Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Тутубалин, Рецензия на книгу: Mandelbrot B. B., Ageal M. "Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk", *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, том 46, выпуск 1, 198–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:01:00

пользовать пакеты компьютерных программ SAS (Statistical Analysis System), SPSS (Statistical Package for the Social Service, другая расшифровка — Statistical Product and Service Solutions) и BMDP (Biomedical Programs). Приведены примеры использования этих программ. Никаким руководством по дисперсионному анализу нельзя пользоваться как «кулинарной книгой», где изложены лишь одни «рецепты» процедур. Поэтому авторы уделяют много внимания проверкам условий пригодности рассматриваемых моделей в прикладных исследованиях. В частности, в п. 2.21 предлагаются критерии, выявляющие отклонение распределения случайных ошибок e_{ijk} от нормальности и нарушение условия $De_{ijk} = \sigma_e^2 = \text{const.}$ В п. 2.22 дается набор преобразований (логарифмическое, степенное, преобразование $\arcsin$), которые в ряде случаев устраняют эти отклонения. Мне приходилось сталкиваться с проблемой несоответствия модели и статистического материала. Однажды ко мне обратился за консультацией знакомый антрополог, который обмерял параметры тела школьников (вес, рост, объем груди) и обрабатывал их стандартным методом регрессионного анализа. Полученные результаты очень его удивили, так как оказалось, что слишком большая доля детей имеет излишний вес. При этом по всем медико-биологическим показателям эти дети были нормальны. Я предложил ему сначала прологарифмировать статистические данные, а потом произвести расчеты. Тогда все стало на свои места, процент детей с повышенным весом стал соответствовать статистической норме. Казалось бы, почему антропологи, имевшие большой статистический материал, не замечали раньше этого факта? Ответ прост: чаще всего соответствующий статистический материал относился ко взрослому населению, где этот эффект мал, так как параметры взрослого человека больше, чем у ребенка. Много лет назад мой знакомый антрополог докладывал этот результат на Антропологическом обществе в МГУ. Маститые профессора встретили его доклад в штыки. Главный их аргумент был: «В антропологии логарифмировать, а тем более потенцировать — недопустимо!» Только молодежь приняла это новшество с пониманием.

В главах 6–8 подробно рассматриваются иерархические, или гнездовые методы многофакторного дисперсионного анализа, в которых каждому значению одного фактора соответствует свой набор значений других факторов. В главе 9 описываются так называемые конечные модели, в которых значения факторов представляют собой конечные выборки из нормальных распределений. В главе 10 рассматриваются различные планы экспериментов, в том числе планы, основанные на латинских и греко-латинских квадратах. В главе 11 даются некоторые указания по использованию пакетов компьютерных программ. Каждая глава, кроме первой и последней, снабжена упражнениями. В приложениях дано много статистических таблиц и графиков. Имеется большой список литературы.

Я считаю, что эта монография, написанная на современном уровне, полезна исследователям, занимающимся различными приложениями дисперсионного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scheffé H.* The Analysis of Variance. New York: Wiley, 1959.

Б. А. Севастьянов

M a n d e l b r o t B. B. Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1997, x+551 p.

Перед нами недавно вышедшая книга знаменитого Бенуа Мандельброта, который создал фракталы и наполнил ими мир, в котором мы живем. «Создал», конечно, в следующем специфическом смысле.

В философии науки давно замечено, что исследователь, что называется, в упор не видит таких особенностей фактических данных, которые не присутствуют в каком-то виде в его теоретических представлениях. Чтобы сразу стало понятно,

о чем идет речь, приведем исторический пример. Историки науки разыскивали документы, из которых вытекает, что люди, которые по очереди с Галилеем смотрели в один и тот же телескоп, не видели ни спутников Юпитера, ни колец Сатурна, и утром Галилей ушел огорченный, не попрощавшись с хозяином виллы, на которой производились опыты. Но и сам Галилей твердо считал, что небесные светила не вмешиваются в земные дела, а потому не желал замечать очевидной связи между фазами Луны и высотой морских приливов. Он подавал приливы как доказательство движения Земли, и в этом пункте своего спора с Церковью был научно неправ. И вот, до Мандельброта наука не замечала фракталов в окружающем нас мире, а теперь это понятие вошло в систему основных теоретических представлений, и каждому ясно, что фракталов вокруг много.

В данной книге речь идет о фракталах в экономических, демографических и финансовых данных. Чтобы сосредоточить рецензию вокруг чего-то определенного, я буду говорить только о динамике во времени рыночных цен (на товары или ценные бумаги), хотя в книге немало других интересных данных. (Таковы, например, данные о распределении доходов населения или о распределении городов по количеству жителей.) Сначала несколько слов о трудности проблемы.

Данные о динамике цен на что-либо обычно представляют собой единственную функцию времени, а не статистический ансамбль многих реализаций. Чтобы выделить из этой реализации какие-то явления, которые можно изучать вероятностными методами, наука со времен Башелье переходит к приращениям цен за определенные интервалы времени. (С середины XX века общепринятым стало предварительное логарифмирование цен.) Таким образом, общепризнанной является концепция случайного процесса со стационарными приращениями, в принципе, совершенно такая же, как и (например) в колмогоровской теории турбулентности. Впрочем, в теории турбулентности четко отмечается, что речь идет об изучении мелкомасштабных флуктуаций тех или иных свойств сплошной среды (скорости, давления, показателя преломления и т.д.), а, скажем, к прогнозу погоды на завтра данная теория отношения не имеет. Оценены и те пространственно-временные масштабы, в которых приложима локальная теория. Подобных оценок мне не приходилось видеть в учебниках финансовой математики. Но не вызывает сомнений, что в крупных масштабах, когда в игру вступают долговременные экономические тренды или циклы, модель стационарных приращений неэффективна (просто потому, что, переходя к разностям, мы практически обращаем в нуль медленные колебания). Однако в сравнительно малых временных масштабах, несомненно, доминируют именно случайные колебания. Здесь вероятностный подход является полезным.

Но в теории турбулентности статистические свойства приращений определяются сравнительно ясными параметрами, одним из которых является количество диссипирующей энергии. Для экономических явлений таких параметров нет. Давно замечено, что при попытках работать с теми или иными конкретными моделями стационарных приращений исследователи экономики и финансов сталкиваются, к сожалению, с большими трудностями. Оценки тех или иных параметров моделей по фактическим данным оказываются неустойчивыми (в том смысле, что слишком сильно различаются при использовании различных отрезков ряда наблюдений). Понятно, что при неустойчивости оценок параметров и расчеты практически важных величин делаются ненадежными (в последнее время в моду вошли, например, расчеты Value at Risk, т.е. расчеты распределения вероятностей возможных потерь). Конечно, неустойчивость оценок имеет глубокие и неустраняемые причины, потому что коренится в изменении тех экономических условий, которые определяют работу рынков, вырабатывающих те или иные цены. Но поскольку при отсутствии статистической однородности вероятностный анализ чего-либо становится вообще невозможным, нужно приложить все усилия, чтобы извлечь максимально возможную точность описания экономических явлений из модели стационарных во времени приращений.

Насколько я знаю, Б. Мандельброт был первым, кто еще в 60-х годах сказал, что в рамках этой модели наблюдаемая неустойчивость оценок параметров и другие особенности поведения реальных цен могут объясняться совместным действием двух причин: 1) тяжелые хвосты распределений вероятностей для приращений, 2) существенная статистическая зависимость между далеко отстоящими во времени приращениями. Первый из этих эффектов Мандельброт называет «эффектом Ноя» с намеком на разовое резкое изменение вроде всемирного потопа, а второй — «эффектом Иосифа» с намеком на долгие периоды типа «семь лет жирных, а потом семь лет тощих». Можно сказать, что в течение ряда десятилетий научные интересы автора сосредоточивались на изучении этих двух эффектов в различных областях науки (т.е. не только и не столько в экономике).

Надо сказать, что рецензируемая книга устроена очень интересно и своеобразно. Частично в ней перепечатаны работы автора 60-х годов, в том числе работы, посвященные анализу конкретных статистических данных. Другая часть материала книги написана заново в 1996 году и представляет собой изложение гораздо более широких теоретических взглядов, которые сложились у автора к настоящему времени в результате долголетних занятий общей фрактальной геометрией и ее приложениями в различных областях. Переосмысливание одним и тем же автором результатов, полученных 30 лет назад, на новой, гораздо более широкой теоретической основе — это уникальное явление в науке. Обычно переосмысливание через 30 лет делается уже учеными следующего поколения, поскольку жизнь в науке коротка (считается в среднем 25–30 лет). Уже поэтому книга представляет исключительный интерес. Но она представляет также исключительную трудность для рецензирования, поскольку два хронологических периода в ней (в основном, хотя и не полностью) переставлены: сначала излагаются современные взгляды автора, а во второй части книги даются старые работы со свежими комментариями.

После некоторых колебаний я решил все же написать рецензию в обратном (т.е. в хронологическом) порядке, начиная с работ 60-х годов. Нет смысла кратко излагать их содержание, и я предпочитаю подробно рассказать об одной наиболее драматической линии. Начиная с ранних работ, Мандельброт всегда помнит об обоих эффектах (Ноя и Иосифа), но сколько-нибудь конкретно в ранних работах рассматривает только первый (т.е. тяжелые хвосты), сохраняя с неохотой независимость приращений. И вот, изучается один чрезвычайно длинный ряд цен — это цены на хлопок в Соединенных Штатах примерно с середины XIX по середину XX века. Частично это ежедневные цены, а частично — среднемесячные. Хвосты распределений вероятностей для приращений логарифма цены (ежедневных и месячных) рисуются в двойном логарифмическом масштабе (рис. E14-5 с. 391 книги). Этот рисунок хотелось бы называть классическим и поэтому я позволил себе ниже привести его. Сомнений нет — получаются почти прямые линии в области вероятностей хвостов $P \leq 0,20$ (это очень широкая область!). Все линии (в логарифмических координатах) почти параллельны с коэффициентом наклона $\approx 1,7$, что означает, что хвосты степенные с показателем $\alpha \approx 1,7$. Ясно, что нормальное распределение для описания хвостов не подходит, и предлагается устойчивое распределение с показателем $\alpha = 1,7$. Правда, сравнение полной эмпирической функции с устойчивым законом не предъявляется (за что автора упрекает один из рецензентов — Р.Н. Cootner, см. с. 459). Но насколько я понимаю, здесь Мандельброт совершенно правильно занимает более широкую позицию, которая не требует полного описания эмпирической функции распределения во всей области значений вероятности $0 < P < 1$. Рискну изложить эту позицию своими словами.

По моему, здесь основной идеей Мандельброта является следующая изящная идея скейлинга (по-русски, пожалуй, следует сказать «шкалирования»). Весьма важно, чтобы в любой вероятностной модели динамики цен распределения приращений логарифмов за различные промежутки времени могли бы пересчитываться

друг в друга (например, распределение однодневных приращений пересчитывалось бы в распределение приращений за n дней). С неохотой соглашаясь с независимостью приращений, получаем композицию n законов распределения, вычислить которую не можем, зная только хвосты распределения. Поэтому дополним формально распределение в средней части (симметричным) устойчивым законом с $\alpha = 1,7$.

Рис. E14-5. Наложение графиков (в двойном логарифмическом масштабе) для положительных и отрицательных хвостов относительных приращений цен на хлопок (в трех различных случаях) и для функции распределения устойчивого закона.

Получим хорошо известный для устойчивых законов шкалирующий множитель $n^{1/\alpha}$. Иногда (см., в частности, ниже) возникает вопрос и о шкалирующем множителе для смеси распределений. От устойчивых законов в этом случае мало проку (поскольку смесь устойчивых законов не является устойчивым законом), поэтому мы о них забудем, но зато прошкалируем смесь хвостов (степенной закон с одним и тем же показателем) тривиальным образом с помощью формулы полной вероятности. Подобные рассуждения совершенно типичны для всей математической физики, ну а для финансовых данных нельзя ожидать лучшей точности, чем вообще бывает в математической физике. Я бы закончил это рассуждение 1) тем, что оно должно применяться только к хвостам, 2) тем, что полученные законы шкалирования имеют смысл и при $\alpha > 2$, хотя устойчивых законов с такими α и не бывает, 3) тем, что решить вопрос о том, пригодны или нет такие приближенные законы шкалирования, можно лишь проверкой на фактических данных.

И вот, предъясняется такая проверка. Хвосты однодневных и ежемесячных приращений на рис. E14-5 ложатся на параллельные прямые (это хорошо). Но измерение по чертежу относительного сдвига этих прямых дает (после потенцирования) шкалирующий множитель около 4,5, что гораздо меньше, чем теоретически ожидаемое значение $30^{1/\alpha} = 7,4$. Кроме того, хвосты однодневных приращений, вычисленные по двум группам данных — на начало и на середину XX века, сдвинуты друг относительно друга со шкалирующим множителем около 2,7, что много. Конечно, существует расхожее мнение, что волатильность цен в начале века была существенно больше, чем в середине века, но такое объяснение бросает тень на концепцию стационарности приращений (во времени). Однако драматизм ситуации заключается в том, что через несколько лет после первой публикации этих данных выяснилось одно неожиданное обстоятельство, которое поставило все на свои места.

Дело в том, что таблицы ежедневных цен на хлопок в начале века давали на каждую дату, в том числе и на воскресные дни, некие числа. Б. Мандельброт сделал из этого вывод, что в начале века брокеры были столь прилежны, что торговали хлопком и по воскресеньям. Но на самом деле воскресные цифры давали средние цены за шесть рабочих дней недели, а примечание к таблицам, которое это разъясняло, было неизвестно почему отрезано в том экземпляре таблиц, которым пользовался Мандельброт. Узнав в конце концов обо всем этом, он ужаснулся (и, по-моему, — напрасно, ведь со всяким может случиться) и переделал работу заново, что в докомпьютерную эпоху потребовало «нескольких бессонных ночей» — см. с. 415. Но успех оказался впечатляющим. Распределения хвостов однодневных приращений на начало и на середину века практически совпали, а сдвиг ежемесячных приращений по отношению к однодневным оказался гораздо лучше объяснимым.

(Замечание рецензента. Я попытался выяснить теоретически, может ли указанное засорение данных привести к сдвигу распределений с масштабным множителем 2,7: ведь засорений не так уж много, всего две разности из семи, отвечающих дням недели. Теоретическое вычисление на основе вышеуказанных законов шкалирования композиции и смеси возможно, если при переходе от логарифмов цен к самим ценам ограничиться линейным приближением. Должен сказать, что в таком линейном приближении совпадения не получилось: шкалирующий множитель оказался гораздо меньшим.)

Какое практическое значение имеет отсутствие второго момента у устойчивых распределений? Этим Б. Мандельброт предложил объяснить большой разброс эмпирических оценок параметров. На с. 423 (рис. E15-1) приводится график 30 оценок второго момента (для однодневных приращений логарифма) по последовательным отрезкам ряда наблюдений длиной каждый 50 дней. Оценки (предположительно, одного и того же значения параметра) меняются от $2 \cdot 10^{-5}$ до $2,5 \cdot 10^{-3}$, т.е. более чем в 100 раз. В то же время эмпирическая функция распределения этих 30 чисел на рис. E15-2 имеет степенной хвост с показателем, близким к $\alpha/2 = 1,7/2$, что совпадает с теоретическим ожиданием в предположении устойчивого закона.

(Замечание рецензента. Насколько я понимаю, логика последнего теоретического заключения состоит в следующем. Понятно, что у квадрата устойчивой случайной величины хвост будет степенным с показателем $\alpha/2$, но речь идет о распределении среднего из 50 таких квадратов. Видимо, распределение такого среднего точно не вычислялось, а применялось правило шкалирования, согласно которому показатель степенного хвоста для суммы независимых случайных величин тот же, что и у слагаемых. Во всяком случае, теоретическое значение для константы сдвига прямой на рис. E15-2 не приводится. Кроме того, не приводится исправленный на засорение данных вариант рис. E15-1. Если же считать, что приводимый вариант должен соответствовать также не исправленным на засорение кривым 1а и 2а рис. E14-5, то возникают некоторые затруднения. Например, заменим мысленно распределение с тяжелыми хвостами 1а и 2а нормальным распределением с теми же самыми 16% и 84% квантилями. Получится нормальный закон с $\sigma \approx 0,01$. Но при оценке $\sigma^2 = 10^{-4}$ по 50 наблюдениям, взятым из такого нормального закона, невозможно даже в одном случае из 30 получить в 50 раз меньшее значение оценки, равное $2 \cdot 10^{-5}$. Как же распределение с более тяжелыми хвостами (чем нормальное) могло дать столь малое значение выборочного второго момента?)

Эти два замечания рецензента включены для того, чтобы показать, что несмотря на большие успехи, достигнутые в ранних работах Мандельброта в объяснении ряда особенностей динамики цен, некоторые проблемы, видимо, еще остались. Теперь самое время рассказать о первой части книги, которая излагает современные взгляды автора на эти (и многие другие) вещи.

Прежде всего, создается впечатление, что автор видит какие-то возможности для описания с помощью фрактальной геометрии не только локального поведения

цен, но и их динамики в целом. Так, рис. Е1-1 и Е1-2 сопоставляют (с положительным общим впечатлением) реальную динамику цен акций IBM за целые 38 лет (1959–1996) с поведением фрактала, не содержащего никакой случайности и построенного по очень простым правилам в одной из следующих глав книги (см. с. 177–197). Эти правила состоят примерно в том, что сначала единичный квадрат разбивается на некоторое (небольшое) число частей прямолинейной сеткой (параллельной сторонам). Затем диагональ квадрата заменяется ломаной линией, состоящей из некоторых диагоналей и вертикальных сторон прямоугольников разбиения. Далее та же операция продлевается с каждым из прямоугольников разбиения и его диагональю и т.д. В результате получается фрактальный график некоторой функции, причем его свойства зависят от соотношения длин сторон первоначальных прямоугольников разбиения. Можно получить график, похожий на траекторию броуновского движения (рис. Е6-6), а можно и сходный с реальной динамикой цен акций. А еще можно получить график монотонной функции и использовать его как замену времени в случайном процессе. Такая теоретическая альтернатива, которая, в отличие от вероятностного подхода, не требует представления о статистическом ансамбле, выглядит обнадеживающе, хотя никаких количественных сопоставлений с реальной динамикой цен и не делается. По этому поводу мне хотелось бы вспомнить, что в свое время Е. Е. Слуцкий также публиковал чертеж, на котором график скользящего среднего из независимых случайных величин визуальнo сопоставлялся с графиком индекса английской конъюнктуры, и также без количественных выводов.

Но основной подход Мандельброта к моделированию динамики цен все-таки остается в рамках теории вероятностей. Существенная роль отводится дробному броуновскому движению $B_H(t)$ (оно не называется фрактальным — fractal, а именно дробным — fractional). (Напомним, что $B_H(t)$ — это гауссовский процесс со стационарными приращениями и структурной функцией $E[B_H(t+T) - B_H(t)]^2 = T^{2H}$, $0 < H < 1$.) Этот процесс позволяет моделировать далекую зависимость между приращениями. Например, коэффициент корреляции между приращениями $[B_H(0) - B_H(-T)]$ и $[B_H(T) - B_H(0)]$ равен $2^{2H-1} - 1$ при любом T (он обращается в нуль только в случае броуновского движения, т.е. при $H = \frac{1}{2}$). Однако в качестве кандидата на модель динамики цен предлагается не само дробное броуновское движение, а процесс $M(t) = B_H(\theta(t))$, где случайная возрастающая функция $\theta(t)$ задает замену времени.

Случайная замена времени ассоциируется с «операционным временем», т.е. с чем-то вроде количества сделок, совершенных к моменту t физического времени. Все разнообразие модели связано с разнообразием выбора случайной замены времени. Например, броуновское движение, в котором время заменено с помощью возрастающего процесса Леви, дает процесс с устойчивыми приращениями. Но кажется, что это еще слишком просто, и основной акцент делается на мультифрактальных процессах $\theta(t)$. Разбираться с приложениями таких моделей к реальным данным предлагается с помощью показателей $\tau_D(q)$, определяемых равенством

$$E(\Delta M)^q = \Delta t^{\tau_D(q)+1}.$$

В качестве прикладного применения приводится рис. Е6-3, который изображает результаты обработки данных о курсе доллара к немецкой марке с тем выводом, что этот процесс близок к винеровскому с мультифрактальной заменой времени. Впрочем, автор признает, что работа с фактическими данными с помощью подобных моделей пока делает лишь первые шаги.

Кроме конкретных научных идей, которые можно извлечь из книги Мандельброта, она радует читателя массой общих картин положения дел в тех или иных областях науки, которые нарисованы с большой художественностью. Например, в разных областях науки, использующих вероятностный подход, состояния случайности бывают 1) «мягкое» (mild), которое описывается гауссовским распределением,

2) «медленное» (slow), для которого характерно логнормальное распределение, и, наконец, 3) «дикое» (wild), связанное с устойчивыми распределениями Леви. При этом мягкое состояние случайности соотносится с простотой физической ситуации идеального газа, дикое — с относительно сложной, но все же понятной теорией твердого тела, а медленное — с до настоящего времени мало понятным поведением жидкостей. Хуже всего медленное состояние. К тому же логнормальное распределение, которое издавна считается другом статистика, никаким таким другом не является, а на самом деле является волком в овечьей шкуре (потому что заматывает под ковер трудности, связанные с тяжелыми хвостами распределений). Куда честнее устойчивые распределения, которые являются волком в его собственной шкуре и не пытаются скрыть то дикое состояние случайности, которое существует на самом деле.

Ну и в заключение скажу, что книга не дает окончательных ответов или практических рецептов для моделирования финансовых данных, но является таким классическим сочинением, из которого можно почерпнуть вдохновение или идеи для самостоятельной разработки, или просто получить удовольствие от оригинальной и изящной философии автора.

В. Н. Тутубалин