Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

XX международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 184–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:38:54

© 2001 г.

XX МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР ПО ПРОБЛЕМАМ
УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ*

Murat M., Szynal D. (Lublin, Poland) Bayesian estimators of parameters of inflated distributions.

1. Introduction. In this note we analyze a mixed population consisting of two groups of individuals. The individuals of the first group follow a simple distribution, while those of the second group are observed with a frequency significantly higher than can be expected on the basis of the simple distribution. The probability function of the random variable X in this case can be defined by the equation

$$p(x; \theta) = \begin{cases} \beta + \alpha a(s) [g(\theta)]^s [f(\theta)]^{-1}, & x = s, \\ \alpha a(x) [g(\theta)]^x [f(\theta)]^{-1}, & x \neq s, \end{cases} \quad (1)$$

where $s \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\beta = 1 - \alpha$, functions $f(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} a(x) [g(\theta)]^x$, $g(\theta)$ are positive, finite and differentiable and $a(x) > 0$ is free of θ .

In this note we give joint posterior moments of θ and α for model (1). From this formulae we get Bayesian estimators.

For formulation (1) it will be assumed that the prior information on α can be summarized by a beta-distribution and that the prior information on θ can be summarized by a gamma- or a beta-distribution. Moreover, as a prior distribution of θ we consider a generalized Pareto distribution (cf. [1] and [3])

$$g(\theta | b) = \begin{cases} (1 + b\theta)^{-1-1/b}, & \theta \geq 0, b > 0, \\ e^{-\theta}, & \theta \geq 0, b = 0, \\ (1 + b\theta)^{-1-1/b}, & \theta \in \left(0, -\frac{1}{b}\right), b < 0. \end{cases}$$

The results presented contain as particular cases ($s = 0$) those given in [4] concerning the excess zeros Poisson distribution.

2. Posterior distributions and moments of the inflated modified power series distributions. The likelihood function of (1) is given by

$$L(\theta, \alpha | \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{n_s} \binom{n_s}{j} \alpha^j (1 - \alpha)^{N-j} a(s)^{-j} \prod_{i=1}^{N-n_s} a(x_i)^{n_i} [g(\theta)]^{y-sj} [f(\theta)]^{j-N}, \quad (2)$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = \sum_{i=1}^{N-n_s} x_i$, and n_i is the number of observations in the i th class, and $\sum_{i \geq 0} n_i = N$. Then applying the Bayesian theorem and using (2) we obtain the following theorem.

Theorem 1. *If the prior distribution of α is the beta-distribution with parameters a , b and the prior distribution of θ is the gamma-distribution with parameters c , d ,*

* Первая часть резюме докладов опубликована в журнале «Теория вероятностей и ее применения», т. 45, в. 4, 2000.

then the joint posterior moments of θ and α are given by

$$\begin{aligned} E(\theta^r, \alpha^t | \mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^{n_s} \binom{n_s}{j} B(a+j+t+1, N-j+b+1) a(s)^{-j} \\ &\times \int_0^\infty \theta^{c+r} e^{-\theta d} [g(\theta)]^{y-sj} [f(\theta)]^{j-N} d\theta \\ &\times \left(\sum_{j=0}^{n_s} \binom{n_s}{j} B(j+a+1, N-j+b+1) a(s)^{-j} \right)^{-1} \\ &\times \left(\int_0^\infty \theta^c e^{-\theta d} [g(\theta)]^{y-sj} [f(\theta)]^{j-N} d\theta \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Putting $r = 0$ and $t = 1$ in the above formula we obtain the Bayesian estimator of the parameter of inflation α . Moreover, for $r = 1$ and $t = 0$ we get the Bayesian estimator of the parameter θ .

We obtain similar formulae assuming that the prior distribution of the parameter θ is a beta- or a generalized Pareto distribution.

3. Posterior distributions and moments based on the distribution of the sum of IMPSD. Assume now that

$$p(x; \theta) = \begin{cases} \beta + \alpha a(s) [g(\theta)]^s [f(\theta)]^{-1}, & x = s, \\ \alpha a(x) [g(\theta)]^x [f(\theta)]^{-1}, & x = s+1, s+2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Let $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, where $X_1, X_2, \dots, X_n$ are assumed to be independent with probability function (3). In this case we have (cf. [2])

$$\mathbf{P}\{Z_n = z\} = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \frac{a_k(ks) [g(\theta)]^{ks}}{[f(\theta)]^k}, & z = ns, \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \frac{a_k(z - (n-k)s) [g(\theta)]^{z-(n-k)s}}{[f(\theta)]^k}, & z = ns+1, ns+2, \dots, \end{cases} \quad (4)$$

where $a_0(0) = 1$, $a_1(x) = a(x)$, $a_k(x) = \sum_{y=s}^x a(y) a_{k-1}(x-y)$, $k = 2, 3, \dots, n$, are coefficients of $[g(\theta)]^x$ in $[f(\theta)]^k$.

Applying the Bayesian theorem and (4) we obtain the following result.

Theorem 2. If the prior distribution of α is the beta-distribution with the parameters a, b and the prior distribution of θ is the beta-distribution with the parameters c, d , then the joint posterior moments of θ and α are expressed as follows:

$$\begin{aligned} E(\theta^r, \alpha^t | \mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(a+k+t, b+n-k) a_k(ks) \\ &\times \int_0^1 \theta^{a+r} (1-\theta)^b [g(\theta)]^{ks} [f(\theta)]^{-k} d\theta \\ &\times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k) a_k(ks) \int_0^1 \theta^a (1-\theta)^b [g(\theta)]^{ks} [f(\theta)]^{-k} d\theta \right)^{-1}, \\ &\text{for } z = ns, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\theta^r, \alpha^t | \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B(a+k+t, b+n-k) a_k(z - (n-k)s) \\ &\times \int_0^1 \theta^{a+r} (1-\theta)^b [g(\theta)]^z [f(\theta)]^{-k} d\theta \\ &\times \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k) a_k(z - (n-k)s) \int_0^1 \theta^a (1-\theta)^b [g(\theta)]^z [f(\theta)]^{-k} d\theta \right)^{-1}, \\ &\text{for } z > ns. \end{aligned}$$

REFERENCES

1. *Ahsanullah M., Balakrishnan N.* Recurrence relations for single and product moments of record values from generalized Pareto distribution. — *Comm. Statist. Theory Methods*, 1994, v. 23, № 10, p. 2841–2852.
2. *Murat M., Szynal D.* Nonzero inflated modified power series distributions. — *Comm. Statist. Theory Methods*, 1998, v. 27, p. 3047–3064.
3. *Pikands J.* Statistical inference using extreme order statistics. — *Ann. Statist.*, 1975, v. 3, № 1, p. 119–131.
4. *Williford W. O., Bingham S. F.* Bayesian estimation of the parameters in two modified Poisson distributions. — *Comm. Statist. Theory Methods*, 1979, v. 8, p. 1315–1326.

Plucińska A. (Warsaw, Poland) **Factorization problem for polynomial-normal distribution.**

The density of the polynomial-normal distribution (PND) is the product of a nonnegative polynomial and the normal density; see [1]. It is known that every polynomial can be represented as a linear combination of the Hermite polynomials. Thus we will consider a random variable (r.v.) X with density given by one of the following equivalent forms:

$$f_{2n}(x) = p_{2n}(x) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2c^2}\right) = \sum_{r=0}^{2n} h_r H_r\left[\frac{x-m}{c}\right] \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2c^2}\right), \quad (1)$$

where p_{2n} is a nonnegative polynomial of degree $2n$ ($n \geq 0$, $c > 0$), H_r is the Hermite polynomial of degree r , $h_r = (1/r!) \int H_r[(x-m)/c] f(x) dx = (1/r!) \mathbb{E} H_r[(X-m)/c]$. The characteristic function (ch.f.) corresponding to (1) is given by the formula

$$\varphi(\xi) = \sum_{r=0}^{2n} (i\xi c)^r h_r \exp\left(i\xi m - \frac{1}{2}\xi^2 c^2\right). \quad (2)$$

The ch.f.'s of the form $\varphi(\xi) = \sum_{r=0}^{2n} (i\xi c)^r a_r \exp(i\xi m - \frac{1}{2}\xi^2 c^2)$ were considered by Lukacs [3]. He gave for the coefficients a_r some sufficient conditions which ensure that φ is a ch.f. The properties of the sums of independent r.v.'s with polynomial-normal distributions (PND) were considered by Lukacs ([2], [3]) and also by Evans and Swartz ([1]).

We give here a slightly different form of the distribution of the sum and next using this form we give a decomposition theorem.

A function φ given by (2) is an entire ch.f. Put $z = \xi + i\eta$. Let $z_1, \dots, z_{2n}$ be the zeros of φ and let $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_{2n})$. The function φ can be written in the equivalent form $\varphi(\xi) = Q(\xi, \mathbf{Z}) \exp(i\xi m - \frac{1}{2}\xi^2 c^2)$, where $Q(\xi, \mathbf{Z})$ is the canonical product of the function φ . In the considered case $Q(\xi, \mathbf{Z}) = \prod_{i=1}^{2n} (1 - \xi/z_i)$ and $Q(\xi, \mathbf{Z}) = 1$ if φ is without zeros.

Instead of the parameters h_r ($r \leq 2n$) of φ we can evidently use the parameters z_r ($r \leq 2n$). Every system of these parameters determines φ . The distribution of the r.v. X_i given by (1) will be denoted by $\text{PND}(n_i, m_i, c_i^2, \mathbf{Z}_i)$.

The following propositions hold:

Proposition 1. *If $X_1, \dots, X_N$ are independent r.v.'s and the distribution of X_j ($j \leq N$) is $\text{PND}(n_j, m_j, c_j^2, \mathbf{Z}_j)$, then $S_N = X_1 + \dots + X_N$ has the distribution $\text{PND}(\sum_{i=1}^N n_i, \sum_{i=1}^N m_i, \sum_{i=1}^N c_i^2, \bigcup_{i=1}^N \mathbf{Z}_i)$.*

Proposition 2. *The ch.f. φ of (PND) has only (PND) factors. Moreover, if $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, then $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$, $c^2 = c_1^2 + c_2^2$, $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \cup \mathbf{Z}_2$.*

Example. We consider various factorization problems for the function

$$\tilde{\varphi}(\xi) = (-1)^n [(2n-1)!!]^{-1} H_{2n}(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 c^2\right).$$

We show that $\tilde{\varphi}$ cannot be a ch.f. for $c^2 < 1$. We show that the zeros $\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_n$ of H_{2n} satisfy the inequality $\alpha_1^{-2} + \dots + \alpha_n^{-2} \geq 1$.

REFERENCES

1. *Evans M., Swartz T.* Distribution theory and inference for polynomial-normal densities. — Comm. Statist., 1994, v. 23, p. 1123–1148.
2. *Lukacs E.* Characteristic Functions. London: Griffin, 1970.
3. *Lukacs E.* On the arithmetical properties of certain entire characteristic functions. — Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab., 2, Part I. Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, p. 401–414.

Riedel M., Rossberg H.-J. (Leipzig, Germany) **Limit theorems for positive definite densities and their distributions.**

Positive definite densities p always have counterparts $\hat{p}$. They are connected by the fundamental relations $f = \hat{p}/\hat{p}(0)$, $\hat{f} = \hat{p}/p(0)$, $2\pi p(0)\hat{p}(0) = 1$, where f and $\hat{f}$ stand for the corresponding characteristic functions (cf. [1]). Thus characteristic functions obtain a direct probabilistic interpretation. Moreover, all inequalities for real characteristic functions f imply estimates for positive definite densities, e.g., the following recent result: $f(t) \geq \cos(\sigma t)$, $|\sigma t| \leq \pi$, for all characteristic functions with finite variances σ^2 (conjectured by C. Pfannschmidt, proved by H.-J. Rossberg, cf. Appendix to [2]).

In the present talk we do not investigate the interrelation between p and $\hat{p}$ but consider sequences $\{p_n\}$ of such densities with counterparts $\{\hat{p}_n\}$. The continuity theorem for characteristic functions can be applied to find out the consequences for $\{\hat{p}_n\}$ which follow from appropriate assumptions on $\{p_n\}$ (cf. [3]). We present here some essentially improved results.

In the following $\xrightarrow{c}$ denotes «complete convergence» to some distribution function.

Theorem 1. *Let the distribution functions F_n possess positive definite densities p_n and assume $F_n \xrightarrow{c} F$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(0) < \infty$. Then it follows*

- (1) *F possesses a positive definite density p ;*
- (2) *there exists some distribution function $\hat{H}$ such that $\hat{F}_n \xrightarrow{c} \hat{H}$ if and only if $p_n(0) \rightarrow p(0)$;*
- (3) *in this case $\hat{H} = \hat{F}$ and $p_n \rightarrow p$, $\hat{p}_n \rightarrow \hat{p}$ uniformly on $\mathbf{R}$.*

The counterpart to this result, where p_n is given, runs as follows.

Theorem 2. *Let $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be continuous at 0, $p(0) > 0$. If $p_n \rightarrow p$, then*

- (1) *p is positive definite and continuous;*
- (2) *there exists some distribution function $\hat{H}$ with a positive definite density $p_{\hat{H}}$ such that $\hat{F}_n \xrightarrow{c} \hat{H}$ if and only if $2\pi p(0)p_{\hat{H}}(0) \leq 1$;*
- (3) *there exists some distribution function H with a positive definite density p_H such that $F_n \xrightarrow{c} H$ if and only if $2\pi p(0)p_H(0) = 1$.*

In this case p is the probability density of H and $p_n \rightarrow p$ uniformly on $\mathbf{R}$.

The results are particularly elegant under the additional assumption $p_n = \hat{p}_n$, $n > 0$. They all are included in [4].

REFERENCES

1. *Lewis M.* Perspectives in Probability and Statistics. New York: Academic Press, 1976.
2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Наука, 1969.
3. *Rossberg H.-J.* Limit theorems for positive definite probability densities. — Stability Problems for Stochastic Models (Sukhumi, 1987). Lecture Notes in Math., v. 1412, Berlin, Springer, 1989, p. 296–308.
4. *Laue G., Riedel M., Rossberg H.-J.* Unimodale und positiv definite Dichten. Berlin: Teubner, 1999.

Rychlik Z., Walczyński T. (Lublin, Poland) **Convergence in law of random sums with nonrandom centering.**

Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of random variables. Let $\{N_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive integer-valued random variables, such that, for every $n \geq 1$, N_n is independent of $\{X_n, n \geq 1\}$. Let $\{A_n, n \geq 1\}$ and $\{B_n, n \geq 1\}$ be sequences of real numbers. Assume

$$B_n > 0, \quad B_n < B_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad B_n \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Let us put $R_n = (S_{N_n} - A_n)/B_n$, $T_n = (S_n - A_n)/B_n$, $U_n = (A_{N_n} - A_n)/B_n$. The main results concern tightness and weak convergence of the sequence $\{R_n, n \geq 1\}$ under the following conditions: for every $\varepsilon > 0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|i-j| > K} \mathbf{P}\left\{\left|(S_i - A_i) - (S_j - A_j)\right| \geq \varepsilon |A_i - A_j| + \varepsilon B_n\right\} = 0 \quad (2)$$

and, for every $K > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|i-j| \leq K} \mathbf{P}\left\{\left|(S_i - A_i) - (S_j - A_j)\right| \geq \varepsilon |A_i - A_j| + \varepsilon B_n\right\} = 0. \quad (3)$$

The presented theorems generalize or extend the main results obtained in [2], [1], and [3].

Definition. A sequence $\{Z_n, n \geq 1\}$ of random variables is said to be balanced if

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \mathbf{P}\{Z_n \leq M\} \wedge \mathbf{P}\{Z_n \geq -M\} \right\} = 0, \quad (4)$$

where $a \wedge b = \min(a, b)$.

From now on we assume that the sequences $\{X_n, n \geq 1\}$, $\{A_n, n \geq 1\}$, and $\{B_n, n \geq 1\}$ are such that (1), (2), and (3) hold.

Theorem 1. *The following conditions are equivalent:*

- (i) $\{R_n, n \geq 1\}$ is tight and $\{T_n, n \geq 1\}$ is balanced;
- (ii) $\{T_n, n \geq 1\}$ and $\{U_n, n \geq 1\}$ are both tight.

Theorem 2. *If any two of the sequences $\{R_n, n \geq 1\}$, $\{T_n, n \geq 1\}$, or $\{U_n, n \geq 1\}$ are tight, then so is the third.*

Theorem 3. *If $T_n \Rightarrow T$ and $U_n \Rightarrow U$ as $n \rightarrow \infty$, then $R_n \Rightarrow R$ as $n \rightarrow \infty$. Furthermore, $R \stackrel{d}{=} T + U$, where T and U are independent random variables.*

Theorem 4. *If $T_n \Rightarrow T$ and $R_n \Rightarrow R$ as $n \rightarrow \infty$, and, for every $t \in (-\infty, \infty)$, $\mathbf{E} \exp(itT) \neq 0$, then $U_n \Rightarrow U$ as $n \rightarrow \infty$ and $R \stackrel{d}{=} T + U$, where T and U are independent random variables.*

Theorem 5. *If $R_n \Rightarrow R$ and $U_n \Rightarrow U$ as $n \rightarrow \infty$, and, for every $t \in (-\infty, \infty)$, $\mathbf{E} \exp(itU) \neq 0$, then $T_n \Rightarrow T$ as $n \rightarrow \infty$ and $R \stackrel{d}{=} T + U$, where T and U are independent random variables.*

REFERENCES

1. Finkelstein M., Kruglov V., Tucker H. Convergence in law of random sums with nonrandom centering. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 3, p. 565–598.
2. Griffin P. S. A note on random sums with nonrandom centering. — J. Theoret. Probab., 1997, v. 10, № 2, p. 333–348.
3. Krajka A., Rychlik Z. Necessary and sufficient conditions for weak convergence of random sums of independent random variables. — Comment. Math. Univ. Carolin., 1993, v. 34, № 3, p. 465–482.

Сапожников П. Н. (Пермь, Россия) **Восстановление семейства сдвигов по распределению максимального инварианта.**

В [1], [2] и многих других работах показано, что при определенных условиях проверку гипотезы согласия о том, что повторная выборка $\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ взята из совокупности ξ , плотность распределения которой принадлежит семейству

$\mathcal{F} = \{f(x|g), g \in G\}$, можно заменить на эквивалентную ей проблему тестирования подходящего характеристического свойства семейства $\mathcal{F}$. Здесь получены достаточные условия характеристики семейства, порожденного преобразованиями связной локально-компактной группы Ли G со счетным топологическим базисом, плотностью распределения некоторого максимального инварианта в выборочном пространстве и указана техника практической реализации этого характеризационного результата.

Пусть областью значений ξ является однородное пространство X базовой группы G и $f(x|g) = f(g^{-1}x)\Delta(g)$ — общая плотность семейства относительно квазиинвариантной меры μ , где $\Delta(g) = d\mu(g^{-1}x)/d\mu(x)$. Назовем $\mathcal{F}$ регулярным семейством сдвигов, если носителем $f(x)$ служит все пространство X и $f(x) \in C^{(1)}(X)$. В качестве «избранного» инварианта возьмем аналог максимального инварианта в конечномерном евклидовом пространстве относительно группы линейных преобразований вещественной прямой, т.е. $U_{k,n}(x_n) = \sigma_n^{-1}x_{k,n}$, где $g^{-1}x_{k,n}$ обозначает кортеж элементов $g^{-1}x_{k+1}, \dots, g^{-1}x_n$, а σ_n — эквивариантную оценку параметра сдвига g (индекс k опускается, если он равен нулю).

Выбор определенной оценки σ_n осуществляется в предположении о существовании вектор-функции $\varphi^T(x)$ с m компонентами класса $C^{(1)}(X)$, линейно независимыми от единицы и такой, что $\varphi(g^{-1}x) = V_0(g) + V_1(g)\varphi(x)$, $g \in G$. Тогда функция $T_n(x_n) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)$ на X^n с областью значений $\tau_n \subseteq \mathbb{R}^m$ эквивариантна, поскольку при сдвиге аргумента $x_n \rightarrow g^{-1}x_n$ сама функция преобразуется по формуле $T_n(g^{-1}x_n) = A_n(g)T_n(x_n)$, где $A_n(g)t = nV_0(g) + V_1(g)t$ — аффинное преобразование в $\mathbb{R}^m$. Так как компоненты функции $T_n(x_n)$ функционально независимы при $n \geq m$, то существует точка, принадлежащая τ_n вместе с некоторой открытой окрестностью из $\mathbb{R}^m$. Множество всех таких (внутренних) точек обозначим $\text{Int}(\tau_n)$. Если при фиксированном t_0 и произвольном t , принадлежащим $\text{Int}(\tau_n)$, уравнение $A_n(g)t = t_0$ имеет решение при некотором $n \geq m$, то существует единственное эквивариантное решение $\sigma_n(t)$, т.е. решение обладающее свойством $\sigma_n(A_n(g)t) = g^{-1}\sigma_n(t)$ ([3]). Далее всюду $\sigma_n = \sigma_n(T_n(x_n))$.

Пусть $\mathcal{U}_{k,n}$ — область значений инварианта $U_{k,n}$, и μ_n, P_n обозначают меры, определенные на σ -алгебре борелевских подмножеств X^n , порожденные произведениями мер μ, P соответственно. Здесь X^n — декартово произведение n экземпляров пространств X , а $P(B) = \int_B f(x) d\mu(x)$. Будем говорить, что отображение $K(x_n) \in C^{(1)}(X^n)$ многообразия X^n на дифференцируемое многообразие $\mathcal{U}$ сохраняет размерность с P_n -вероятностью единица, если существует конечное разбиение $\{X_\alpha^n\}$ множества X^n такое, что сужение $K(x_n)$ на X_α^n имеет обратное отображение класса $C^{(1)}(\mathcal{U})$ для каждого α , исключая быть может один индекс α_0 , для которого $P_n(X_{\alpha_0}^n) = 0$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F}$ — регулярное семейство сдвигов и $T_n(X_n)$, определенная выше, — эквивариантная статистика. Если при некотором $n, n \geq m$, отображение $(T_n(x_n), U_{k,n}(x_{k,n}))$ пространства X^n на $\tau_n \times \mathcal{U}_{k,n}$ сохраняет размерность с P_n -вероятностью 1, то $k = m/r$, где r — размерность X ; инвариант $U_{k,n}(X_n)$ при указанном k имеет плотность относительно меры μ_{n-k} и семейство $\mathcal{F}$ можно восстановить по его распределению единственным образом с точностью до выбора начала отсчета.

Схема доказательства. 1. Максимальным инвариантом в выборочном пространстве является $U_n(x_n) = \sigma_n^{-1}x_n$, но $\mathcal{U}_n$ принадлежит многообразию $T_n(u_n) = t_0$, поэтому его размерность во внутренних точках множества значений равна $gn - m$, и из условия теоремы следует, что всякая инвариантная функция является функцией $U_{k,n}$. Теперь предположим, что $T_n(X_n)$ — достаточная статистика и $q_n(t, g)$ — главный фактор критерия факторизации, тогда $f_n(x_n|g) = (q_n(T_n(x_n), g)/q_n(T_n(x_n), \sigma_n)) f_n^*(u_{k,n}(x_n)) \Delta^n(\sigma_n)$, где $f_n^*(u_{k,n}(x_n)) = f_n(\sigma_n^{-1}x_n)$. При этом плотность распределения статистик $(T_n(X_n), U_{k,n})$ относительно произведения меры Лебега в $\mathbb{R}^m$ и меры μ_{n-k} имеет вид $p_n(t|g) f_n^*(u_{k,n}) J(t_0, u_{k,n})$, где $p_n(t|g)$ — плотность распределения T_n .

2. Не нарушая общности, можно считать, что регулярное семейство, допускающее нетривиальную достаточную статистику $T_n(X_n)$, является экспонентным

с направляющей функцией $\varphi(x)$, т.е. имеет вид $\exp\{a_0(g) + \mathbf{a}_1^\top(g)\varphi(x)\}h(x)$, где $h(x) = f(x)$ и параметрические функции $(a_0(g), \mathbf{a}_1(g))$ определяют друг друга единственным образом. Более того, плотность распределения инварианта $\mathbf{U}_{k,n}(\mathbf{X}_n)$ выписывается в явном виде

$$H_{n-k}(\mathbf{u}_{k,n}) = C \frac{\prod_{j=k+1}^n h(u_j) |V_1(\sigma_k(t_0 - T_{n-k}(\mathbf{u}_{k,n})))|}{q_k(t_0 - T_{n-k}(\mathbf{u}_{k,n}), \sigma_k(t_0 - T_{n-k}(\mathbf{u}_{k,n})))}, \quad t_0 - T_{n-k}(\mathbf{u}_{k,n}) \in \tau_k. \quad (1)$$

Так как $J(t, \mathbf{u}_{k,n})$ не зависит от выбора $f(x)$, то $f_n^*(\mathbf{u}_{k,n})$ определяется однозначно по функции $H_{n-k}(\mathbf{u}_{k,n})$, а из представления f_n в пункте 1 следует, что два семейства с одной и той же функцией H_{n-k} могут различаться лишь экспонентным множителем $\exp\{c_0 + \mathbf{c}_1^\top \varphi(x)\}$. Так что, когда T_n достаточна, $\mathcal{F}$ характеризуется распределением инварианта единственным образом с точностью до выбора начала отсчета, благодаря специфической структуре экспонентного семейства сдвигов.

3. Для любого другого регулярного семейства сдвигов с тем же распределением инварианта $\mathbf{U}_{k,n}(\mathbf{X}_n)$ плотность $f_n(\mathbf{x}_n)$ отличается от соответствующей плотности экспонентного семейства множителем $Z_n(\mathbf{x}_n)$ таким, что $Z^*(\mathbf{x}_n) = \text{const}$. Отсюда выводится, что этот множитель является функцией $T_n(\mathbf{x}_n)$ и следовательно, в силу критерия факторизации, статистика $T_n(\mathbf{X}_n)$ достаточна.

П р и м е н е н и е т е о р е м ы. Пусть $f(x)$ — порождающая плотность экспонентного семейства сдвигов с направляющей функцией $\varphi(x)$. Находим указанные выше функции $T_n(\mathbf{x}_n)$, $\sigma_n(t)$, $U_{k,n}(\mathbf{x}_n)$ для $k = m/r$, проверяем условие сохранения размерности. При положительном исходе выписываем плотность распределения нужного инварианта по формуле (1), в которой полагаем $q_k(T_k(\mathbf{x}_k), g) = f_k(g^{-1}\mathbf{x}_k) \Delta^k(g)/f_k(\mathbf{x}_k)$. Гипотеза, упомянутая вначале, теперь заменяется эквивалентной ей простой гипотезой о том, что инвариант $\mathbf{U}_{k,n}$ имеет распределение (1). Например, указанный подход непосредственно применим для нормального семейства, порожденного аддитивными сдвигами, и обобщенного семейства Уишарта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров Ю. В. Характеризация класса распределений распределением некоторой статистики. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 3, с. 479–487.
2. Csörgő M., Sechadri V. Characterizations of the Berens–Fisher and related problems (a goodness of fit point of view). — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 1, с. 21–33.
3. Сапожников П. Н. Алгебраические методы оптимального статистического оценивания. Изд-во ПГУ, Пермь. 1997, 168 с.

Сенатов В. В. (Москва, Россия) **Применение моментов Чебышева–Эрмита в асимптотических разложениях.**

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные действительные случайные величины такие, что $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}X_1^2 = 1$. Пусть P — распределение X_1 , P_n — распределение $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$, Φ — стандартный нормальный закон, $\varphi(x)$ — плотность Φ . Обозначим $\alpha_k = \alpha_k(P) = \mathbf{E}X_1^k$, $\beta_k = \beta_k(P) = \mathbf{E}|X_1|^k$ моменты P и $\alpha_k(\Phi)$, $\beta_k(\Phi)$ — соответствующие моменты нормального закона Φ . Будем считать, что у распределения P существуют все моменты, которые нам понадобятся.

Известные оценки точности аппроксимации распределения P_n асимптотическими разложениями, за редкими исключениями, формулируются в терминах $O(n^{-k})$ или $o(n^{-k})$, где k — некоторое число, зависящее от условий, наложенных на распределение P , а упомянутые исключения — это утверждения типа «существует величина $c(P)$, такая, что справедливо неравенство ...» без каких-либо оценок величины $c(P)$. Таким образом, известные результаты, связанные с асимптотическими разложениями, мало пригодны для практических расчетов, поскольку они не позволяют дать аппроксимацию функции распределения $P_n(x)$ при данных n и x с точностью до численных значений. Отметим, что известные асимптотические разложения используют либо моменты α_k либо семиинварианты κ_k и, как правило, очень громоздки.

В этой работе предлагаются асимптотические разложения, использующие величины $\theta_k = \theta_k(P) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) dP(x)$, где $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(k)}$ — многочлены Чебышева–Эрмита. Мы будем называть величины θ_k моментами Чебышева–Эрмита распределения P . В докладе приводятся достаточно простые алгоритмы получения асимптотических разложений в терминах моментов Чебышева–Эрмита и даны явные оценки точности этих разложений. Автор не ставил своей целью получение оценок при минимальных ограничениях на распределение P . Наоборот, мы не будем стеснять себя ограничениями на P . Нашей целью (которая, наверное, в этой работе и не достигнута) является получение оценок, пригодных для практических расчетов, хотя бы для некоторых классов распределений P . Получив такие оценки, мы можем ставить вопрос о том, как отказ от тех или иных ограничений влияет на точность оценок. То есть, из двух возможных путей: получить какие-то оценки при минимальных ограничениях на P , а затем уточнять их, или — получить «хорошую» аппроксимацию P_n при жестких условиях на P , а потом ослаблять эти условия, следя за ухудшением результатов, мы выбираем второй путь. Стоит отметить, что одной из целей исследований в этом направлении, по мнению автора, является поиск характеристик распределения P , которые существенно влияют на точность аппроксимации P_n и поиск условий, которые нужно наложить на эти характеристики, для получения нужной точности аппроксимации.

Известно, что асимптотическое поведение распределений P_n при росте n зависит от гладкости исходного распределения P . Здесь мы будем считать, что существует плотность $p(x)$ распределения P и наложим ограничения на убывание характеристической функции $f(t)$ распределения P . Будут наложены ограничения на величины θ_j . Эти ограничения обсуждаются в докладе. Мы предположим далее, что распределение P симметрично относительно нуля. Это ограничение очень упрощает выкладки и конечные результаты, но на существо дела не влияет: переход к общему случаю связан лишь с преодолением некоторых технических трудностей.

Основной результат работы состоит в следующем.

Предположим, что распределение P симметрично относительно нуля, а его характеристическая функция $f(t)$ в некоторой степени абсолютно интегрируема $\int_0^{\infty} |f(t)|^k dt = A < \infty$. При этом условии величина

$$\alpha = \sup_x \left\{ |f(t)| : t \geq \frac{1}{10\beta_4^{1/2}} \right\}$$

строго меньше единицы.

Пусть $m \geq 2$ — некоторое целое число, $\theta_4, \theta_6, \dots, \theta_{2m}$ — моменты Чебышева–Эрмита распределения P , а

$$\Theta_{2l} = (2l)! \sum \frac{n!}{k_0! k_4! \dots k_{2m}!} \left(\frac{\theta_4}{4! n^2} \right)^{k_4} \left(\frac{\theta_{2m}}{(2m)! n^m} \right)^{k_{2m}},$$

где суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_0, k_4, k_6, \dots, k_{2m}$, таким, что $k_0 + k_4 + \dots + k_{2m} = n$, $4k_4 + \dots + 2mk_{2m} = 2l$.

Предположим, что выполнено условие $|\theta_{2l}| \leq (2l-1)!!$, $l = 2, 3, \dots, m$. При этом условии существует максимальное положительное число s , для которого

$$e^{-(1-s^2)t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 + \dots + (-1)^m \frac{\theta_{2m}}{(2m)!} t^{2m} \right| \leq 1 \quad \text{при всех } t.$$

Пусть

$$\psi_n(x) = \sum_{l=0}^{2m} \frac{\Theta_{2l}}{(2l)!} H_{2l}(x) \varphi(x), \quad p_n(x) \text{ — плотность } P_n.$$

Теорема. При $n \geq m$ справедливо равенство

$$p_n(x) - \psi_n(x) = \frac{\theta_{2m+2}}{(2m+2)! n^m} H_{2m+2}(x) \varphi(x) + R_n(x),$$

где величина R_n допускает оценку

$$\begin{aligned} |R_n(x)| \leq & \frac{|\theta_{2m+2}| b_4 (2m+5)!!}{\sqrt{2\pi} (2m+2)! n^{m+1}} e^{b_4 T_n^4/n} + \frac{B_{2m+4} (2m+3)!!}{\sqrt{2\pi} (2m+4)! n^{m+1}} \left(1 + \frac{T_n}{\sqrt{n}}\right)^{2m+4} e^{T_n^2/2n} \\ & + \frac{(4m+3)!!}{\sqrt{2\pi} (m+1)! n^{m+1}} \left(\frac{\bar{\theta}_4}{4!}\right)^{m+1} e^{(\bar{\theta}_4/4!)(T_n^4/n)} + \frac{e^{m-1} (4m-1)!!}{\sqrt{2\pi} n^{m+1}} \frac{T_n^2}{n} \\ & + \frac{B_{2m+4} b_4 (2m+7)!!}{\sqrt{2\pi} (2m+4)! n^{m+2}} \left(1 + \frac{T_n}{\sqrt{n}}\right)^{2m+4} e^{b_4 T_n^4/n} e^{T_n^2/2n} \\ & + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-k} A + 2e^{m-1} \left(\frac{4m-1}{e}\right)^{2m-1/2} \frac{1}{n} e^{-T_n^2/4} \\ & + \frac{2|\theta_{2m+2}|}{\pi (2m+2)! n^m} \left(\frac{2(2m+1)}{e}\right)^{m+1/2} e^{-T_n^2/n} + \frac{2}{\pi s^2 T_n} e^{-s^2 T_n^2/2} + \frac{3}{\pi T_n} e^{-T_n^2/4}, \end{aligned}$$

где

$$T_n = \left(\frac{n}{b_4}\right)^{1/8}, \quad \bar{\theta}_4 = 4! \left(\frac{|\theta_4|}{4!} + \frac{|\theta_6|}{6!} \frac{T_n^2}{n} + \dots + \frac{|\theta_{2m}|}{(2m)!} \frac{T_n^{2m-4}}{n^{m-2}} \right),$$

$$b_4 = \frac{\beta_4}{4} + \frac{\bar{\theta}_4}{6}, \quad B_k = \left(\beta_k^{1/k}(P) + \beta_k^{1/k}(\Phi) \right)^k.$$

В докладе обсуждаются и другие ограничения на моменты Чебышева–Эрмита распределения P , а также поведение моментов Чебышева–Эрмита распределений P_n при росте n .

Оценка остаточного члена в формулировке теоремы очень громоздка, но обратим внимание на то, что слагаемые в правой части оценки, начиная с шестого, убывают экспоненциально быстро при росте n .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00846.

Хохлов Ю. С. (Тверь, Россия) Проинтегрированное уравнение Коши и задачи характеристики.

Во многих задачах теории вероятностей и математической статистики мы приходим к проблеме характеристики класса распределений, обладающих теми или иными специальными свойствами. Примеры таких задач можно найти в книге Кагана, Линника и Рао ([1]). Одной из наиболее известных является характеристика распределения свойством одинаковой распределенности двух линейных форм. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — н.о.р. случайные векторы в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим линейные формы $L_1 = A_1 X_1 + \dots + A_n X_n$, $L_2 = C_1 X_1 + \dots + C_n X_n$, где A_i, C_j — линейные операторы в $\mathbf{R}^d$. Задача состоит в том, чтобы при заданных $\{A_i\}$ и $\{C_j\}$ описать класс распределений $\mathcal{L}(X_1)$, для которых линейные формы L_1 и L_2 одинаково распределены. В одномерном случае задача подробно исследовалась в работах Ю. В. Линника и других авторов, хотя и здесь не получено окончательного решения. Главным результатом явилось описание необходимых и достаточных условий, при которых решением является класс нормальных распределений [1].

В многомерном случае задача оказалась гораздо сложнее. Поэтому мы ограничимся более простой ситуацией, когда $L_2 = X_1$. В одномерном случае полное решение этой задачи было найдено в [2]. Было показано, что все решения указанной задачи являются полуустойчивыми распределениями. В многомерном случае нам известны только два случая, когда было найдено решение рассматриваемой задачи. В первом случае все матрицы $\{A_i\}$ являются диагональными. Во втором случае, рассмотренном в работе В. Чорны ([3]), матрицы $\{A_i\}$ принадлежат однопараметрической группе $\{t^B, t > 0\}$ линейных операторов. Решением опять являются операторно полуустойчивые распределения. Оба примера характеризуются тем, что операторы $\{A_i\}$ коммутируют друг с другом. Ниже мы рассматриваем некоторое обобщение последней задачи В. Чорны, в котором операторы $\{A_i\}$ могут быть некоммутативными.

Пусть $K = K_1 \otimes T_1$ есть полугруппа невырожденных линейных операторов в $\mathbf{R}^d$, где K_1 — некоторая подполугруппа в группе $O(d)$ ортогональных преобразований, а $T_1 = (t^B, 0 < t < 1)$. Здесь B — линейный оператор в $\mathbf{R}^d$, все собственные значения которого имеют положительные вещественные части. Предположим, кроме того, что B коммутирует со всеми операторами из K_1 . Основным техническим приемом при решении задач такого типа является решение так называемого проинтегрированного уравнения Коши (см. [4]). До сих пор оно рассматривалось только для случая коммутативных полугрупп K со специальными свойствами. Основными результатами нашей работы являются следующие две теоремы.

Представим $x \in \mathbf{R}^d$ в виде $x = t^B q$, где $t > 0$, $q \in S^{d-1}$. Это возможно при специальном выборе нормы в $\mathbf{R}^d$. Пусть $H(u, q)$ — вещественная функция на $\mathbf{R}_+^1 \otimes S^{d-1}$, а G — вероятностная мера на K .

Теорема 1. Пусть $H(u, q)$ — ограниченное непрерывное решение уравнения

$$H(u, q) = \int_{K_1} \int_0^\infty H(u + v, Cq) G(dC, dv).$$

Тогда $H(u + v, Cq) = H(u, q)$ для всех $u \geq 0$, $q \in S^{d-1}$ и $(C, v) \in \text{supp } G$.

Теорема 2. Пусть коэффициенты $\{A_i\}$ линейной формы L_1 принадлежат K и полугруппа K_1 порождает конечную подгруппу в $O(d)$. Если L_1 и X_1 одинаково распределены, то $\mathcal{L}(X_1)$ операторно устойчиво или полуустойчиво с экспонентой B , причем оно является K_1 -инвариантным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каган А. М., Линник Ю. В., Рав С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
2. Shimizu R. Solution to a functional equation and its application to some characterization problems. — Sankhya, Ser. A, v. 40, p. 319–332.
3. Чорны В. Многомерные полуустойчивые распределения. — Канд. дисс., М.: МГУ, 1986.
4. Rao C. R., Shanbhag D. N. Choquet–Deny type functional equations with applications to stochastic models. — New York: John Wiley, 1994.

Csörgő M. (Ottawa, Canada) **Random walking around financial mathematics.**

This talk is based on the two preliminary reports [1] and [2]. On assuming that stock prices fluctuate like geometric Brownian motion, we summarize, as in [2], the derivation of the Black–Scholes fair price formula for the European option and also present the problem of dealing with the Asian option in a similar fashion. This, in turn, leads us to study, as in [1], strong asymptotic properties of two types of integral functionals of geometric stochastic processes. These integral functionals yield various Asian type option pricings via appropriate selection of the processes in their respective integrands. We show that, under fairly general conditions on the latter processes, the log of the integral functionals themselves asymptotically behave like appropriate sup functionals of the processes in the exponents of their respective integrands. In addition to presenting these theorems in their general form, we also illustrate them via geometric Brownian and geometric fractional Brownian motions.

REFERENCES

1. Csáki E., Csörgő M., Földes A., Révész P. Asymptotic properties of integral functionals of geometric stochastic processes. — Technical Report Series of the Laboratory for Research in Statistics and Probability, № 321 — March 1998, 1998.
2. Csörgő M. Random walking around financial mathematics. — Technical Report series of the laboratory for Research in Statistics and Probability, № 330 — April 1999, 1999.

Шевляков Г. Л. (Санкт-Петербург, Россия) **Робастная оценка коэффициента корреляции на классе ϵ -загрязненных нормальных распределений.**

Рассмотрим задачу робастного минимаксного (в смысле Хьюбера) оценивания коэффициента корреляции ρ для следующего класса двумерных плотностей распределений (параметры положения и масштаба полагаем известными)

$$f(x, y | \rho) = \frac{1}{\beta_u(\rho)} g\left(\frac{u}{\beta_u(\rho)}\right) \frac{1}{\beta_v(\rho)} g\left(\frac{v}{\beta_v(\rho)}\right), \quad u = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad (1)$$

где $g(\cdot)$ — симметричная одномерная плотность из некоторого класса $\mathcal{G}$. Если положить $\beta_u(\rho) = \sqrt{1+\rho}$, $\beta_v(\rho) = \sqrt{1-\rho}$ и $g(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2)$, то (1) задает плотность двумерного нормального распределения $f(x, y | \rho) = N(x, y | 0, 0, 1, 1, \rho)$. При использовании в (1) в качестве g других одномерных плотностей, например Лапласа или Коши, можно получить соответствующие двумерные аналоги этих распределений.

Основная идея введения класса (1) такова: для любых случайных величин (X, Y) преобразование $U = X + Y$, $V = X - Y$ дает некоррелированные величины (U, V) , и их дисперсии определяют корреляцию между X и Y . При этом коэффициент корреляции ρ класса (1) зависит от параметров β_u и β_v следующим образом: $\rho = (\beta_u^2 - \beta_v^2)/(\beta_u^2 + \beta_v^2)$.

Предлагается следующая процедура оценивания коэффициента корреляции ρ по выборке $(x_i, y_i)_{i=1}^n$:

— вычисляются M -оценки масштаба $\hat{\beta}_u$ и $\hat{\beta}_v$ как решения уравнений

$$\sum \chi\left(\frac{u_i}{\hat{\beta}_u}\right) = 0, \quad \sum \chi\left(\frac{u_i}{\hat{\beta}_v}\right) = 0, \quad (2)$$

где $\chi(\cdot)$ — оценочная функция, а переменные u и v имеют вид $u_i = x_i/\sqrt{2} + y_i/\sqrt{2}$, $v_i = x_i/\sqrt{2} - y_i/\sqrt{2}$, $i = 1, \dots, n$;

— вычисляется оценка коэффициента корреляции ρ в виде $\hat{\rho} = (\hat{\beta}_u^2 - \hat{\beta}_v^2)/(\hat{\beta}_u^2 + \hat{\beta}_v^2)$. Следовательно, для класса (1) задача робастного оценивания коэффициента корреляции сводится к задаче робастного оценивания параметров масштаба главных переменных u и v .

Теорема 1. При достаточно общих условиях регулярности классов плотностей $\mathcal{G}$ и оценочных функций χ ([1]), обеспечивающих состоятельность и асимптотическую нормальность M -оценок масштаба (2), оценка $\hat{\rho}$ состоятельна и асимптотически нормальна с дисперсией

$$\text{var}(\hat{\rho}) = \frac{2(1-\rho^2)^2}{n} V(\mathbf{g}, \chi), \quad V(\mathbf{g}, \chi) = \frac{\int \chi^2(z) \mathbf{g}(z) dz}{(\int z \chi'(z) \mathbf{g}(z) dz)^2}. \quad (3)$$

Второе выражение в (3) есть не что иное, как асимптотическая дисперсия M -оценок масштаба [1], откуда мы имеем широкий спектр робастных минимаксных по дисперсии оценок коэффициента корреляции, порожденный известными робастными минимаксными оценками параметра масштаба для различных классов плотностей распределений $\mathcal{G}$.

Теорема 2. На классе ϵ -загрязненных нормальных плотностей $f(x, y) \geq (1 - \epsilon) N(x, y | 0, 0, 1, 1, \rho)$, $0 \leq \epsilon < 1$, робастная минимаксная оценка ρ имеет вид:

$$\hat{\rho} = \left(\sum_{r_1+1}^{n-r_2} u_{(i)}^2 - \sum_{r_1+1}^{n-r_2} v_{(i)}^2 \right) \left(\sum_{r_1+1}^{n-r_2} u_{(i)}^2 + \sum_{r_1+1}^{n-r_2} v_{(i)}^2 \right)^{-1}, \quad (4)$$

где r_1 и r_2 соответственно число отброшенных наименьших и наибольших порядковых статистик $u_{(i)}$ и $v_{(i)}$, зависящее от параметра загрязнения ϵ : $r_1 = r_1(\epsilon)$, $r_2 = r_2(\epsilon)$.

Рассмотрим два частных случая оценки (4): при $\epsilon = 0$ эта оценка совпадает с выборочным коэффициентом корреляции r , а в предельном случае, когда $\epsilon \rightarrow 1$, она

сходится к медианному коэффициенту корреляции ([2]) в виде

$$\hat{\rho}_{\text{med}} = \left(\text{med}^2 |u| - \text{med}^2 |v| \right) \left(\text{med}^2 |u| + \text{med}^2 |v| \right)^{-1}. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е. При практическом применении формул (4) и (5) рекомендуется использовать робастные оценки положения и масштаба, например, когда

$$u_i = \frac{x_i - \text{med } x}{\sqrt{2} \text{MAD } x} + \frac{y_i - \text{med } y}{\sqrt{2} \text{MAD } y}, \quad v_i = \frac{x_i - \text{med } x}{\sqrt{2} \text{MAD } x} - \frac{y_i - \text{med } y}{\sqrt{2} \text{MAD } y}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\text{MAD } z = \text{med } |z - \text{med } z|$ — медиана абсолютных отклонений от медианы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хьюбер П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984, 304 с.
2. Shevlyakov G. L. On robust estimation of a correlation coefficient. — J. Math. Sciences, 1997, v. 83, № 3, p. 90–94.

Янушкявичюс Р. (Вильнюс, Литва) Оценки устойчивости в характеристической теореме Лага–Лукача.

Еще в 1923 г. Г. Пойа [1] писал: «Гауссовский закон погрешностей обладает тем свойством, что он при линейной комбинации погрешностей сохраняется. Гауссовский закон погрешностей может быть до некоторой степени охарактеризован через это свойство — он является единственным законом, допускающим постоянство относительно линейных комбинаций погрешностей.»

Характеризационной теоремой Г. Пойа принято называть следующий результат. Если X_1 и $aX_1 + bX_2$ равномерно распределены, причем X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины с нулевым средним и конечным вторым моментом, то X_j имеет нормальное распределение.

Теорему типа характеристики Пойа для бесконечной последовательности $X_1, X_2, \dots$ независимых равномерно распределенных случайных величин, причем без требования существования момента второго порядка, впервые рассмотрели в 1965 г. Р. Лага и Е. Лукач ([2]). Б. Арнольд и Д. Исааксон ([3]) предложили более простое доказательство для бесконечной последовательности, но при дополнительном условии существования момента второго порядка. Новое доказательство теоремы характеристики Пойа для бесконечной последовательности $X_1, X_2, \dots$ без моментных ограничений рассмотрели А. В. Какосян, Л. Б. Клебанов, И. А. Меламед ([4]).

Еще больше работ посвящено устойчивости характеристик теорем типа Пойа. Первой в этой области является работа Л. Д. Мешалкина ([5]). В ней показано, что если X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины, $\mathbf{E}X_j = 0$, $\mathbf{E}X_j^2 = 1$, $\mathbf{E}|X_j|^3 \leq M < \infty$, а статистики X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ почти равномерно распределены в равномерной метрике ρ (напомним, $\rho(X, Y) = \sup \{|\mathbf{P}\{X < x\} - \mathbf{P}\{Y < x\}| : x \in \mathbf{R}^1\}$), а именно, $\rho(X_1, (X_1 + X_2)/\sqrt{2}) \leq \epsilon$, то X_j является почти нормальной случайной величиной. А именно, $\rho(X_j, \mathcal{N}_{0,1}) \leq C\epsilon^{1/3}$, где C зависит лишь от M , а $\mathcal{N}_{0,1}$ — стандартная нормальная случайная величина.

Обобщения этой теоремы рассматривались в двух направлениях. В работах первого направления анализировалась зависимость оценок устойчивости от коэффициентов статистик и моментных характеристик рассматриваемых случайных величин.

Во втором направлении ставилась задача построения оценки устойчивости без моментных ограничений. Особенно результативно эта задача решалась в λ -метрике, которая определяется следующим образом: $\lambda(X, Y) = \min \{ \max \{ \frac{1}{2} \max \{ |f_X(t) - f_Y(t)| : |t| \leq T \}, 1/T \} : T > 0 \}$, где f_X, f_Y — характеристические функции произвольных случайных величин X и Y соответственно.

λ -метрика эквивалентна метрике Леви L и удобна для раскрытия сущности проблемы устойчивости характеристических теорем, поскольку последние довольно часто доказываются путем анализа уравнений, рассматриваемых в пространстве характеристических функций. Однако вернемся к построению оценки устойчивости без моментных ограничений.

Это удалось сделать А. А. Зингеру, Л. Б. Клебанову и Р. В. Янушкявичюсу ([6]). В этой работе доказано, что если X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины и при этом $\lambda(X_1, (X_1 + X_2)/\sqrt{2}) \leq \epsilon$, то существует такая нормальная (возможно, вырожденная) случайная величина N , что $\lambda(X_j, N) \leq C\epsilon^{1/5}$, где C — абсолютная константа.

Следующая теорема представляет собой основной результат настоящей работы. В ней рассматривается случай бесконечной выборки.

Теорема 1. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых равномерно распределенных случайных величин, ряд $L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i$ сходится с вероятностью 1, причем $\forall i |a_i| < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = 1$. Пусть, кроме того, $F_X(x) = P\{X < x\}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d(F_X(x) - F_L(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d(F_X(x) - F_L(x)) = 0, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 d(F_X(x) - F_L(x)) < \omega. \quad (2)$$

Если X и L почти одинаково распределены в метрике λ , т.е. $\lambda(X, L) \leq \epsilon$, то в этой метрике X является почти нормальной случайной величиной, т.е. существует нормальная случайная величина N такая, что $\lambda(X, N) \leq C\epsilon^\alpha$, где α — произвольное число из интервала $(0, \frac{1}{9})$, $C = C(\omega, a)$, $a = \sup\{|a_i|: i = 1, 2, \dots\}$.

В следующей теореме, доказанной совместно с Л. Л. Браницкой, улучшается коэффициент оценки устойчивости Р. Шимицу [7]. При этом используется тот же метод, что и в [7], а также результаты В. М. Золотарева [8].

Теорема 2. Пусть $X, X_1, X_2, \dots, X_k$ — независимые равномерно распределенные случайные величины, $a_1, \dots, a_k$ — неравные нулю действительные числа такие, что $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = 1$, причем $L = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k$. Если выполнены условия (1) и (2), то существуют конечные $EX = \mu$, $E(X - \mu)^2 = \sigma^2$ и при этом $\rho(X, N) \leq C(\beta)(1 - b)^{1/4} \sigma^{3/4} \omega^{1/4}$, где N — нормальная случайная величина с параметрами μ и σ^2 , β — любое число, удовлетворяющее неравенству $\beta > 1/2\pi$, $C(\beta) = 2\beta\theta^{3/2}(\beta)/(\sqrt{3}(2\pi)^{3/8})$, где $\theta(\beta)$ — постоянная, определяемая из уравнения

$$\int_0^{\theta(\beta)/4} \frac{\sin^2 u}{u^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8\beta}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polya G. Herleitung des Gausschen fehlergesetzes aus einer funktionalgleichung. — Math. Zeitschrift, 1923, v. 18, p. 96–108.
2. Laha R. G., Lukacs E. On a linear form whose distribution is identical with that of a monomial. — Pacific J. Math., 1965, v. 15, № 1, p. 207–214.
3. Arnold B. C., Isaacson D. L. On normal characterizations by the distribution of linear forms, assuming finite variance. — Stochastic Process. Appl., 1978, v. 7, p. 227–230.
4. Kakosyan A. V., Klebanov L. B., Melamed J. A. Characterization of distributions by the method of intensively monotone operators. — Lecture Notes in Math., 1984, v. 1088, p. 1–175.
5. Meshalkin L. D. On the robustness of some characterizations of the normal law. — Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, p. 1747–1750.
6. Зингер А. А., Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости в теореме Д. Поля. — Литов. матем. сб., 1987, в. 37, № 3, с. 481–488.
7. Shimizu R. On the stability of characterizations of the normal distribution. — Statistics and Probability. Essays in honor of C. R. Rao, 1982, p. 661–670.
8. Zolotarev V. M. Ideal metrics in the problems of probability theory and mathematical statistics. — Austral. J. Statist., 1979, v. 21, № 3, p. 193–208.