Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Сунклодас, О нормальной аппроксимации для случайных полей с сильным перемешиванием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 60–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:30:24

© 2007 г.

СУНКЛОДАС Й.*

О НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ
СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С СИЛЬНЫМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

В настоящей статье исследуется нормальная аппроксимация для случайных полей с сильным перемешиванием. А именно, оценивается разность $|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)|$, где Z_V — сумма нормированных случайных величин с сильным перемешиванием (без предположения стационарности) по любому конечному множеству V целочисленной решетки $\mathbf{Z}^d$, N — стандартная нормальная случайная величина, а функция $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ конечна и удовлетворяет условию Липшица. При дополнительном условии верхние оценки величины $|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)|$ в теоремах 3 и 4 имеют порядок $O(|V|^{-1/2})$.

Ключевые слова и фразы: нормальная аппроксимация, ограниченная метрика Липшица, случайное поле, сильное перемешивание, метод Стейна.

1. Введение. Пусть $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$ — случайное поле вещественных случайных величин X_a , индексированных точками $a \in \mathbf{Z}^d$ целочисленной решетки $\mathbf{Z}^d \subset \mathbf{R}^d$ (здесь и далее $\mathbf{R}$ — вещественная прямая). Для подмножеств $U \subset \mathbf{Z}^d$ через $\mathcal{F}_U$ обозначим σ -алгебру, порожденную всеми случайными величинами X_a , где $a \in U$.

Для любых подмножеств $U, V \subset \mathbf{Z}^d$ определим расстояние

$$d(U, V) = \inf \{ \|a - b\| : a \in U, b \in V \},$$

где $\|a\| = \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq d\}$ для $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$. Через $|U| = \text{card } U$ обозначим число элементов множества U .

Для подмножеств $U, V \subset \mathbf{Z}^d$ введем коэффициент сильного перемешивания

$$\bar{\alpha}(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}_V) = \sup \left\{ |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| : A \in \mathcal{F}_U, B \in \mathcal{F}_V \right\}.$$

Далее будем предполагать, что для $U, V \subset \mathbf{Z}^d$ коэффициент сильного перемешивания $\bar{\alpha}(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}_V)$ удовлетворяет условию

$$\bar{\alpha}(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}_V) \leq f(|U| + |V|) \alpha(d(U, V)), \quad (1)$$

* Институт математики и информатики, ул. Академийос, 4, LT 08663, Вильнюс, Литва; e-mail: sunkl@ktl.mii.lt

где $f(n)$ — неотрицательная неубывающая функция, определенная на целых положительных числах $n \geq 2$, и $\alpha(r)$ — неотрицательная функция, определенная на целых положительных числах $r \geq 1$, такая, что $\alpha(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Если условие (1) выполнено, то будем говорить, что случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания.

Рассмотрим пространство $\text{BL}(\mathbf{R})$ ограниченных функций $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию Липшица, т.е. таких, что

$$\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |h(x)| < \infty \quad \text{и} \quad \text{Lip}(h) = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|} < \infty.$$

Для функций $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$ положим

$$\|h\|_{\text{BL}} = \|h\|_\infty + \text{Lip}(h).$$

Для фиксированного непустого множества $V \subset \mathbf{Z}^d$ с $|V| < \infty$ положим

$$Z_V = \sum_{a \in V} A_a, \quad A_a = \frac{X_a}{B_V}, \quad B_V^2 = \mathbf{E} \left(\sum_{a \in V} X_a \right)^2, \quad L_3 = \sum_{a \in V} \mathbf{E} |A_a|^3.$$

Здесь и далее $B_V > 0$.

В настоящей статье мы оцениваем разность

$$|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)|$$

для вещественного случайного поля $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$ с сильным перемешиванием и функции $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$, здесь и далее N — стандартная нормальная случайная величина с функцией распределения $\Phi(x)$ и плотностью $\varphi(x) = \Phi'(x)$.

На сегодняшний день имеются разнообразные методы получения оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин (см., например, [8] и [13], где полученные оценки имеют оптимальный порядок, а также [9], [12], [14] и книги [2] и [7]).

Оценки ограниченной метрики Липшица рассматривались, например, в работах [1], [10], [11].

Далее, буквой C обозначим положительную абсолютную постоянную, а символом $C(\cdot)$ — положительный конечный множитель (не всегда один и тот же), зависящий только от величин, указанных в скобках.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1–4.

Положим

$$\lambda_d = \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} \alpha(r) \quad \text{и} \quad \lambda_{d,\delta} = \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} (\alpha(r))^{(\delta-1)/(2+\delta)}.$$

Теорема 1. Пусть вещественное случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geq 1$, удовлетворяет условию сильного перемешивания (1), $\lambda_d < \infty$, $\mathbf{E}X_a = 0$ и $\mathbf{P}\{|X_a| \leq M\} = 1$ для всех $a \in V$, где $M > 0$ — некоторая неслучайная постоянная. Тогда для любой функции $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$

$$|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)| \leq \|h\|_{\text{BL}} (CL_3 + C(d) \lambda_d M^3 |V| f(|V|) B_V^{-3}). \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть вещественное случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geq 1$, удовлетворяет условию сильного перемешивания (1), $\lambda_{d,\delta} < \infty$, $\mathbf{E}X_a = 0$ для всех $a \in V$ и $d_{2+\delta} = \max_{a \in V} \mathbf{E}|X_a|^{2+\delta} < \infty$, где $\delta > 1$. Тогда для любой функции $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$

$$|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)| \leq \|h\|_{\text{BL}} \left(CL_3 + C(d, \delta) \lambda_{d,\delta} d_{2+\delta}^{3/(2+\delta)} \times |V| \max\{1, (f(|V|))^{\delta/(2+\delta)}\} B_V^{-3} \right). \quad (3)$$

Приведем аналоги теорем 1 и 2, когда коэффициенты сильного перемешивания определены следующим образом: для $n \in \mathbf{N}$, $k, l \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$

$$\alpha_{k,l}(n) = \sup \left\{ |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| : A \in \mathcal{F}_U, B \in \mathcal{F}_V, \right. \\ \left. U, V \subset \mathbf{Z}^d, |U| \leq k, |V| \leq l, d(U, V) \geq n \right\},$$

где $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Положим

$$\Lambda_d = \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} \alpha_{2,\infty}(r) \quad \text{и} \quad \Lambda_{d,\delta} = \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} (\alpha_{2,\infty}(r))^{(\delta-1)/(2+\delta)},$$

где $\alpha_{k,\infty}(n) = \sup_l \alpha_{k,l}(n)$ (см., например, [4] или [7]).

Теорема 3. Пусть вещественное случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geq 1$, с $\mathbf{E}X_a = 0$ и $\mathbf{P}\{|X_a| \leq M\} = 1$ для всех $a \in V$, где $M > 0$ — некоторая неслучайная постоянная, удовлетворяет условию $\Lambda_d < \infty$. Тогда для любой функции $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$

$$|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)| \leq \|h\|_{\text{BL}} (CL_3 + C(d) \Lambda_d M^3 |V| B_V^{-3}). \quad (4)$$

Теорема 4. Пусть вещественное случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geq 1$, с $\mathbf{E}X_a = 0$ для всех $a \in V$ и $d_{2+\delta} = \max_{a \in V} \mathbf{E}|X_a|^{2+\delta} < \infty$, где $\delta > 1$, удовлетворяет условию $\Lambda_{d,\delta} < \infty$. Тогда для любой функции $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$

$$|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)| \leq \|h\|_{\text{BL}} (CL_3 + C(d) \Lambda_{d,\delta} d_{2+\delta}^{3/(2+\delta)} |V| B_V^{-3}). \quad (5)$$

Заметим, что стационарность случайных полей в теоремах 1–4 не требуется.

В частном случае, когда $B_V^2 \geq c_0|V|$, где c_0 — положительная постоянная, верхние оценки величины $|\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)|$ в теоремах 3 и 4 имеют порядок $O(|V|^{-1/2})$.

Доказательство теорем 1–4 основано на методе Стейна [9] и равенстве (8) ниже.

2. Вспомогательные результаты. Здесь и далее f' означает производную первого порядка функции f . Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение, предложенное Ч. Стейном [9]:

$$f'(y) - yf(y) = h(y) - \mathbf{E}h(N). \quad (6)$$

Лемма 1 (см. [1] или [10]). Пусть f удовлетворяет уравнению (6), где данная функция $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$. Тогда для любых $y, z \in \mathbf{R}$

$$|f'(y+z) - f'(y)| \leq [(c_1 + c_2) \|h_0\|_\infty + 2 \text{Lip}(h)] \cdot |z| = D|z|, \quad (7)$$

где $h_0(y) = h(y) - \mathbf{E}h(N)$, $c_1 = \sup_{x \geq 0} \Xi(x)$, $c_2 = \sup_{x \geq 0} x(1 - x\Xi(x))$ и $\Xi(x) = (1 - \Phi(x))/\varphi(x)$. Кроме того, $c_1 \leq \sqrt{\pi/2}$ и $c_2 \leq \frac{1}{2}$.

Чтобы оценить разность $\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(N)$, введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} t_a^{(r)} &= \sum_{b \in V: \|b-a\|=r} A_b \quad (t_a^{(0)} = A_a), & Z_V &= \sum_{r \geq 0} t_a^{(r)}, \\ T_a^{(m)} &= Z_V - \sum_{r=0}^m t_a^{(r)} \quad (T_a^{(-1)} = Z_V), & u_a^{(r)} &= A_a t_a^{(r)} - \mathbf{E}A_a t_a^{(r)}. \end{aligned}$$

Отметим, что в приводимой ниже лемме 2 никакие условия зависимости на случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$ не накладываются.

Лемма 2. Пусть случайное поле $\{X_a, a \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geq 1$, удовлетворяет условию $\mathbf{E}X_a = 0$ для всех $a \in V$, и пусть функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ($\mathbf{R}$ — вещественная прямая, $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость) имеет непрерывную производную первого порядка f' . Тогда

$$\sum_{a \in V} \mathbf{E}A_a f(Z_V) = \mathbf{E}f'(Z_V) + E_1 + \dots + E_7, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{a \in V} \sum_{r \geq 1} \mathbf{E} \left\{ A_a \int_0^{t_a^{(r)}} [f'(T_a^{(r)} + y) - f'(T_a^{(r)})] dy \right\}, \\ E_2 &= \sum_{a \in V} \mathbf{E} \left\{ A_a \int_0^{A_a} [f'(T_a^{(0)} + y) - f'(T_a^{(0)})] dy \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 &= \sum_{a \in V} \sum_{r \geq 1} \sum_{q=r+1}^{2r} \mathbf{E}\{u_a^{(r)}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})]\}, \\
E_4 &= \sum_{a \in V} \sum_{r \geq 1} \sum_{q \geq 2r+1} \mathbf{E}\{u_a^{(r)}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})]\}, \\
E_5 &= - \sum_{a \in V} \sum_{r \geq 1} \mathbf{E}A_a t_a^{(r)} \sum_{q=0}^r \mathbf{E}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})], \\
E_6 &= \sum_{a \in V} \sum_{q \geq 1} \mathbf{E}\{u_a^{(0)}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})]\}, \\
E_7 &= - \sum_{a \in V} \mathbf{E}A_a^2 \mathbf{E}[f'(Z_V) - f'(T_a^{(0)})],
\end{aligned}$$

при условии, что моменты, присутствующие в левой и правой части равенства (8), являются конечными.

Доказательство. Для всех $r = 0, 1, 2, \dots$

$$f(T_a^{(r-1)}) - f(T_a^{(r)}) - f'(T_a^{(r)}) t_a^{(r)} = \int_0^{t_a^{(r)}} [f'(T_a^{(r)} + y) - f'(T_a^{(r)})] dy. \quad (9)$$

Последовательно применяя (9) при $r = 0, 1, 2, \dots$, получаем, что для всех $a \in V$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}A_a f(Z_V) &= \sum_{r \geq 1} \mathbf{E}\left\{A_a \int_0^{t_a^{(r)}} [f'(T_a^{(r)} + y) - f'(T_a^{(r)})] dy\right\} \\
&\quad + \mathbf{E}\left\{A_a \int_0^{A_a} [f'(T_a^{(0)} + y) - f'(T_a^{(0)})] dy\right\} \\
&\quad + \sum_{r \geq 1} \mathbf{E}A_a t_a^{(r)} f'(T_a^{(r)}) + \mathbf{E}A_a^2 f'(T_a^{(0)}). \quad (10)
\end{aligned}$$

Перепишем слагаемое $\mathbf{E}A_a t_a^{(r)} f'(T_a^{(r)})$ из (10) в следующем виде:

$$\mathbf{E}A_a t_a^{(r)} f'(T_a^{(r)}) = \mathbf{E}\{u_a^{(r)} f'(T_a^{(r)})\} + \mathbf{E}A_a t_a^{(r)} \mathbf{E}f'(T_a^{(r)}).$$

Тогда, прибавляя и вычитая, из суммы $T_a^{(r)}$ в выражении $\mathbf{E}\{u_a^{(r)} f'(T_a^{(r)})\}$ выбрасываем случайную величину $t_a^{(r+1)}$. Из оставшейся суммы $T_a^{(r+1)}$ выбрасываем случайную величину $t_a^{(r+2)}$, и так далее до тех пор, пока вместо $T_a^{(r)}$ не получим нуль. Так как $\mathbf{E}u_a^{(r)} = 0$ для всех $a \in V$, то находим, что для $r = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}A_a t_a^{(r)} f'(T_a^{(r)}) &= \sum_{q=r+1}^{2r} \mathbf{E}\{u_a^{(r)}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})]\} \\
&\quad + \sum_{q \geq 2r+1} \mathbf{E}\{u_a^{(r)}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})]\} \\
&\quad + \mathbf{E}A_a t_a^{(r)} \mathbf{E}f'(T_a^{(r)}). \quad (11)
\end{aligned}$$

Поскольку $u_a^{(0)} = A_a^2 - \mathbf{E}A_a^2$ и $\mathbf{E}u_a^{(0)} = 0$, то аналогично для всех $a \in V$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}A_a^2 f'(T_a^{(0)}) &= \sum_{q \geq 1} \mathbf{E}\{u_a^{(0)}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})]\} \\ &+ \mathbf{E}A_a^2 \mathbf{E}f'(Z_V) - \mathbf{E}A_a^2 \mathbf{E}[f'(Z_V) - f'(T_a^{(0)})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как для всех $r \geq 0$

$$\mathbf{E}f'(T_a^{(r)}) = \mathbf{E}f'(Z_V) - \sum_{q=0}^r \mathbf{E}[f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})], \quad (13)$$

то, подставляя (11), (13) и (12) в (10), затем суммируя по всем $a \in V$ и используя тот факт, что

$$\sum_{a \in V} \sum_{r \geq 0} \mathbf{E}A_a t_a^{(r)} = 1, \quad (14)$$

завершаем доказательство леммы 2.

Для оценки величин $E_1, \dots, E_7$ в правой части равенства (8) для сильно перемешанных случайных полей нам понадобится следующая оценка ковариации $\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$ вещественных случайных величин X и Y .

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ — σ -подалгебры σ -алгебры $\mathcal{F}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Коэффициент сильного перемешивания между $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ обозначим $\bar{\alpha}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$:

$$\bar{\alpha}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \sup \left\{ |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| : A \in \mathcal{G}, B \in \mathcal{H} \right\}.$$

Лемма 3 (см. [6] и [5, с. 276]). Пусть X и Y — вещественные случайные величины, X — $\mathcal{G}$ -измерима, а Y — $\mathcal{H}$ -измерима. Тогда:

1) если $\mathbf{P}\{|X| \leq C_1\} = \mathbf{P}\{|Y| \leq C_2\} = 1$, то

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq 4C_1C_2\bar{\alpha}(\mathcal{G}, \mathcal{H}); \quad (15)$$

2) если $\mathbf{E}|X|^q < \infty$, $\mathbf{E}|Y|^r < \infty$, $q, r > 1$, $q^{-1} + r^{-1} < 1$, то

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq 8(\mathbf{E}|X|^q)^{1/q}(\mathbf{E}|Y|^r)^{1/r}(\bar{\alpha}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))^{1-q^{-1}-r^{-1}}. \quad (16)$$

3. Доказательства теорем 1–4. Отправной точкой при доказательстве теорем 1–4 является равенство (8).

Пусть выполнены условия теоремы 1.

Оценивая слагаемые в правой части тождества (8), мы часто будем пользоваться следующим фактом: для любого фиксированного $a \in \mathbf{Z}^d$, $d \geq 1$,

$$|\{b \in \mathbf{Z}^d : \|a - b\| = r\}| \leq 2d(2r + 1)^{d-1}. \quad (17)$$

Кроме того, заметим, что если функция $h \in \text{BL}(\mathbf{R})$, то решение f уравнения (6) удовлетворяет неравенству (7). Этим фактом мы также часто будем пользоваться. Согласно условиям теоремы 1, случайные величины X_a , $a \in V$, с вероятностью 1 ограничены константой M . Поэтому, используя (7) и (17), получаем, что для любого $a \in V$ и всех $r \geq 0$ с вероятностью 1

$$\left| \int_0^{t_a^{(r)}} [f'(T_a^{(r)} + y) - f'(T_a^{(r)})] dy \right| \leq \frac{1}{2} D(t_a^{(r)})^2 \quad (18)$$

$$\leq 2Dd^2(2r+1)^{2(d-1)} \frac{M^2}{B_V^2}. \quad (19)$$

Применяя (15) и учитывая (19), получаем, что для любого $a \in V$ и всех $r \geq 1$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \left\{ A_a \int_0^{t_a^{(r)}} [f'(T_a^{(r)} + y) - f'(T_a^{(r)})] dy \right\} \right| \\ & \leq 8Dd^2(2r+1)^{2(d-1)} \frac{M^3}{B_V^3} f(1 + s(T_a^{(r-1)})) \alpha(r), \end{aligned} \quad (20)$$

где $s(T_a^{(r-1)}) = |\{b \in V: \|b - a\| \geq r\}|$. Применяя (18) в случае $r = 0$, получаем, что для любого $a \in V$

$$\left| \mathbf{E} \left\{ A_a \int_0^{A_a} [f'(T_a^{(0)} + y) - f'(T_a^{(0)})] dy \right\} \right| \leq \frac{1}{2} D \mathbf{E} |A_a|^3. \quad (21)$$

Из (20) и (21) соответственно следует, что

$$|E_1| \leq 8Dd^2 3^{2(d-1)} \frac{|V|M^3}{B_V^3} f(|V|) \sum_{r \geq 1} r^{2(d-1)} \alpha(r), \quad (22)$$

$$|E_2| \leq \frac{1}{2} DL_3. \quad (23)$$

Рассмотрим сумму E_3 и $u_a^{(r)} = A_a t_a^{(r)} - \mathbf{E} A_a t_a^{(r)}$ из нее. Самая большая «дыра» между случайными величинами из E_3 имеется между случайными величинами A_a и $t_a^{(r)}$ из $u_a^{(r)}$. Поэтому, оценивая $|E_3|$ и применяя (15), используем именно ее:

$$\begin{aligned} |E_3| & \leq \sum_{a \in V} \sum_{r \geq 1} \sum_{q=r+1}^{2r} \left| \mathbf{E} \{ A_a t_a^{(r)} [f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})] \} \right| \\ & + \sum_{a \in V} \sum_{r \geq 1} \sum_{q=r+1}^{2r} |\mathbf{E} \{ A_a t_a^{(r)} \}| \mathbf{E} |f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})| \\ & \leq 32Dd^2 18^{d-1} \frac{|V|M^3}{B_V^3} f(|V|) \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} \alpha(r). \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь оценим $|E_4|$. В этом случае расстояние между случайными величинами $u_a^{(r)}$ и $f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})$ равно $q - r \geq r + 1$. Так как

$$\sum_{r \geq 1} \sum_{q \geq 2r+1} q^{2(d-1)} \alpha(q-r) < 4^{d-1} \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} \alpha(r), \quad (25)$$

то, согласно (15),

$$|E_4| < 32Dd^2 18^{d-1} \frac{|V| M^3}{B_V^3} f(|V|) \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} \alpha(r). \quad (26)$$

Чтобы оценить $|E_5|$, величину $|\mathbf{E} A_a t_a^{(r)}|$ оцениваем с помощью (15), а величину $|f'(T_a^{(q-1)}) - f'(T_a^{(q)})|$ — применяя (7):

$$|E_5| \leq 32Dd^2 9^{d-1} \frac{|V| M^3}{B_V^3} f(|V|) \sum_{r \geq 1} r^{2d-1} \alpha(r). \quad (27)$$

Далее, оценим $|E_6|$. И в этом случае, согласно (15),

$$|E_6| \leq 16Dd 3^{d-1} \frac{|V| M^3}{B_V^3} f(|V|) \sum_{q \geq 1} q^{d-1} \alpha(q). \quad (28)$$

На основании (7)

$$|E_7| \leq D \sum_{a \in V} \mathbf{E} A_a^2 \mathbf{E} |A_a| \leq DL_3. \quad (29)$$

Подставляя оценки (22)–(24), (26)–(29) величин $|E_i|$, $i = 1, \dots, 7$, в тождество (8) и опираясь на равенство (6), получаем (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, с той лишь разницей, что в условиях теоремы 2 вместо (15) применяется (16). Поэтому его приводить здесь не будем.

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательствам теорем 1 и 2 соответственно.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barbour A. D., Eagleson G. K. Multiple comparisons and sums of dissociated random variables. — Adv. Appl. Probab., 1985, v. 17, № 1, p. 147–162.
2. Булинский А. В. Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. М.: Изд-во МГУ, 1989, 135 с.
3. Bulinski A., Suquet Ch. Normal approximation for quasi-associated random fields. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 215–226.
4. Doukhan P. Mixing. Properties and Examples. New York: Springer-Verlag, 1994, 142 с. (Lecture Notes in Statist., v. 85.)

5. Hall P., Heyde C. C. *Martingale Limit Theory and Its Applications*. New York–London: Academic Press, 1980, 308 p.
6. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. *Независимые и стационарно связанные величины*. М.: Наука, 1965, 524 с.
7. Lin Z., Lu C. *Limit Theory for Mixing Dependent Random Variables*. Dordrecht/New York: Kluwer/Science Press, 1996, 426 p.
8. Rio E. Sur le théorème de Berry–Esseen pour les suites faiblement dépendantes. — *Probab. Theory Related Fields*, 1996, v. 104, № 2, p. 255–282.
9. Stein C. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1970/1971)*. V. II: Probability Theory. Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
10. Сунклодас Й. Оценка ограниченной метрики Липшица для сумм слабо зависимых случайных величин. — *Литов. матем. сб.*, 1989, т. 29, № 2, с. 385–393.
11. Sunklodas J. Approximation of distributions of sums of weakly dependent random variables by the normal distribution. — *Limit Theorems of Probability Theory*. Ed. by R. V. Gamkrelidze, Yu. V. Prokhorov, and V. Statulevičius. Berlin: Springer-Verlag, 2000, p. 113–165.
12. Тихомиров А. Н. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабозависимых величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1980, т. 25, в. 4, с. 800–818.
13. Утев С. А. Об одном способе исследования сумм слабозависимых случайных величин. — *Сиб. матем. журн.*, 1991, т. 32, № 4, с. 165–183.
14. Зупаров Т. М. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабозависимых величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, т. 36, в. 4, с. 635–644.

Поступила в редакцию
25.V.2004