Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Черный, Семейства согласованных вероятностных мер, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 160–163

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:53:07

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С. М.* Приближение многочленами функций действительных переменных. — Математика в СССР за 30 лет: 1917–1947. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 288–318.
2. *Ядренко М. И.* Локальні властивості вибіркокових функцій випадкових полів. — Вісн. Київського університету, сер. матем. мех., 1967, № 9, с. 103–112.
3. *Егизянц С. А., Островский Е. И.* Локальные и глобальные верхние функции для случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 755–764.
4. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист. (Киев: КГУ), 1985, № 32, с. 42–53.
5. *Ostrovsky E. I.* Two-sides exponential inequalities for the distribution of the norm of Banach space valued random variables. — New Trends in Probability and Statistics. V. 1. Utrecht-Tokio: Mokslas, 1993, p. 246–254.
6. *Островский Е. И.* Ковариационные операторы и некоторые оценки гауссовских векторов в банаховом пространстве. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 3, с. 28–34.
7. *Гусейнов А. И., Музтаров Х. Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных уравнений. М.: Наука, 1980, 414 с.
8. *Островский Е. И.* Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения. Обнинск: ОИАТЭ, 1999, 350 с.

Поступила в редакцию
7.IV.1998

Исправленный вариант
17.VI.2000

© 2001 г.

ЧЕРНЫЙ А. С.*

СЕМЕЙСТВА СОГЛАСОВАННЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

В статье рассматривается следующий вопрос. Пусть $(P_t)_{t \geq 0}$ — семейство согласованных вероятностных мер, заданных на фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Существует ли мера P на σ -алгебре $\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ такая, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$? Ответ на этот вопрос положителен для пространств $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$ и $D(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$, наделенных натуральной фильтрацией. Мы доказываем это простым методом, основанным на применении *теоремы Прохорова*.

Ключевые слова и фразы: согласованные вероятностные меры, продолжение мер, пространство Скорохода, теорема Прохорова.

1. Введение. Пусть $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ — пространство с фильтрацией. Предположим, что на каждой σ -алгебре $\mathcal{F}_t$ задана вероятностная мера P_t , причем эти меры согласованы в том смысле, что $P_t|_{\mathcal{F}_s} = P_s$ при $s \leq t$ (через $P_t|_{\mathcal{F}_s}$ обозначено сужение меры P_t на σ -алгебру $\mathcal{F}_s$). Возникает вопрос, существует ли такая мера P на σ -алгебре $\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$ при всех $t \geq 0$.

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен (см. п. 4).

Однако во многих естественных случаях ответ оказывается положительным. Следующее утверждение доказано в [3, гл. V, § 4].

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: cherny@mech.math.msu.su

Предложение. Пусть $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty})$ — пространство с дискретной фильтрацией. Предположим, что

i) для любого n существует польское пространство X_n такое, что $\mathcal{F}_n$ изоморфна борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(X_n)$;

ii) для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ такой, что A_n — атом $\mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), выполнено: $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

Тогда любая последовательность (P_n) согласованных вероятностных мер на $(\mathcal{F}_n)$ может быть продолжена до меры на $\bigvee_n \mathcal{F}_n$.

Обычно рассматриваемая проблема возникает не для абстрактных измеримых пространств, а для «канонических» пространств $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ и $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Из предложения легко вывести следующее утверждение.

Теорема. Пусть $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (соответственно $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$) — пространство непрерывных (соответственно непрерывных справа с пределами слева) функций $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$. Пусть $(X_t)_{t \geq 0}$ — канонический процесс (т.е. $X_t: C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \ni \omega \mapsto \omega(t) \in \mathbb{R}^d$), $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ — каноническая фильтрация. Предположим, что на этой фильтрации задано семейство согласованных вероятностных мер (P_t) . Тогда на σ -алгебре $\mathcal{F} = \sigma(X_s; s \geq 0)$ существует единственная мера P такая, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$ для любого $t \geq 0$.

Это утверждение для пространства $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ доказано также в [5, (1.3.5)].

Доказательства в [3] и [5] используют довольно сложные рассуждения из общей теории меры. В настоящей статье (п. 2) мы приводим простое доказательство теоремы, основанное на использовании *теоремы Прозорова*. Пункт 3 содержит применение полученных результатов. В п. 4 приводится пример, показывающий, что для произвольных измеримых пространств с произвольной фильтрацией $(\mathcal{F}_t)$ семейство согласованных вероятностных мер на $(\mathcal{F}_t)$ может не продолжаться до меры на $\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

2. Доказательство теоремы.

Доказательство. Докажем утверждение для пространства $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $F_n: D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \ni X \mapsto Y \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, определенное по формуле $Y_t = X_{t \wedge n}$, является $\mathcal{F}_n|_{\mathcal{F}}$ -измеримым. Положим $Q_n = P_n \circ F_n^{-1}$ (т.е. Q_n — мера на $\mathcal{F}$). Заметим, что $\mathcal{F}$ совпадает с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$.

Докажем, что последовательность $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ *плотна*. Необходимым и достаточным условием плотности является следующее (см. [2, гл. VI, § 3b]): для любых $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существуют такие $n_0 \in \mathbb{N}$, $K > 0$ и $\theta > 0$, что

$$n \geq n_0 \implies Q_n \left\{ \sup_{i \leq N} |X_i| < K \right\} > 1 - \varepsilon, \quad (1)$$

$$n \geq n_0 \implies Q_n \left\{ \omega'_N(X, \theta) < \eta \right\} > 1 - \varepsilon, \quad (2)$$

где $\omega'_N(X, \theta)$ обозначает следующий модуль «непрерывности»:

$$\omega'_N(X, \theta) = \inf \left\{ \max_{i \leq m} \sup_{t_{i-1} \leq s \leq r < t_i} |X_r - X_s| : \right. \\ \left. 0 = t_0 < \dots < t_m = N, \inf_{i \leq m} (t_i - t_{i-1}) \geq \theta \right\}.$$

Фиксируем $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$. Поскольку множество, состоящее из одной меры Q_N , является плотным, существуют такие $K > 0$ и $\theta > 0$, что

$$Q_N \left\{ \sup_{i \leq N} |X_i| < K \right\} > 1 - \varepsilon, \quad (3)$$

$$Q_N \left\{ \omega'_N(X, \theta) < \eta \right\} > 1 - \varepsilon. \quad (4)$$

Из условия $P_n|_{\mathcal{F}_N} = P_N$ ($n \geq N$) следует, что $Q_n|_{\mathcal{F}_N} = Q_N|_{\mathcal{F}_N}$ ($n \geq N$). Тем самым, из (3), (4) вытекает выполнение (1), (2) с $n_0 = N$.

Итак, последовательность $(Q_n)_{n=1}^\infty$ плотна. По *теореме Прохорова*, существуют последовательность $n_k \rightarrow \infty$ и мера P на $\mathcal{F}$ такие, что Q_{n_k} слабо сходится к P при $k \rightarrow \infty$. Докажем, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$ при всех $t \geq 0$. Фиксируем $M \in \mathbb{N}$ и определим отображение

$$G: D(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d) \ni X \mapsto Y \in D([0, M], \mathbf{R}^d)$$

по формуле $Y_t = X_t$ ($t \leq M$). Обозначим через $\tilde{k}$ минимальное из тех k , для которых $n_k \geq M$. Положим $R = P \circ G^{-1}$, $R_k = Q_{n_k} \circ G^{-1}$ ($k \geq \tilde{k}$). Очевидно, $R_k = R_{\tilde{k}}$ при $k \geq \tilde{k}$. Отображение G непрерывно при наделении $D(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$ и $D([0, M], \mathbf{R}^d)$ топологией Скорохода. Следовательно, R_k слабо сходится к R при $k \rightarrow \infty$. Учитывая, что $R_k = R_{\tilde{k}}$ при $k \geq \tilde{k}$, получаем: $R = R_{\tilde{k}}$. Итак, меры P и $Q_{n_{\tilde{k}}}$ совпадают на σ -алгебре $G^{-1}(\mathcal{B}(D([0, M], \mathbf{R}^d))) = \mathcal{F}_M$. С учетом неравенства $n_{\tilde{k}} \geq M$, имеем $P|_{\mathcal{F}_M} = Q_{n_{\tilde{k}}}|_{\mathcal{F}_M} = Q_M|_{\mathcal{F}_M} = P_M$. Отсюда, в силу произвольности M , следует, что $P|_{\mathcal{F}_t} = P_t$ для любого $t \geq 0$.

Единственность меры P вытекает из равенства: $\mathcal{F} = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

Доказательство для пространства $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$ проводится аналогично за исключением того, что в формулах (1)–(4) необходимо заменить $\omega'_N(X, \theta)$ следующим модулем непрерывности: $\omega_N(X, \theta) = \sup\{|X_r - X_s|: 0 \leq s \leq r \leq N, |r - s| \leq \theta\}$.

З а м е ч а н и е. Теорема верна при замене фильтрации $(\mathcal{F}_t)$ на ее правую модификацию $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Для доказательства этого факта достаточно применить теорему к семейству мер $\tilde{P}_t = P_t|_{\mathcal{F}_t}$, получить меру P на $\mathcal{F}$ такую, что $P|_{\mathcal{F}_t} = \tilde{P}_t$ ($t \geq 0$), и воспользоваться очевидными равенствами:

$$P|_{\mathcal{G}_t} = (P|_{\mathcal{F}_{t+1}})|_{\mathcal{G}_t} = \tilde{P}_{t+1}|_{\mathcal{G}_t} = (P_{t+1}|_{\mathcal{F}_{t+1}})|_{\mathcal{G}_t} = P_{t+1}|_{\mathcal{G}_t} = P_t.$$

3. Применение полученных результатов. В этом пункте мы рассматриваем следующую проблему.

Пусть $(B_t; t \geq 0)$ — броуновское движение на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ и τ — $(\mathcal{F}_t)$ -момент остановки. Мы сформулируем необходимое и достаточное условие для того, чтобы процесс

$$M_t = \exp\left\{B_{t \wedge \tau} - \frac{1}{2} t \wedge \tau\right\}$$

был равномерно интегрируемым мартингалом.

Очевидно, M равномерно интегрируем тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}_P \exp\left\{B_\tau - \frac{1}{2} \tau\right\} = 1, \quad (5)$$

где

$$\exp\left\{B_\tau - \frac{1}{2} \tau\right\} = 0 \quad (*)$$

на множестве $\{\tau = \infty\}$. Рассмотрим двумерный процесс X , заданный по формуле: $X_t^1 = B_t$, $X_t^2 = (t - \tau)^+$. Тогда (8) равносильно следующему условию:

$$\mathbf{E}_Q \exp\left\{X_T^1 - \frac{1}{2} T\right\} = 1, \quad (6)$$

где Q обозначает распределение процесса X (Q — мера на $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)$), а $T = \inf\{t \geq 0: X_t^2 > 1\}$.

Для того, чтобы исследовать (6), положим $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X_s; s \leq t + \varepsilon)$, $Q_t = Q|_{\mathcal{G}_t}$ и рассмотрим меры $(\tilde{Q}_t)_{t \geq 0}$ такие, что $d\tilde{Q}_t/dQ_t = \exp\{X_t^1 - \frac{1}{2} t\}$. Очевидно, $(\tilde{Q}_t)_{t \geq 0}$ является семейством согласованных вероятностных мер. Согласно замечанию после доказательства теоремы, существует мера $\tilde{Q}$ на σ -алгебре $\mathcal{F} = \sigma(X_s; s \geq 0)$ такая, что $\tilde{Q}|_{\mathcal{G}_t} = \tilde{Q}_t$ ($t \geq 0$). Положим $Q_T = Q|_{\mathcal{G}_T}$, $\tilde{Q}_T = \tilde{Q}|_{\mathcal{G}_T}$. Согласно [2, гл. III, § 3а],

$$\frac{d\tilde{Q}_T|_{\{T < \infty\}}}{dQ_T|_{\{T < \infty\}}} = \exp\left\{X_T^1 - \frac{1}{2} T\right\}.$$

Следовательно,

$$\tilde{Q}\{T < \infty\} = E_Q \left[I(T < \infty) \exp \left\{ X_T^1 - \frac{1}{2} T \right\} \right] = E_Q \exp \left\{ X_T^1 - \frac{1}{2} T \right\}.$$

Здесь мы используем равенство: $\exp\{X_T^1 - \frac{1}{2} T\} = 0$ на множестве $\{T = \infty\}$ (см. (*)). Итак, (6) эквивалентно следующему условию:

$$\tilde{Q}\{T < \infty\} = 1. \quad (7)$$

Условие (7) обычно трудно проверить. Однако иногда оно является очень удобным. Пусть, например, $\tau = \inf\{t \geq 0: B_t \geq \varphi(t)\}$, где $\varphi \in C(\mathbf{R}_+)$, $\varphi(0) > 0$. В этом случае распределение процесса $(X_t^1; t \geq 0)$ относительно меры $\tilde{Q}$ совпадает с распределением броуновского движения с единичным сносом. Тем самым, $\tilde{Q}\{T < \infty\} = 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t) - t$ является *нижней функцией* для броуновского движения.

4. Пример. Теорема может потерять силу, если фильтрацию $(\mathcal{F}_t)$ заменить другой фильтрацией. Следующий пример взят из [1].

П р и м е р. Пусть $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0,1]}$ — фильтрация на $C([0,1])$, заданная по формуле: $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s; s \leq t) \vee \sigma(X_1)$, где $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ — канонический процесс. Обозначим через P винеровскую меру на $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$. Известно, что относительно меры P канонический процесс допускает следующее представление:

$$X_t = \int_0^t \frac{X_1 - X_s}{1-s} ds + B_t = \int_0^t \alpha_s ds + B_t,$$

где B является $(\mathcal{G}_t)$ -броуновским движением. Рассмотрим семейство мер $(Q_t)_{t \in [0,1]}$, определенных по формуле: $dQ_t/dP_t = \exp\{-\int_0^t \alpha_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_s^2 ds\}$, где $P_t = P|_{\mathcal{G}_t}$. Тогда $(Q_t)_{t \in [0,1]}$ является семейством согласованных вероятностных мер на $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0,1]}$.

Предположим, что существует мера Q на $\mathcal{G}$ такая, что $Q|_{\mathcal{G}_t} = Q_t$ для любого $t \in [0,1]$. По теореме Гирсанова, $\text{Law}(X_s; s \leq t | Q_t) = \text{Law}(B_s; s \leq t) = \text{Law}(X_s; s \leq t | P_t)$ для любого $t < 1$. Следовательно, $\text{Law}(X_s; s \leq 1 | Q) = \text{Law}(X_s; s \leq 1 | P)$. Итак,

$$Q | \sigma(X_s; s \leq 1) = P | \sigma(X_s; s \leq 1).$$

Поскольку $\sigma(X_s; s \leq 1) = \mathcal{G}$, заключаем, что $Q = P$. Но это приводит к противоречию, так как $Q | \mathcal{G}_t = Q_t \neq P_t = P | \mathcal{G}_t$. Таким образом, семейство $(Q_t)_{t \in [0,1]}$ не может быть продолжено до меры на σ -алгебре $\mathcal{G}$.

З а м е ч а н и е. В [4, гл. II, §3] содержится другой пример, который показывает, что в случае произвольного измеримого пространства с фильтрацией семейство согласованных вероятностных мер может не продолжаться до меры на $\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

Автор благодарит профессора А. Н. Ширяева за полезные обсуждения и рекомендации. Автор также благодарен профессору Х. Ю. Энгельберту за ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Föllmer H., Imkeller P. Anticipation cancelled by a Girsanov transformation: A paradox on Wiener space. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1993, v. 29, № 4, p. 569–586.
2. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994, 544 с.
3. Parthasarathy K. R. Probability Measures on Metric Spaces. New York–London: Academic Press, 1967, 276 p.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
5. Stroock D. W., Varadhan S. R. S. Multidimensional Diffusion Processes. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1979, 338 p.

Поступила в редакцию
17.III.1999