{B^4}\right),$$

где

$$c'_1(\alpha, \gamma) = 18,85c_1(\alpha, 3,5\gamma) + \frac{3,68}{\sqrt{\gamma}\Psi(3/2)} + \frac{36,07}{\sqrt{\gamma}},$$

$$c'_2(\alpha, \gamma) = \frac{4c_2(\alpha, 3,5\gamma)}{\Psi(1)} + \frac{0,89}{\sqrt{\gamma}}, \quad \alpha = \sqrt{\gamma}.$$

Отсюда, подставляя вместо $c_1(\cdot, \cdot)$ и $c_2(\cdot, \cdot)$ их выражения (22), мы получаем после не очень сложных вычислений требуемое неравенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966, 587 с.
2. Kolmogoroff A. N. Über das Gesetz des iterierten Logarithmus. — Math. Ann., 1929, B. 101, S. 126–135.
3. Feller W. Generalization of a probability limit theorem of Cramer. — Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 54, № 3, p. 361–372.
4. Lenart C. On certain theorems of Berry and a limit theorem of Feller. — Mat. casopis, 1968, v. 18, № 1, p. 59–75.
5. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
6. Розовский Л. В. Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 134–143.
7. Statulevicius V. A. On large deviations. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1966, B. 6, H. 2, S. 133–144.
8. Архангельский А. Н. Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 625–635.
9. Нагаев С. В. Некоторые уточнения вероятностных неравенств. — Вестник МГУ, 1996, № 6, с. 64–66.
10. Nagaeв S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
11. Шиганов И. С. Об уточнении верхней оценки константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
12. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
13. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 231–254.
14. Cramer H. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. — Actualités Sci. Indust., 1938, № 736.
15. Нагаев С. В., Ходжабагли С. С. Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 655–665.

Поступила в редакцию
2.VII.1998