Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Островский, Анизотропные модули непрерывности случайных полей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 154–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:16:18

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afanassieva L. G., Fayolle G., Popov S. Yu.* Models for transportation networks. — J. Math. Sci., 1997, v. 84, № 3, p. 1092–1103.
2. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 1, с. 72–89.
3. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 4, с. 365–425 (исправл.: 1958, т. 3, в. 4).
4. *Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И.* Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход. — Проблемы передачи информации, 1996, т. 32, № 1, с. 20–34.
5. *Either S. N., Kurtz T. G.* Markov Processes Characterization and Convergence. New York: Wiley, 1986, 529 p.
6. *Vvedenskaya N. D., Suhov Yu. M.* Dobrushin's mean-field approximation for a queue with dynamic routing. — Markov Process. Relat. Fields, 1997, № 3, p. 493–526.

Поступила в редакцию
12.XI.1998

© 2001 г.

ОСТРОВСКИЙ Е. И.*

АНИЗОТРОПНЫЕ МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Для произвольных случайных полей, удовлетворяющих условию Крамера, вычисляются анизотропные модули непрерывности, и на примерах показана точность полученных результатов, применяемых в дальнейшем для вывода центральной предельной теоремы в пространствах Гёльдера.

Ключевые слова и фразы: случайное поле, банаховы пространства случайных величин, метрическая энтропия, экспоненциальная оценка, анизотропный модуль непрерывности.

Введение. Пусть (T_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots, k$, — конечное семейство полных сепарабельных метрических пространств, $\xi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ — центрированное случайное сепарабельное поле, $t_i \in T_i$ и $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ принадлежит множеству $T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_k$.

Метрики d_i в дальнейшем будут *естественными*, т.е. порожденными исходным полем $\xi(\cdot)$. Результаты настоящей статьи могут быть сформулированы в терминах каких-либо уже имеющихся исходных метрик r_i на множествах T_i , если метрики d_i и r_i непрерывны друг относительно друга.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mu_i(t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k) &= \xi(t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k) \\ &\quad - \xi(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \dots, t_k), \\ \Delta(\delta_i) &= \sup \left\{ |\mu_i(t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k)|, \right. \\ &\quad \left. t_j \in T_j, j \neq i; d_i(t_i, s_i) \leq \delta_i, \delta_i > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Для случайного поля $\xi(\cdot)$ глобальный *анизотропный модуль непрерывности* $\Delta(\delta) = \Delta(\delta_1, \dots, \delta_k) = \Delta_\xi(\delta_1, \dots, \delta_k)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$, $\delta_i > 0$, введем формулой

$$\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ |\xi(t_1, t_2, \dots, t_k) - \xi(s_1, s_2, \dots, s_k)|, d_i(t_i, s_i) \leq \delta_i \right\}.$$

* Institute of Industrial Mathematics, Beer-Sheva, Ben-Gurion str., 20, Israel; e-mail: eugene@iimath.com

Очевидно, что $\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) \leq \sum_{i=1}^k \Delta_i(\delta_i)$. Если поле $\xi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ непрерывно с вероятностью 1 относительно метрики $d = \sum_{i=1}^k d_i$, то $\forall i \lim \Delta_i(\delta_i) \rightarrow 0$, $\delta_i \rightarrow 0$. Здесь и ниже все пределы случайных величин, в том числе и верхние, понимаются с вероятностью 1, т.е. Р-п.н.

В данной работе рассматривается случай, когда $\Delta_i(\delta_i)$ стремятся к нулю с различной скоростью при различных i .

Изучение локальных свойств случайных процессов и полей, в том числе поведения их модулей непрерывности, относится к числу классических задач теории случайных процессов. Рассматриваемые в данной статье вопросы, касающиеся анизотропных модулей непрерывности, имеют ряд приложений. Например, эти модули применяются в теории аппроксимации функций нескольких переменных тригонометрическими, алгебраическими многочленами или сплайнами [1]. Получаемые ниже соотношения и оценки уточняют и обобщают результаты [2] и др. В работе [3] вычислены изотропные модули непрерывности для случайных (необязательно гауссовских) полей, так что предлагаемая работа представляет собой также обобщение [3].

В конце статьи (см. п. 4) мы применим полученные результаты для вывода центральной предельной теоремы в анизотропных пространствах Гельдера и сделаем несколько замечаний об их применении в численном методе Монте-Карло.

1. Основные определения и вспомогательные факты. Предполагается, что для случайного поля $\xi(t)$ выполнено условие Крамера равномерно по t , $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, т.е. существует положительное (может быть, бесконечное) число $\lambda_0 > 0$ такое, что при всех λ , $|\lambda| < \lambda_0$,

$$\varphi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in T} \max_{\pm} \ln \mathbf{E} \exp(\pm \lambda \xi(t)) < \infty. \quad (1)$$

Согласно [4] (более подробное изложение см. в монографии [8, с. 19–27]), с помощью определенной равенством (1) функции $\varphi(\cdot)$ вводится банахово пространство $B(\varphi)$ случайных величин η с конечной нормой

$$\|\eta\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\max_{\pm} \varphi^{-1}(\ln \mathbf{E} \exp(\pm \lambda \eta))}{|\lambda|}. \quad (2)$$

Здесь и далее φ^{-1} означает функцию, обратную к φ на правой полупрямой.

Вместо функции $\varphi(\cdot)$ можно в дальнейшем брать любую ее четную выпуклую непрерывную мажоранту, монотонно возрастающую на правой полупрямой.

Преобразование Юнга–Фенхеля, или Лежандра, функции $\varphi(\cdot)$ обозначим через $\varphi^*(x)$: $\varphi^*(x) = \sup_{\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)} (\lambda x - \varphi(\lambda))$. На множестве T введем так называемую *естественную*, т.е. порожденную только самим полем $\xi(\cdot)$, полуметрику $d(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|$. При нашем способе введения функции φ (см. (1)) и нормы $\|\eta\|$ (см. (2)) полуметрика d ограничена: $d(t, s) \leq 2$; $t, s \in T$.

Аналогично определяются «индивидуальные» метрики d_i на множествах T_i :

$$d_i(t_i, s_i) = \sup \left\{ \left\| \mu_i(t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k) \right\|, t_j \in T_j, j \neq i \right\}.$$

Наименьшее число d -шаров радиуса $\varepsilon > 0$, покрывающих некоторое подмножество S пространства T , обозначим $N(S, d, \varepsilon)$. Энтропией S называется логарифм N : $H(S, d, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \ln N(S, d, \varepsilon)$.

Пусть $B(t, d, \delta)$ есть шар радиуса δ , $\delta \in (0, \infty)$, с центром в точке t , $t \in T$: $B(t, d, \delta) = \{s, s \in T, d(t, s) \leq \delta\}$. Назовем случайное поле $\xi(t)$ локально однородным на множестве S , если для любого $\varepsilon > 0$

$$h(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in S} \sup_{\delta > 0} H(B(t, d, \delta), d, \delta \varepsilon) < \infty.$$

Введем также обозначение $\pi(u) = 1/(\varphi^{**}(u))$. В данной заметке будет использоваться следующая верхняя оценка распределения максимума случайного поля на некотором множестве S (см. [5]; [8, с. 102–105]): если поле $\xi(t)$ локально однородно

на S в естественной метрике d и сходится так называемый энтропийный ряд $\sum_n 2^{-n} h(2^{-n}) < \infty$, то для любого $u > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in S} |\xi(t)| > u \right\} \leq C_1 N(S, d, \pi(u)) \exp(-\varphi^*(u)). \quad (3)$$

Здесь и далее C_j — не зависящие от $u, \{\delta_i\}$, δ положительные конечные константы.

Отметим, что если выполнено также условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(\pi(x))}{\exp \varphi^*(x)} = 0, \quad (4)$$

то для распределения $\sup_{t \in T} |\xi(t)|$ выполняется свойство:

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, 1), \quad \exists u_0, \forall u > u_0 \quad \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} |\xi(t)| > u \right\} \leq \exp(-\varphi^*(u)(1 - \varepsilon_1)). \quad (5)$$

2. Общие оценки сверху. В этом пункте будет найдена неслучайная функция $g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ такая, что при $\max_i \delta_i \rightarrow 0$

$$\overline{\lim} \frac{\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)}{g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)} \leq 1,$$

и, кроме того, будет выведена полезная на практике верхняя оценка: при всех достаточно больших u ($u > u_0$, $u_0 = \text{const} > 1$)

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\delta_i \in (0, \delta_0)} \frac{\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)}{g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)} > u \right\} \leq C_2 \exp(-C_3 u),$$

$\delta_0 = \text{const} > 0$. С этой целью рассмотрим случайное поле $\mu_i = \mu_i(t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k)$. Очевидно, что если $d_i(s_i, t_i) \leq \delta_i$, то $\|\mu_i\| \leq \delta_i$. Обозначим

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_i(t_1, \bar{t}_1, \dots, t_{i-1}, \bar{t}_{i-1}, t_i, \bar{t}_i, s_i, \bar{s}_i, \dots, t_k, \bar{t}_k) \\ &= \left\| \mu_i(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, s_i, t_{i+1}, \dots, t_k) - \mu_i(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{i-1}, \bar{t}_i, \bar{s}_i, \bar{t}_{i+1}, \dots, \bar{t}_k) \right\|. \end{aligned}$$

Отметим, что ρ_i представляет собой полуметрику на пространстве $T \times T_i$.

Применяя неравенство треугольника, имеем: $\rho_i \leq d_i(t_i, \bar{t}_i) + d_i(s_i, \bar{s}_i) + 2 \sum_{j \neq i} d_j(t_j, \bar{t}_j)$. Если $Z = X \times Y$, где X — метрическое пространство с метрикой $\rho_1(x_1, x_2)$, и Y — метрическое пространство с метрикой $\rho_2(y_1, y_2)$, причем метрика в произведении пространств строится по формуле $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_1(x_1, x_2) + \rho_2(y_1, y_2)$, то $H(Z, \rho_1 + \rho_2, \varepsilon) \leq H(X, \rho_1, \varepsilon/2) + H(Y, \rho_2, \varepsilon/2)$. Поэтому $H(T \times T_i, \rho_i, \varepsilon) \leq 2 \sum_{j=1}^k H(T_j, d_j, \varepsilon/(2k))$. Отметим, что $H(T, d/\delta, \varepsilon) = H(T, d, \varepsilon\delta)$.

По определению функции $h(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} H\left(T \times T_i, \frac{\rho_i}{\delta_i}, \pi(x)\right) &= H\left(T \times T_i, \rho_i, \delta_i \pi(x)\right) \leq 2 \sum_{j=1}^k H\left(T_j, d_j, \delta_j \frac{\pi(x)}{2k}\right) \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^k \left(h_j(\delta_i) + h_j\left(\frac{1}{2k}\right) + h_j(\pi(x)) \right), \end{aligned}$$

где $h_j(\varepsilon) = \sup_{t \in S} \sup_{\delta > 0} H(B(t, d_j, \delta), d_j, \varepsilon\delta)$. Обозначим

$$h(\delta) = h(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) = \sum_{j=1}^k h_j(\delta_j), \quad g(\delta) = \sum_{i=1}^k \delta_i \varphi^{*-1} \left(h_i(\delta_i) + \ln \ln \left(\frac{1}{\delta_i} \right) \right).$$

Теорема 1. Пусть поле $\xi(t)$ локально однородно на T , сходится энтропийный ряд: $\sum_n 2^{-n} h(2^{-n}) < \infty$ и выполнено условие (4). Тогда с вероятностью 1

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta)}{g(\delta)} \leq 1$$

и при этом

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\delta_i \in (0, \delta_0)} \frac{\Delta(\delta)}{g(\delta)} > u \right\} \leq C_2 \exp(-C_3 u). \quad (6)$$

Доказательство. Обозначим

$$\tau(\delta_i) = \frac{\Delta_i(\delta_i)}{\delta_i \varphi^{*-1}(h(\delta_i) + \ln \ln(1/\delta_i))}.$$

В силу (5)

$$\begin{aligned} \ln P_i(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \ln \mathbf{P} \left\{ \tau(\delta_i) > u \right\} \leq -\varphi^* \left(\frac{u \delta_i \varphi^{*-1}(h(\delta_i) + \ln \ln(1/\delta_i))}{\delta_i} \right) (1 - \varepsilon_1) \\ &= -(1 - \varepsilon_1) \varphi^* \left(u \varphi^{*-1} \left(h(\delta_i) + \ln \ln \left(\frac{1}{\delta_i} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Положим теперь в (7) $u = 1 + \varepsilon$, где ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$, и пусть $\delta_i \in [a^n, a^{n-1}]$, a — фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Учитывая, что для выпуклой четной функции $\varphi^*(\cdot)$, равной нулю в нуле, справедливо неравенство $\varphi^*((1+\varepsilon)z) \geq (1+\varepsilon)\varphi^*(z)$, $z > 0$, имеем: $P_i \leq \exp\{-(1+\varepsilon)(1-\varepsilon_1)(h(a^n) + \ln[(n-1)\ln a])\} \leq (n-1)^{\ln a|(1+\varepsilon)(1-\varepsilon/4)} \leq (n-1)^{1+\varepsilon/4}$ при надлежащем выборе $a = 1 - \varepsilon/8$.

Поскольку $\sum_n P_i^n < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, то по лемме Бореля–Кантелли

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{\delta_i \rightarrow 0} \tau(\delta_i) \leq 1 \right\} = 1. \quad (8)$$

С другой стороны, если $\delta_i \leq \delta_i^0$, то $\alpha(\delta_i) \leq \alpha(\delta_i^0)$ и для всех $u \geq u_0$ $(1 - \alpha(\delta_i^0))u - 1 > 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{\delta_i \in (0, \delta_i^0)} \tau(\delta_i) > u \right\} &\leq \sum_n \mathbf{P} \left\{ \sup_{\delta_i \in [a^n, a^{n-1}]} \tau(\delta_i) > u \right\} \leq \sum_n \mathbf{P} \left\{ \tau(a^n) > u \right\} \\ &\leq C_4 \sum_n \exp \left\{ -h(a^n) \left((1 - \alpha(\delta_i^0))u - 1 \right) \right\} \\ &\leq C_4 \exp \left(- \left(1 - \alpha(\delta_i^0) \right) u \left(\ln n_0 + \ln \ln \left(\frac{1}{a} \right) \right) \right) \\ &\quad \times \sum_n \exp \left\{ - \left((\ln n - \ln n_0) - \ln \ln \left(\frac{1}{a} \right) \right) \left(1 - \alpha(\delta_i^0) \right) u \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n_0 выбрано из условия $a^{n_0-1} \leq \delta_i^0$. Ряд в правой части (9) сходится при всех достаточно больших u ($u > u_0$) и представляет собой монотонно убывающую функцию. Обозначая произведение суммы этого ряда в точке u_0 на величину C_4 через C_5 , а величину $(1 - \alpha(\delta_i^0)) \ln \ln(1/\delta_i^0)$, $\delta_i^0 \leq 4^{-1}$, через C_3 , имеем: $\mathbf{P}\{\sup_{\delta_i \in (0, \delta_i^0)} \tau(\delta_i) > u\} \leq C_5 \exp(-C_3 u)$. По определению $\tau(\delta_i)$ $\Delta(\delta_i) = \tau(\delta_i) \delta_i \varphi^{*-1}(h(\delta_i) + \ln \ln(1/\delta_i))$. Поэтому, обозначая $\tau(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) = \max_{i=1,2,\dots,k} \tau(\delta_i)$, получим:

$$\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) \leq \sum_{i=1}^k \Delta_i(\delta_i) \leq \tau(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k).$$

Тогда, согласно (8),

$$\overline{\lim}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k \rightarrow 0} \Delta(\delta) \leq \overline{\lim}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k \rightarrow 0} \tau(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) \leq \max_i \overline{\lim}_{\delta_i \rightarrow 0} \tau(\delta_i) \leq 1$$

Р-п.н. Таким образом, первое утверждение теоремы 1 получено, докажем теперь оценку (6). В соответствии с (9),

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \max_i \sup_{\delta_i \in (0, \delta_i^0)} \frac{\Delta(\delta)}{g(\delta)} > u \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \max_i \sup_{\delta_i \leq \delta_i^0} \tau(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) > u \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{i=1}^k \left\{ \sup_{\delta_i \in (0, \delta_i^0)} \tau(\delta_i) > u \right\} \right\} \leq \sum_{i=1}^k C_5 \exp(-C_3 u) = k C_5 \exp(-C_3 u). \end{aligned}$$

Теорема 1 полностью доказана.

3. Примеры. а) Предположим, что $h_j(\delta_i) \leq H_j + \kappa_j \ln(1/\delta_i)$. Тогда $h(\delta_i) \leq H + \kappa \ln(1/\delta_i)$, $H = \sum_j H_j$, $\kappa = \sum_j \kappa_j$. Далее,

$$g(\delta) = \sum_{i=1}^k \delta_i \left(kH + \kappa \varphi^{*-1} \left(\ln \left(\frac{1}{\delta_i} \right) + \ln \ln \left(\frac{1}{\delta_i} \right) \right) \right).$$

Так как энтропийный ряд $\sum_n 2^{-n} h(2^{-n})$ в данном случае сходится, то по теореме 1

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)}{\sum_{i=1}^k \delta_i \varphi^{*-1}(\kappa \ln(1/\delta_i))} \leq 1 \right\} = 1, \quad (10)$$

и, кроме того,

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\delta_i \in (0, \delta_0)} \frac{\Delta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)}{\sum_{i=1}^k \delta_i \varphi^{*-1}(\kappa \ln(1/\delta_i))} > u \right\} \leq C_2 \exp(-C_3 u), \quad u > u_0. \quad (11)$$

б) Пусть теперь $h_j(\delta) \leq H_0^j \delta^{-\beta_j}$, $\beta_j \in (0, 1)$. (Это условие гарантирует сходимость энтропийного ряда.) Имеем: $h(\delta_i) \leq H_0 \delta_i^{-\beta}$, $H_0 = \max_j H_0^j$, $\beta = \max_{j \in [1, k]} \beta_j \in (0, 1)$,

$$g(\delta) = \sum_{j=1}^k \delta_j \varphi^{*-1} \left(H_0 + \ln \ln \left(\frac{1}{\delta_j} \right) \right).$$

В силу теоремы 1

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta)}{\sum_{i=1}^k \delta_i \varphi^{*-1}(H_0 \delta_i^{-\beta} + \ln \ln(1/\delta_i))} \leq 1 \right\} = 1, \quad (12)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\delta_i \in (0, \delta_0)} \frac{\Delta(\delta)}{\sum_{i=1}^k \delta_i \varphi^{*-1}(H_0 \delta_i^{-\beta} + \ln \ln(1/\delta_i))} > u \right\} \leq C_2 \exp(-C_3 u).$$

в) Рассмотрим теперь случай пространств B_p , $p > 1$, где B_p есть пространство $B(\varphi)$ с функцией $\varphi(\lambda) = |\lambda|^p/p$, $|\lambda| \geq 1$. Тогда $\varphi^*(x) = |x|^q$, $|x| > x_0$, $q = p/(p-1)$. При этом $\varphi^{*-1}(x) = q^{1/q} x^{1/q}$, $x > x_0$, и соотношения (10) и (12) принимают вид

$$\overline{\lim}_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta)}{\sum_{i=1}^k \delta_i \sqrt[q]{\ln(1/\delta_i)}} \leq \sqrt[q]{\kappa q}, \quad \overline{\lim}_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta)}{\sum_{i=1}^k \delta_i^{1-\beta/q}} \leq \sqrt[q]{H_0 q}$$

соответственно. В частности, в субгауссовском и, тем более, гауссовском случае, когда $p = q = 2$, соотношение (10) имеет вид $\overline{\lim}_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} [\Delta(\delta) / \sum_{i=1}^k \delta_i \sqrt{\ln(1/\delta_i)}] \leq \sqrt{2\kappa}$. Стоящая в правой части этого неравенства величина $\sqrt{2\kappa}$ существенно меньше полученных в [2] констант порядка $2^k \sqrt{k\kappa}$. Соотношение (12) в рассматриваемых условиях принимает вид

$$\overline{\lim}_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta)}{\sum_{i=1}^k \delta_i^{1-\beta/2}} \leq \sqrt{2H_0}.$$

4. Центральная предельная теорема в анизотропных пространствах Гёльдера. Пусть $\{\xi_i(t)\}$ — независимые при различных i одинаково распределенные центрированные случайные поля, $\xi(t) = \xi_1(t)$, $D\xi_i(t) < \infty$, $t \in T$. Обозначим $S_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_i(t)$. В этом пункте нас будет интересовать центральная предельная теорема в анизотропных пространствах Гёльдера. Анизотропным пространством Гёльдера, порожденным (анизотропным) модулем непрерывности $\omega(\delta) = \omega(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$, называется совокупность $G^0(\omega)$ непрерывных функций f , $f: T \rightarrow \mathbf{R}^1$, таких, что

$$\lim_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)}{\omega(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)} = 0.$$

Напомним, что $\Delta_f(\delta)$ есть глобальный анизотропный модуль непрерывности функции f . Норма, превращающая $G^0(\omega)$ в сепарабельное банахово пространство (относительно обычных алгебраических операций), вводится формулой

$$\|f(\cdot)\|(G^0(\omega)) = \sup_{t \in T} |f(t)| + \sup \left\{ \frac{\Delta_f(\delta)}{\omega(\delta)}, \max \delta_i \leq \delta_0 \right\}.$$

В силу условия $D\xi(t) < \infty$ конечномерные распределения полей $S_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого центрированного гауссовского поля $S(t)$ с той же ковариационной функцией, что и у $\xi(t)$. Если при этом распределения полей $S_n(\cdot)$ слабо компактны в пространстве $G^0(\omega)$, то говорят, что поля $\xi_i(t)$ удовлетворяют центральной предельной теореме в этом пространстве.

С целью формулировки условий для слабой компактности полей $S_n(\cdot)$ введем функцию $\Phi(\lambda)$ равенством

$$\Phi(\lambda) = \max_{v=\pm 1} \sup_{i \in T} \sup_{n=1,2,\dots} n \ln \mathbf{E} \exp(v \lambda n^{-1/2} \xi_i(t)),$$

а с ее помощью, как и ранее, банахово пространство случайных величин $B(\Phi)$ с нормой $\|\cdot\|(B(\Phi))$, метрику $\bar{d}(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|(B(\Phi))$, энтропию $H(S, \bar{d}, \epsilon)$, локальную энтропию $\bar{h}(\epsilon) = \sup_{i \in T} \sup_{\delta > 0} H(B(t, \bar{d}, \epsilon), \bar{d}, \delta \epsilon)$, функцию $\bar{\pi}(u) = 1/(u \Phi^{**}(u))$. Пусть также функция $\bar{g}(\delta)$ вводится аналогично функции $g(\delta)$ с заменой функции $\varphi(\cdot)$ на функцию $\Phi(\cdot)$:

$$\bar{g}(\delta) = \sum_{i=1}^k \delta_i \Phi^{*-1} \left(\bar{h}(\delta_i) + \ln \ln \frac{1}{\delta_i} \right).$$

Теорема 2. Пусть поля $\xi_i(t)$ локально однородны в метрике $\bar{d}$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \bar{h}(2^{-m}) < \infty. \quad (13)$$

Пусть также $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{h}(\bar{\pi}(x)) \exp(-\Phi^*(x)) = 0$. Если модуль $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\bar{g}(\delta)}{\omega(\delta)} = 0,$$

то поля $\xi_i(\cdot)$ удовлетворяют центральной предельной теореме в пространстве $G^0(\omega)$.

Доказательство теоремы 2 не намного сложнее аналогичного доказательства в случае изотропного модуля, рассмотренного в [3], так что мы ограничимся краткими пояснениями. Так как $\Phi(\lambda) \geq \varphi(\lambda)$, то из условия (13) по теореме 1 следует, что $\mathbf{P}\{\xi_i(\cdot) \in G^0(\omega)\} = 1$. Поэтому и $\mathbf{P}\{S_n(\cdot) \in G^0(\omega)\} = 1$. Далее, согласно (6), существует модуль $\bar{\omega}$ такой, что при $\max_i \delta_i \rightarrow 0$ $\bar{\omega}(\delta)/\omega(\delta) \rightarrow 0$ и при этом с вероятностью 1

$$\lim_{\max_i \delta_i \rightarrow 0} \frac{\omega_{S_n}(\delta)}{\bar{\omega}(\delta)} = 0,$$

т.е. $\mathbf{P}\{S_n(\cdot) \in G^0(\bar{\omega})\} = 1$. В силу (6)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{P}\{\|S_n\|(G^0(\bar{\omega})) > u\} = 0. \quad (14)$$

Как известно (см. [7, с. 63]), множества вида $K_u = \{f, \|f\|(G^0(\bar{\omega})) \leq u\}$ предкомпактны в пространстве $G^0(\omega)$, а из соотношения (14) следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое достаточно большое значение u , что $\sup_n \mathbf{P}\{\|S_n\|(G^0(\bar{\omega})) > u\} \leq \epsilon$, и слабая компактность семейства мер, порожденного полями $\{S_n(\cdot)\}$ в пространстве $G^0(\omega)$, установлена.

По поводу применения доказанного результата в методе Монте-Карло (см. [3]) заметим лишь, что при вычислении методом зависимых испытаний кратного интеграла, зависящего от нескольких параметров, на практике вычисление производится в конечной сетке. Гладкость интеграла по различным переменным может оказаться различной, что существенно при необходимой в таких случаях интерполяции или аппроксимации вычисляемой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С. М.* Приближение многочленами функций действительных переменных. — Математика в СССР за 30 лет: 1917–1947. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 288–318.
2. *Ядренко М. И.* Локальні властивості вибіркокових функцій випадкових полів. — Вісн. Київського університету, сер. матем. мех., 1967, № 9, с. 103–112.
3. *Егизянц С. А., Островский Е. И.* Локальные и глобальные верхние функции для случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 755–764.
4. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист. (Киев: КГУ), 1985, № 32, с. 42–53.
5. *Ostrovsky E. I.* Two-sides exponential inequalities for the distribution of the norm of Banach space valued random variables. — New Trends in Probability and Statistics. V. 1. Utrecht-Tokio: Mokslas, 1993, p. 246–254.
6. *Островский Е. И.* Ковариационные операторы и некоторые оценки гауссовских векторов в банаховом пространстве. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 3, с. 28–34.
7. *Гусейнов А. И., Музтаров Х. Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных уравнений. М.: Наука, 1980, 414 с.
8. *Островский Е. И.* Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения. Обнинск: ОИАТЭ, 1999, 350 с.

Поступила в редакцию
7.IV.1998

Исправленный вариант
17.VI.2000

© 2001 г.

ЧЕРНЫЙ А. С.*

СЕМЕЙСТВА СОГЛАСОВАННЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

В статье рассматривается следующий вопрос. Пусть $(P_t)_{t \geq 0}$ — семейство согласованных вероятностных мер, заданных на фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Существует ли мера P на σ -алгебре $\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ такая, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$? Ответ на этот вопрос положителен для пространств $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$ и $D(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$, наделенных натуральной фильтрацией. Мы доказываем это простым методом, основанным на применении *теоремы Прохорова*.

Ключевые слова и фразы: согласованные вероятностные меры, продолжение мер, пространство Скорохода, теорема Прохорова.

1. Введение. Пусть $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ — пространство с фильтрацией. Предположим, что на каждой σ -алгебре $\mathcal{F}_t$ задана вероятностная мера P_t , причем эти меры согласованы в том смысле, что $P_t|_{\mathcal{F}_s} = P_s$ при $s \leq t$ (через $P_t|_{\mathcal{F}_s}$ обозначено сужение меры P_t на σ -алгебру $\mathcal{F}_s$). Возникает вопрос, существует ли такая мера P на σ -алгебре $\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$ при всех $t \geq 0$.

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен (см. п. 4).

Однако во многих естественных случаях ответ оказывается положительным. Следующее утверждение доказано в [3, гл. V, § 4].

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: cherny@mech.math.msu.su