Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ибрагимов, Ш. Шарахметов, Точная константа в неравенстве Розенталя для случайных величин с нулевым средним, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 134–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:14:23

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2001 г.

ИБРАГИМОВ Р.*, ШАРАХМЕТОВ Ш.**

ТОЧНАЯ КОНСТАНТА В НЕРАВЕНСТВЕ РОЗЕНТАЛЯ ДЛЯ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ¹⁾

Пусть $t > 2$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с $E\xi_i = 0$, $E|\xi_i|^t < \infty$, $i = 1, \dots, n$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. В настоящей статье показано, что точная константа $\overline{C}(2m)$ в неравенстве Розенталя

$$E|S_n|^t \leq C(t) \max \left(\sum_{i=1}^n E|\xi_i|^t, \left(\sum_{i=1}^n E\xi_i^2 \right)^{t/2} \right)$$

при $t = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\overline{C}(2m) = (2m)! \sum_{j=1}^{2m} \sum_{r=1}^j \sum_{k=1}^r \prod \frac{(m_k!)^{-j_k}}{j_k!},$$

где внутренняя сумма распространена на все натуральные $m_1 > m_2 > \dots > m_r > 1$ и $j_1, \dots, j_r$, удовлетворяющие условиям $m_1 j_1 + \dots + m_r j_r = 2m$, $j_1 + \dots + j_r = j$. Справедливо также соотношение $\overline{C}(2m) = E(\theta - 1)^{2m}$, где θ — пуассоновская случайная величина с параметром 1.

Ключевые слова и фразы: неравенство Розенталя, случайные величины с нулевым средним, момент, пуассоновская случайная величина.

Пусть $t > 2$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины (с.в.) с $E\xi_i = 0$, $E|\xi_i|^t < \infty$, $i = 1, \dots, n$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда имеет место следующее неравенство [1]:

$$E|S_n|^t \leq C(t) \max \left(\sum_{i=1}^n E|\xi_i|^t, \left(\sum_{i=1}^n E\xi_i^2 \right)^{t/2} \right), \quad (1)$$

где $C(t)$ — константа, зависящая только от t . Существует ряд работ (см., например, [2]–[11]), в той или иной мере касающихся уточнений и обобщений неравенства (1) и его аналогов. В статье [8] показано, что неулучшаемая константа $\overline{C}(t)$ в неравенстве (1) имеет порядок роста $t/\ln t$. В работах [9], [10] и [11] были независимо получены следующие явные выражения для точной константы $\overline{C}_s(t)$ в неравенстве (1) для симметрично распределенных с.в.: $\overline{C}_s(t) = 1 + 2^{t/2} \Gamma((t+1)/2) / \sqrt{\pi}$, $2 < t < 4$, $\overline{C}_s(t) = E|\theta_1 - \theta_2|^t$, $t \geq 4$, где $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$, θ_1, θ_2 — независимые пуассоновские с.в. с параметром 0,5. В работе [11] найдена точная константа в аналоге неравенства (1)

* Central Michigan University, Department of Economics, Mt. Pleasant MI 48858, USA; e-mail: rustami@hotmail.com

** Ташкентский государственный университет, 700098 Ташкент, Узбекистан; e-mail: tim001@tseu.silk.glas.org

¹⁾ Работа первого автора поддержана грантом от American Council of Teachers of Russian/American Council for Collaboration in Education and Language Study, с фондами, предоставленными United States Information Agency.

для неотрицательных с.в. В [11] приведены также некоторые результаты касательно точных констант в неравенстве $\mathbf{E}|S_n|^t \leq C_1(t) \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^t + C_2(t) (\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\xi_i^2)^{t/2}$, которое, так же как и оценку (1), часто называют неравенством Розенталя.

В работах [12]–[14] исследовались тесно связанные с проблемами о неухудшаемых константах в моментных неравенствах задачи нахождения точных границ для моментов сумм независимых с.в. в терминах характеристик отдельных слагаемых. Дополнительную информацию об основных неравенствах для моментов сумм независимых с.в. и работах по этой тематике можно найти в статье [15].

Настоящая работа, близкая по духу к статье И. Ф. Пинелиса и С. А. Утева [13], посвящена нахождению точной константы в общем неравенстве Розенталя (т.е. без наложения условия симметричной распределенности рассматриваемых с.в.) при целых четных t . Результаты работы были анонсированы в [16].

Имеет место следующая

Теорема. При $t = 2m$, $m \in \mathbf{N}$, точная константа $\overline{C}(2m)$ в неравенстве (1) имеет вид

$$\overline{C}(2m) = (2m)! \sum_{j=1}^{2m} \sum_{r=1}^j \sum_{k=1}^r \prod \frac{(m_k!)^{-j_k}}{j_k!}, \quad (2)$$

где внутренняя сумма распространена на все натуральные $m_1 > m_2 > \dots > m_r > 1$ и $j_1, \dots, j_r$, удовлетворяющие условиям $m_1 j_1 + \dots + m_r j_r = 2m$, $j_1 + \dots + j_r = j$. Справедливо также соотношение

$$\overline{C}(2m) = \mathbf{E}(\theta - 1)^{2m}, \quad (3)$$

где θ — пуассоновская случайная величина с параметром 1.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что (2) можно записать в следующей форме, которая выглядит несколько проще:

$$\overline{C}(2m) = (2m)! \sum \prod_{k=1}^{2m-1} \frac{1}{j_k! ((k+1)!)^{j_k}},$$

где сумма берется по всем решениям в целых числах уравнения $2j_1 + 3j_2 + \dots + 2mj_{2m-1} = 2m$.

З а м е ч а н и е 2. Интересно отметить, что точная константа в общем неравенстве Розенталя $\overline{C}(2m)$ не совпадает с точной константой в неравенстве Розенталя для симметрично распределенных с.в. $\overline{C}_s(2m)$. В силу замечания 1 и соотношения (7.4) работы [17] величина $\overline{C}(2m)$ равна числу разбиений множества, состоящего из $2m$ элементов, на части, содержащие более одного элемента, а константа $\overline{C}_s(2m)$ (см. [10]) равна числу разбиений этого множества на части, содержащие четное число элементов.

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных результатов.

Пусть U_1, U_2 — независимые с.в. с распределениями $\mathbf{P}\{U_i = 1\} = \mathbf{P}\{U_i = -1\} = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$, G — конечная положительная σ -аддитивная мера на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ борелевских подмножеств $\mathbf{R}$, $T(G)$ — с.в. с характеристической функцией

$$\mathbf{E} e^{itT(G)} = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itz} - 1) dG(x) \right).$$

Рассуждая в полной аналогии с [14] (см. также [11]), получаем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} f(x) + \mathbf{E} f(a_1 U_1 + a_2 U_2 + x) \\ & \geq \mathbf{E} f(a_1 U_1 + x) + \mathbf{E} f(a_2 U_1 + x), \quad a_1, a_2, x \in \mathbf{R}, \\ & |f(a_1 + a_2)| \leq C(1 + |f(a_1)|)(1 + |f(a_2)|), \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4)$$

(C — некоторая константа). Если $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x) < \infty$, то имеет место соотношение

$$\sup_{n, \xi_k} \mathbf{E} f(S_n) = \mathbf{E} f(T(G)), \quad (5)$$

где $\sup$ берется по всем независимым случайным величинам $\xi_1, \dots, \xi_n$ с нулевым средним, для которых $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{\xi_i \in A \setminus \{0\}\} = G(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

З а м е ч а н и е 3. По аналогии с замечанием 1 в [11] легко показать, что если функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ дважды дифференцируема, то (4) является следствием простого для проверки условия выпуклости $f''(x)$, из которого вытекает L -супераддитивность функции $g(a_1, a_2, x) = \mathbf{E} f(a_1 U_1 + a_2 U_2 + x)$ (см. также [14]).

Положим $A_{k,n} = A_{k,n}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \xi_i^k$, $k = 1, 2, \dots, 2m$, $B_n = B_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = A_{2,n}^{1/2}$. Из леммы 1 для $f(x) = x^{2m}$, используя формулу Бруно для производной сложной функции $\exp(g(t) - g(0))$, где $g(t) = \exp(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x))$, получаем, что при фиксированных $A_{k,n}$, $k = 2, \dots, 2m$,

$$\sup \mathbf{E} S_n^{2m} = (2m)! \sum_{r=0}^{2m} \sum_{k=1}^r \prod \frac{A_{m_k, n}^{j_k} (m_k!)^{-j_k}}{j_k!}, \quad (6)$$

где внутренняя сумма распространена на все натуральные $m_1 > m_2 > \dots > m_r > 1$ и $j_1, \dots, j_r$, удовлетворяющие условию $m_1 j_1 + \dots + m_r j_r = 2m$.

Пусть заданы некоторые $A_{2m}, B, D > 0$. Обозначим $M_1(m, A_{2m}, B) = \sup_{n, \xi_k} \mathbf{E} S_n^{2m}$, где $\sup$ берется по всем независимым с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ с нулевым средним и фиксированными $A_{2m, n} = A_{2m}$, $B_n = B$; $M_2(m, A_{2m}, B) = \sup_{n, \xi_k} \mathbf{E} S_n^{2m}$, где $\sup$ берется по всем независимым с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ с нулевым средним, для которых $A_{2m, n} \leq A_{2m}$, $B_n \leq B$; $M(m, D) = \sup_{n, \xi_k} \mathbf{E} S_n^{2m}$, где $\sup$ берется по всем независимым с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ с нулевым средним и фиксированным $\max(A_{2m, n}, B_n^{2m}) = D$.

Лемма 2. Для любого целого $s \in (2, 2m)$

$$|A_{s, n}| \leq \left(A_{2m, n}^{s-2} B_n^{2(2m-s)} \right)^{1/(2m-2)}, \quad (7)$$

причем для любых $m > 1$, $A_{2m} > 0$, $B > 0$ существует последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$, $n \geq n_0$, с $\mathbf{E} \xi_{ni} = 0$, $i = 1, \dots, n$, такая, что $A_{2m, n}(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}) = A_{2m}$, $B_n(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}) = B$ и

$$A_{s, n}(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}) \rightarrow \left(A_{2m}^{s-2} B^{2(2m-s)} \right)^{1/(2m-2)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

при всех целых $s \in (2, 2m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (7) следует из неравенства Ляпунова, поскольку $\sum_{i=1}^n \mathbf{E} |\xi_i|^s = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s dG(x)$. Для $n \geq 4(B^{2m}/A)^{2/(m-1)}$ положим

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{n^{(2m-1)/2} + 1} \right)^{1/(2m-2)} \left(\frac{A}{B^2} \right)^{1/(2m-2)}, \\ b_n &= \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{n^{(2m-1)/2} + 1} \right)^{1/(2m-2)} \left(\frac{A}{B^2} \right)^{1/(2m-2)}, \\ p_n &= \frac{(n^{(2m-1)/2} + 1)^{1/(m-1)}}{n^{3/2}(\sqrt{n} + 1)^{m/(m-1)}} \left(\frac{B^{2m}}{A} \right)^{1/(m-1)}, \\ q_n &= \frac{(n^{(2m-1)/2} + 1)^{1/(m-1)}}{n(\sqrt{n} + 1)^{m/(m-1)}} \left(\frac{B^{2m}}{A} \right)^{1/(m-1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $p_n + q_n \leq n^{-1/2}(B^{2m}/A)^{1/(m-1)} \leq 1$. Пусть $\mathbf{P}\{\xi_{ni} = a_n\} = p_n$, $\mathbf{P}\{\xi_{ni} = -b_n\} = q_n$, $\mathbf{P}\{\xi_{ni} = 0\} = 1 - p_n - q_n$, $i = 1, \dots, n$. Нетрудно проверить, что $\mathbf{E} \xi_{ni} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $A_{2m, n}(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}) = A_{2m}$, $B_n(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}) = B$, и при всех целых $s \in (2, 2m)$ выполняется соотношение (8).

Из (6) и леммы 2 вытекает следующая лемма 3.

Лемма 3. При $A_{2m}, B > 0$

$$M_i(m, A_{2m}, B) = (2m)! \sum_{j=1}^{2m} \left(\sum_{r=1}^j \sum_{k=1}^r \prod \frac{(m_k!)^{-j_k}}{j_k!} \right) (A_{2m}^{m-j} B^{2m(j-1)})^{1/(m-1)}, \quad i = 1, 2,$$

где внутренняя сумма распространена на все натуральные $m_1 > m_2 > \dots > m_r > 1$ и $j_1, \dots, j_r$, удовлетворяющие условиям $m_1 j_1 + \dots + m_r j_r = 2m$, $j_1 + \dots + j_r = j$.

Доказательство теоремы. Из леммы 3 и очевидного неравенства $M_1(m, D, D^{1/2m}) \leq M(m, D) \leq M_2(m, D, D^{1/2m})$ вытекает, что

$$M(m, D) = (2m)! \sum_{j=1}^{2m} \sum_{r=1}^j \sum_{k=1}^r \prod \frac{(m_k!)^{-j_k}}{j_k!},$$

где внутренняя сумма распространена на все натуральные $m_1 > m_2 > \dots > m_r > 1$ и $j_1, \dots, j_r$, удовлетворяющие условиям $m_1 j_1 + \dots + m_r j_r = 2m$, $j_1 + \dots + j_r = j$. Учитывая, что $\bar{C}(2m) = \sup_{D>0} M(m, D)/D$, откуда получаем (2).

Докажем, что соотношение (2) эквивалентно (3). Пусть θ — пуассоновская с.в. с параметром 1. Обозначим через T_m число разбиений множества из m элементов на части, содержащие более одного элемента. В силу формулы (7.21) работы [17] имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m \frac{t^m}{m!} = e^{e^t - t - 1}. \quad (9)$$

Поскольку $\mathbf{E} e^{\theta t} = (1/e) \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}/k! = e^{e^t - 1}$, из (9) следует, что $\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m/m! = \mathbf{E} e^{(\theta-1)t}$, или

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}(\theta-1)^m \frac{t^m}{m!}. \quad (10)$$

Из (10) вытекает, что $T_m = \mathbf{E}(\theta-1)^m$. Поскольку $\bar{C}(2m) = T_{2m}$ в силу замечания 2, откуда получаем, что $\bar{C}(2m) = \mathbf{E}(\theta-1)^{2m}$. Теорема полностью доказана.

Гипотеза. Совпадение ряда результатов для симметрично распределенных с.в., полученных в [10] и [11], с известными результатами для с.в. с нулевыми средними (см. замечание 4 в [10], замечание 5 в [11]) делает правдоподобной гипотезу, что при $2 < t < 4$ точная константа $\bar{C}(t)$ в общем неравенстве Розенталя (1) совпадает с точной константой $\bar{C}_s(t)$ в неравенстве (1) для симметрично распределенных с.в. В свете результатов настоящей работы представляется правдоподобным, что при $t \geq 4$ $\bar{C}(t) = \mathbf{E}|\theta-1|^t$, где θ — пуассоновская с.в. с параметром 1.

Авторы благодарны рецензенту за ценные замечания, во многом способствовавшие улучшению изложения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosenthal H. P. On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. — Israel J. Math., 1970, v. 8, p. 273–303.
2. Сазонов В. В. К оценке моментов сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, в. 2, с. 383–386.
3. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 254–263.
4. Пинелис И. Ф. Оценки моментов бесконечномерных мартингалов. — Матем. заметки, 1980, т. 27, № 6, с. 953–958.
5. Pinelis I. F. Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces. — Ann. Probab., 1994, v. 22, p. 1679–1706.

6. *Нагаев С. В.* Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 832–838.
7. *Nagaev S. V.* On a new approach to the study of the distribution of a norm of a random element in Hilbert space. — Proceeding of the Fifth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius: Moksas, 1990, p. 214–226.
8. *Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J.* Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables. — Ann. Probab., 1985, v. 13, p. 234–253.
9. *Ибрагимов Р., Шаразметов Ш.* О точной константе в неравенстве Розенталя. — Тезисы 4-го Ферганского международного коллоквиума по теории вероятностей и математической статистике. Ташкент, 1995, с. 43–44.
10. *Ибрагимов Р., Шаразметов Ш.* О точной константе в неравенстве Розенталя. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 341–350.
11. *Ибрагимов Р., Шаразметов Ш.* Некоторые экстремальные проблемы в моментных неравенствах. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
12. *Прозоров Ю. В.* Экстремальные задачи в предельных теоремах. — Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, с. 77–84.
13. *Пинелис И. Ф., Утев С. А.* Оценки моментов сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 3, с. 554–557.
14. *Утев С. А.* Экстремальные задачи в моментных неравенствах. Труды Ин-та матем. СО АН СССР, 1985, т. 5, с. 56–75.
15. *Пешкир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингалное расширение сферы их действия. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, в. 5, с. 3–62.
16. *Ibragimov R., Sharakhmetov Sh.* Exact bounds on the moments of symmetric statistics. — 7th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 22nd European Meeting of Statisticians: Abstracts of Communications. Vilnius, 1998, p. 243–244.
17. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
30.III.1998

Исправленный вариант
15.III.1999

© 2001 г.

КОЛЕСНИК А. Д.*, ОРСИНГЕР Э.**

АНАЛИЗ ДВУМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ И ОТРАЖЕНИЕМ¹⁾

Рассматривается двумерное случайное блуждание с конечной скоростью по четырем ортогональным направлениям и с возможностью отражения в моменты наступления пуассоновских событий. Мы получаем уравнение для распределения этого блуждания внутри области диффузии Q_t и уравнения для его сингулярной компоненты. Распределения на границе области Q_t и ее диагоналях получены в явном виде.

* Институт математики АН Молдовы, ул. Академическая, 5, 277028 Кишинев, Молдова; e-mail: kolesnik@math.md

** Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università «La Sapienza», P. le Aldo Moro 5, 00185 Roma, Italia.

¹⁾ Первый автор поддержан исследовательским грантом в рамках NATO-CNR Guest Fellowships Programme.