Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Борисов, Анализ состояний скрытых марковских моделей, порожденных специальными скачкообразными процессами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 589–600

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:08:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2006 г.

БОРИСОВ А. В.*

АНАЛИЗ СОСТОЯНИЙ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ,
ПОРОЖДЕННЫХ СПЕЦИАЛЬНЫМИ
СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

В работе исследован класс стохастических дифференциальных систем с переключениями, генерируемыми специальными марковскими скачкообразными процессами. Приведено утверждение, что пара «диффузионный процесс — порождающий скачкообразный процесс» обладает марковским свойством. Выведена система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая эволюцию переходной вероятности исследуемой пары и являющаяся обобщением классического уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Ключевые слова и фразы: марковские скачкообразные процессы, переходная вероятность, скрытые марковские модели, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова.

1. Введение

Объектом исследования в данной работе являются распределения случайных процессов, задаваемых уравнением вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_{u-}, y_{u-}, u) du + \int_0^t b(x_{u-}, y_{u-}, u) dw_u, \quad (1)$$

где w_t — винеровский процесс, а y_t — некоторый *càdlàg* процесс, траектории которого являются кусочно-постоянными с конечным числом точек разрыва, т.е. принадлежат так называемому пространству Блекуэлла. Задача заключается в определении такого класса процессов y_t , для которого процесс x_t (или составной процесс $z_t = (x_t, y_t)^*$) является марковским, а также в получении уравнений, описывающих семейство соответствующих переходных вероятностей. Цель получения данных уравнений очевидна: совместно с мартингалным представлением данные уравнения играют ключевую роль при последующем решении задач оптимального оценивания и управления по неполным данным в исследуемых стохастических системах.

Проблема описания переходной вероятности состояния подобных систем интенсивно изучалась и ранее. В случае, когда процесс y_t является детерминированным, x_t принадлежит классу марковских диффузионных процессов с п.н. непрерывными траекториями [1], и при известных дополнительных условиях гладкости, ограниченности и невырожденности функций сноса и диффузии переходная вероятность имеет плотность, описываемую классическим уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [2], [3].

Задача многократно усложняется в случае, если y_t является случайным скачкообразным, например мультивариантным, процессом: z_t при этом не всегда обладает

* Институт проблем информатики РАН, ул. Вавилова, 44, корп. 2, 119333 Москва, Россия; e-mail: A.Borisov@ipiran.ru

марковским свойством, а его переходная вероятность не имеет плотности. Свойства распределений, порождаемых мультивариантными процессами, и их мартингалные представления подробно исследовались в [4], [5, гл. 18, 19], [6]–[8] и других работах. В то же время, свойства марковских скачкообразных процессов — подмножества мультивариантных процессов, включая уравнения для семейства переходных вероятностей, представлены в монографии [1]. С другой стороны, процессы z_t указанного вида относятся к более общему классу диффузионных процессов со скачками, для которых в упомянутой выше монографии указано *достаточное* условие марковости: мартингалы, порождающие z_t , должны обладать независимыми приращениями. В этом случае получены обратные уравнения Колмогорова, описывающие эволюцию во времени математического ожидания гладкой функции состояния z_t . Данные уравнения являются эффективным средством анализа марковских процессов, однако не позволяют решить весь круг задач, требующих знания переходной вероятности этих процессов.

В [9] рассматривался подкласс так называемых «условных марковских процессов» x_t вида (1), для которых скачкообразный переключающий процесс y_t является *наблюдаемым* неупреждающим функционалом диффузионного процесса x_t : $y_t = y(t, x_t^0)$. Предметом исследования при этом являлось условное распределение процесса x_t . Эволюция распределения сечений и переходных вероятностей в данной монографии описаны в абстрактной общей форме в терминах производных Радона–Никодима вероятностных мер случайных процессов по таким же мерам. При этом аналоги уравнения ФПК для составного процесса z_t не приводятся.

И все же предлагаемые к рассмотрению процессы обладают особенностью, существенно используемой при их исследовании. Именно, их состояние $z_t = (x_t, y_t)^*$ может быть разделено на две компоненты: непрерывную x_t и разрывную y_t , причем уравнение для разрывной компоненты может быть рассмотрено отдельно, т.е. является замкнутым. Подобные объекты в различных статьях носят названия систем переменной или случайной структуры, гибридных систем или *скрытых марковских моделей*. Обычно предполагалось, что процесс переключений y_t является марковским с конечным числом состояний. Далее в работе такие модели называются *традиционными*. Модели этого класса и связанные с ними задачи оценивания и управления активно исследовались как с общих позиций [10]–[13], так и в приложении к задачам финансовой математики [14]–[17], систем массового обслуживания и телекоммуникаций [18], [19], навигации и слежения [20]. При этом в [12] были получены необходимые и достаточные условия, налагаемые на систему наблюдения, при выполнении которых оптимальные оценки фильтрации описываются конечными системами уравнений. Так как данные условия являются чрезвычайно жесткими (именно, наблюдения должны содержать только функции от скачкообразной компоненты y_t), то решение задачи фильтрации состояний скрытых марковских моделей общего вида приводит к необходимости получения аналогов уравнений Зака для переходных вероятностей при условии имеющихся наблюдений. А решение этой задачи, в свою очередь, требует характеристики соответствующей безусловной переходной вероятности состояния z_t .

Целью данной работы является вывод аналога уравнения ФПК, описывающего эволюцию во времени переходной вероятности скрытой марковской модели. При этом предлагаемый класс марковских процессов переключения y_t является более широким, чем класс процессов с конечным числом состояний. Переходная вероятность в этом случае также не имеет плотности, однако ее удастся представить в виде суммы сингулярной и регулярной компонент, каждая из которых описывается некоторым интегро-дифференциальным уравнением.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит формальное описание стохастической системы, описывающей скрытую марковскую модель, порожденную специальными скачкообразными процессами. В разделе 3 предложены утверждения о марковском свойстве состояния изучаемой модели и уравнениях, описывающих эволюцию во времени ее переходной вероятности. В этом же разделе приведены некоторые следствия: система уравнений более простого вида для переходной вероятности традиционной скрытой марковской модели и уравнение для плотности распределения состояния скрытой марковской модели.

2. Постановка задачи

Прежде всего определим исследуемый класс скачкообразных процессов. Пусть θ_t — марковский процесс с конечным множеством состояний $S_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ (e_k — k -й единичный вектор в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$), с начальным распределением p_0 и известной интенсивностью переходов $\Lambda(t) = \|\lambda_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$, являющейся непрерывной ограниченной матричнозначной функцией времени t . Рассмотрим $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}_k\}_{k \geq 0}$ — стохастическую последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $\mathcal{Z}_k = (\zeta_k^1, \dots, \zeta_k^n)^*$ (символ $*$ обозначает транспонирование), компоненты ζ_k^i которых независимы в совокупности и имеют распределения $\pi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$. При этом предполагается, что распределения $\pi_i(\cdot)$ имеют непересекающиеся носители — борелевские подмножества $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \dots, n$, вещественной оси $\mathbf{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. Специальным скачкообразным процессом, порожденным марковским процессом θ и стохастической последовательностью $\mathcal{Z}$, называется процесс

$$y_t = \mathcal{Z}_{N_t}^* \theta_t, \quad (2)$$

где N_t — считающий процесс, соответствующий скачкам процесса θ_t .

Процесс y_t является марковским и обладает следующими свойствами [21].

1) Переходная вероятность процесса y_t равна ($s \leq t$)

$$P(x, s, B, t) = \mathbf{P}\{y_t \in B \mid y_s = x\} = \pi^*(B) [\mathcal{P}(s, t) - \text{diag } \mathcal{T}(s, t)]^* \Theta(x) + \mathcal{T}^*(s, t) \Theta(x) \mathbf{I}_B(x), \quad (3)$$

где $\mathcal{P}(s, t)$ — матрица переходных вероятностей, соответствующая матрице интенсивностей $\Lambda(t)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(s, t) &= (\mathcal{T}_1(s, t), \dots, \mathcal{T}_n(s, t))^*, & \mathcal{T}_i(s, t) &= \exp \left\{ \int_s^t \lambda_{ii}(u) du \right\}; \\ \pi(B) &= (\pi_1(B), \dots, \pi_n(B))^*, & \Theta(y) &= (\mathbf{I}_{\mathcal{D}_1}(y), \dots, \mathbf{I}_{\mathcal{D}_n}(y))^*, \end{aligned}$$

где $\mathbf{I}_{\mathcal{D}_i}(y)$ — индикаторные функции множеств $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \dots, n$.

2) Если измеримая функция $f(y): E \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{\pi_k} |f(y)| < \infty, \quad (4)$$

то случайный процесс $f_t = f(y_t)$ допускает следующее представление:

$$f_t = f(y_0) + \int_0^t [f_{s-} \lambda^*(s) + \mathbf{E}_{\pi}^* \{f(y)\} \bar{\Lambda}^*(s)] \Theta(y_{s-}) ds + \bar{M}_t^f, \quad (5)$$

где $\bar{M}_t^f$ — маргингал ($\bar{M}_0^f = 0$), $\mathbf{E}_{\pi} f(y) = (\mathbf{E}_{\pi_1} f(y), \dots, \mathbf{E}_{\pi_n} f(y))^*$, $\lambda(t) = (\lambda_{11}(t), \dots, \lambda_{nn}(t))^*$, $\bar{\Lambda}(t) = \Lambda(t) - \text{diag } \lambda(t)$.

Необходимо отметить, что мартингал $\bar{M}_t^f$ в разложении (5) не является процессом с независимыми приращениями.

Исследуемый класс марковских скачкообразных процессов не охватывает всего их многообразия [1], [22], поэтому и называется классом *специальных* процессов. Несмотря на это данный класс полнее, чем класс марковских процессов с конечным числом состояний.

Рассмотрим $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией и определенную на нем стохастическую дифференциальную систему

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t a(x_{u-}, y_{u-}, u) du + \int_0^t b(x_{u-}, y_{u-}, u) dw_u, \\ y_t = y_0 + \int_0^t [y_{u-} \lambda^*(u) + \mathbf{E}_{\pi}^* \{y\} \bar{\Lambda}^*(u)] \Theta(y_{u-}) du + \bar{M}_t^y, \end{cases} \quad (6)$$

где $x_t \in \mathbf{R}$ — диффузионный процесс с переключениями, $y_t \in E \subseteq \mathbf{R}$ — соответствующий процесс переключений, являющийся специальным марковским скачкообразным процессом и заданный своим мартингалным разложением (см. (5)).

Относительно системы (6) сделаны следующие предположения:

1) борелевские функции $a = a(x, y, t)$, $b = b(x, y, t): \mathbf{R} \times E \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ являются липшицевыми по паре переменных (x, y) и имеют скорость роста не выше линейной: для любых $t \in [0, T]$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R} \times E$ и некоторой константы $0 < K < \infty$ выполняются следующие неравенства:

$$|a(x_1, y_1, t) - a(x_2, y_2, t)|^2 \leq K(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2),$$

$$|b(x_1, y_1, t) - b(x_2, y_2, t)|^2 \leq K(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2),$$

$$|a(x_1, y_1, t)|^2 + |b(x_1, y_1, t)|^2 \leq K(1 + |x_1|^2 + |y_1|^2);$$

2) функции $a(\cdot, \cdot, t)$ и $b(\cdot, \cdot, t)$ непрерывны слева и имеют конечные пределы справа;

3) распределения π_i , $i = 1, \dots, n$, абсолютно непрерывны по мере Лебега: $\frac{d\pi_i}{d\mu}(y) = \phi_i(y)$, $\phi(y) = (\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))^*$, причем существуют константы $0 < \gamma < \infty$ и $C < \infty$ такие, что $\|\mathbf{E}_\pi |y|^{2+\gamma}\| < \infty$ и $\phi_i(y) \leq C$ для любого $y \in E$;

4) начальные условия x_0 и y_0 являются $\mathcal{F}_0$ -измеримыми, причем y_0 имеет плотность распределения, равную $p_y(y, 0) = p_0^* \phi(y)$, где p_0 — начальное распределение процесса θ ; $\zeta_0(x)$ — плотность вероятности начального условия x_0 ;

5) начальные условия x_0 , y_0 и $\mathcal{F}_t$ -согласованные стандартный винеровский процесс w_t и мартингал M_t^y являются независимыми в совокупности.

Условия 1), 2) и 5) достаточны для того, чтобы система (6) имела единственное сильное решение [23]. Условия 3) и 4) являются достаточными для того, чтобы процесс y_t для любого $t \in [0, T]$ имел одномерную плотность распределения $p_y(y, t) = p(t)^* \phi(y)$, где $p(t)$ — распределение марковского процесса θ_t , определяемое дифференциальным уравнением Колмогорова: $p(t) = p_0 + \int_0^t \Lambda^*(u) p(u) du$.

Необходимо найти уравнения, описывающие эволюцию во времени распределения состояния (6).

3. Уравнения для описания переходной вероятности

Утверждение 1. Пусть для системы (6) выполняются условия 1)–5). Тогда векторный процесс $z_t = (x_t, y_t)^*$, $t \in [0, T]$, является марковским.

Марковость процесса z_t столь же очевидна, сколь и громоздка при доказательстве. Дело в том, что нельзя непосредственно использовать подход, предложенный в [1] и основанный на том, что мартингал в правой части (6) обладает независимыми приращениями. Идея доказательства заключается в том, чтобы, приблизив процесс переключений y_t последовательностью марковских процессов с конечным множеством возможных состояний и возможных моментов скачков и доказав наличие марковского свойства у соответствующей пары «диффузионный процесс — переключающий процесс», выполнить предельный переход к исходному векторному процессу z_t .

Марковское свойство z_t является важным в свете того, что ниже предлагается уравнение, описывающее эволюцию распределения переходной вероятности данного процесса, а значит, и эволюцию любого его конечномерного распределения.

Существенным свойством системы (6) является то, что второе уравнение в ней не зависит от первого и может быть решено отдельно. Без ограничения общности будем предполагать, что базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ имеет следующую «раздельную» структуру:

(i) $\Omega = \Omega^1 \otimes \Omega^2$, где $\omega^1 \in \Omega^1$, $x_0 = x_0(\omega^1)$, $w = w_t(\omega^1)$; $\omega^2 \in \Omega^2$, $y = y_t(\omega^2)$;

(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2$, где $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^{x_0} \vee \mathcal{F}_{[0, T]}^w$, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_{[0, T]}^y$;

(iii) $\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \otimes \mathbf{P}^2$, где $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}(x_0, w)^{-1}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}^1$, порожденная совокупностью начального условия x_0 и винеровского процесса w ; $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}(y)^{-1}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}^2$, порожденная случайным процессом y ;

(iv) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^1 \otimes \mathcal{F}_t^2$, где $\mathcal{F}_t^1 = \mathcal{F}^{x_0} \vee \mathcal{F}_{[0, t]}^w$, $\mathcal{F}_t^2 = \mathcal{F}_{[0, t]}^y$.

Подобное «разделение» позволяет, с одной стороны, корректно объединить стохастические базисы диффузионного процесса и процесса переключений без дополнительных ограничений на них и, с другой стороны, оставить некоторую свободу раздельного изучения этих компонент. Действительно, благодаря условиям 1)–5), налагаемым на систему (6), и «замкнутости» ее второго уравнения процесс $x = x_t(\omega^1, \omega^2)$, определяемый ее первым уравнением при фиксированном аргументе ω^2 (т.е. при фиксированной траектории процесса переключений), может рассматриваться в пространстве с фильтрацией $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbf{P}^1, \{\mathcal{F}_t^1\})$ как обыкновенный диффузионный процесс.

Пусть $\xi = \xi_t: [0, T] \rightarrow E$ — некоторый детерминированный процесс из пространства Блекуэлла, а $x^\xi = x_t^\xi(\omega^1)$ — процесс, являющийся единственным сильным решением стохастического дифференциального уравнения

$$x_t^\xi = x_0 + \int_0^t a(x_{u-}^\xi, \xi_{u-}, u) du + \int_0^t b(x_{u-}^\xi, \xi_{u-}, u) dw_u. \quad (7)$$

Условия 1), 2), 4) и 5) гарантируют, что x_t^ξ будет марковским процессом относительно $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbf{P}^1, \{\mathcal{F}_t^1\})$.

Сделаем относительно системы (6) дополнительное предположение:

6) для любого детерминированного процесса $\xi = \xi_t: [0, T] \rightarrow E$, принадлежащего пространству Блекуэлла, соответствующий марковский процесс $x^\xi = x_t^\xi(\omega^1)$ (7) обладает переходной плотностью распределения, являющейся единственным решением соответствующего уравнения ФПК. Тогда функция переходной вероятности состояния z_t системы (6) для любых $0 \leq s < t \leq T$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{B}(E)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{u,v,s}(A, B, t) &= \mathbf{P}(x_t \in A, y_t \in B \mid x_s = u, y_s = v) \\ &= \mathbf{P}(x_t \in A, y_t \in B, N_t - N_s = 0 \mid x_s = u, y_s = v) \\ &\quad + \mathbf{P}(x_t \in A, y_t \in B, N_t - N_s > 0 \mid x_s = u, y_s = v) \\ &= \mathcal{T}^*(s, t) \Theta(v) \mathbf{I}_B(v) \int_A q_{u,v,s}(x, t) dx \\ &\quad + \mathbf{P}(x_t \in A, y_t \in B, N_t - N_s > 0 \mid x_s = u, y_s = v), \end{aligned} \quad (8)$$

где $q = q_{u,v,s}(x, t): \mathbf{R} \times (s, T] \rightarrow \mathbf{R}$ ($u \in \mathbf{R}$, $v \in E$, $s \in [0, T]$ — параметры) — решение уравнения ФПК

$$\begin{cases} (q_{u,v,s})'_t(x, t) = \mathcal{L}_v^* q_{u,v,s}(x, t), & 0 \leq s < t \leq T, \\ q_{u,v,s}(x, s) = \delta_u(x), \end{cases} \quad (9)$$

а линейный оператор $\mathcal{L}_v^*$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}_v^* f(x, t) = -(a(x, v, t) f(x, t))'_x + \frac{1}{2} (b^2(x, v, t) f(x, t))''_{xx}.$$

Переходная плотность распределения вектора z_t не существует, так как таковой плотности нет у компоненты y (см. (3)). Выделим в переходной вероятности $P_{u,v,s}(x, y, t)$ разрывную составляющую (ей соответствует первое слагаемое в правой части (8)), а для непрерывной составляющей найдем описывающее ее уравнение. Сделаем еще одно предположение:

7) существует функция $r = r_{u,v,s}(x, y, t): \mathbf{R} \times E \times [s, T] \rightarrow \mathbf{R}$ ($u \in \mathbf{R}$, $v \in E$, $s \in [0, T]$ — параметры) такая, что определены и ограничены на всей области определения (x, y, t) и множестве допустимых значений параметров (u, v, s) следующие частные производные:

$$(r_{u,v,s})'_t(x, y, t), \quad (a(x, y, t) r_{u,v,s}(x, y, t))'_x, \quad (b^2(x, y, t) r_{u,v,s}(x, y, t))''_{xx},$$

и для любых $0 \leq s < t \leq T$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{B}(E)$ имеет место равенство

$$P_{u,v,s}(A, B, t) = \mathcal{T}^*(s, t) \Theta(v) \mathbf{I}_B(v) \int_A q_{u,v,s}(x, t) dx + \int_{A \times B} r_{u,v,s}(x, y, t) dx dy, \quad (10)$$

причем порядок интегрирования во втором слагаемом в правой части (10) можно изменять.

Теорема 1. Пусть для системы (6) выполнены условия 1)–7). Тогда ее функция переходной вероятности (10) определяется решением следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (q_{u,v,s})'_t(x,t) = \mathcal{L}_v^* q_{u,v,s}(x,t), \\ (r_{u,v,s})'_t(x,y,t) = \mathcal{L}_y^* r_{u,v,s}(x,y,t) + \lambda^*(t) \Theta(y) r_{u,v,s}(x,y,t) + \phi^*(y) \bar{\Lambda}^*(t) \\ \quad \times \left[\text{diag}(\Theta(v)) \mathcal{T}(s,t) q_{u,v,s}(x,t) + \int_E \Theta(z) r_{u,v,s}(x,z,t) dz \right], \\ 0 \leq s < t \leq T, \\ q_{u,v,s}(x,s) = \delta_u(x), \quad r_{u,v,s}(x,y,s) = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Условия 6) и 7), налагаемые на систему (6), представляются достаточно обременительными. Во-первых, в них непосредственно требуется, чтобы функция переходной вероятности имела вид (10). Во-вторых, данные условия трудны для проверки, так как они представлены в отрыве от свойств коэффициентов системы (6). Ниже приведены другие, более мягкие, условия.

6') Функции $a(x,y,t)$, $a'_x(x,y,t)$, $b(x,y,t)$, $b'_x(x,y,t)$ и $b''_{xx}(x,y,t)$ непрерывны и ограничены по $(x,y,t) \in \mathbf{R} \times E \times [0,T]$, а также удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha < 1$) по переменной x равномерно по паре (y,t) : существуют константы $0 \leq C < \infty$, $0 < \alpha < 1$ такие, что для всех (x_1, y_1, t_1) , $(x_2, y_2, t_2) \in \mathbf{R} \times E \times [0,T]$ выполнено

$$\begin{aligned} |a_x^{(k)}(x_1, y_1, t_1) - a_x^{(k)}(x_2, y_2, t_2)| &\leq C|x_1 - x_2|^\alpha, \quad k = 0, 1, \\ |b_x^{(l)}(x_1, y_1, t_1) - b_x^{(l)}(x_2, y_2, t_2)| &\leq C|x_1 - x_2|^\alpha, \quad l = 0, 1, 2; \end{aligned}$$

и, помимо этого, также верно неравенство

$$|b(x_1, y_1, t_1) - b(x_2, y_2, t_2)| \leq C(|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}).$$

7') Существуют константы $0 < \underline{\lambda} \leq \bar{\lambda} < \infty$ такие, что для всех $(x,y,t) \in \mathbf{R} \times E \times [0,T]$ выполняется неравенство $\underline{\lambda} \leq |b(x,y,t)| \leq \bar{\lambda}$.

Теорема 2. Пусть для системы (6) выполнены условия 1)–5), 6') и 7'). Тогда функция переходной вероятности обязана иметь вид (10) и пара процессов $(q_{u,v,s}(x,t), r_{u,v,s}(x,y,t))$ определяется системой (11).

Доказательство теоремы 2 дано в приложении.

Приведем два важных следствия из теорем 1 и 2.

3.1. Переходная плотность для традиционной скрытой марковской модели. Обычно в качестве скрытой марковской модели в литературе рассматривается подкласс динамических систем (6) специального вида, в которых переключения в первом уравнении определяются непосредственно марковским процессом θ_t с конечным числом состояний и не зависят от конкретных значений процесса y [10], [13]. В этом случае система (6) может быть представлена в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} x_t = x_0 + \int_0^t \bar{a}(x_{u-}, u) \theta_{u-} du + \int_0^t \bar{b}(x_{u-}, u) \theta_{u-} dw_u, \\ \theta_u = \theta_0 + \int_0^t \Lambda^*(u) \theta_{u-} du + \bar{M}_t^\theta, \end{array} \right. \quad (12)$$

где $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \bar{a}(x_t, t) &= (a_1(x_t, t), \dots, a_n(x_t, t)), & a_i(x, t) &= a(x, \mathbf{I}_{\mathcal{Q}_i}(y), t), \\ \bar{b}(x_t, t) &= (b_1(x_t, t), \dots, b_n(x_t, t)), & b_i(x, t) &= b(x, \mathbf{I}_{\mathcal{Q}_i}(y), t). \end{aligned}$$

Аналог уравнений (11) для системы (12) имеет более простой вид. Действительно, подставляя в (11) явный вид коэффициентов системы (12) и интегрируя обе части системы по множествам $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \dots, n$, получаем, что

$$P(x_t \in A, \theta_t = e_j \mid x_s = u, \theta_t = e_i) = \int_A e_i^* \bar{p}_{u,s}(x, t) e_j dx,$$

где матричнозначная функция $\bar{p}_{u,s}(x, t) = \|\bar{p}_{u,s}^{ij}(x, t)\|_{i,j=1}^n$ является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (\bar{p}_{u,s})'_t(x, t) = -(\bar{p}_{u,s}(x, t) \operatorname{diag} \bar{a}(x, t))'_x + \frac{1}{2} (\bar{p}_{u,s}(x, t) (\operatorname{diag} \bar{b}(x, t))^2)''_{xx} \\ \quad + \bar{p}_{u,s}(x, t) \Lambda(t), \quad 0 \leq s < t \leq T, \\ \bar{p}_{u,s}(x, s) = \delta_u(x) I. \end{cases}$$

Таким образом, для частного случая системы (6) — традиционной скрытой марковской модели (12), уравнения, описывающие переходную вероятность ее состояния, имеют более простую структуру: они являются не интегро-дифференциальными, а только дифференциальными уравнениями в частных производных. Интересно, что несмотря на то, что изначально преобразовывались уравнения (11), зависящие от конкретного вида распределений π процесса y , функция $\bar{p}$, описывающая поведение переходной вероятности модели (12), оказалась инвариантной к виду распределений π . Этот результат полностью соответствует виду данной системы, скачки которой порождены непосредственно процессом θ_t .

3.2. Уравнение для плотности распределения состояния системы. Предполагая известной начальную плотность

$$\psi_0(x, y) = \psi(x, y, 0) = p_0^* \phi(y) \varsigma_0(x),$$

с помощью (11) можно найти уравнение, описывающее эволюцию плотности распределения $\psi(x, y, t)$, $t \in [0, T]$, состояния системы (6).

Известно, что для любых $0 \leq s < t \leq T$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{B}(E)$ верно равенство

$$P\{x_t \in A, y_t \in B\} = \int_{A \times B} \psi(x, y, t) dx dy = \int_{\mathbf{R} \times E} P_{u,v,s}(A, B, t) \psi(u, v, s) du dv.$$

В предположении, что условия теоремы 1 или 2 выполнены, легко получить интегро-дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию плотности $\psi(x, y, t)$:

$$\begin{cases} \psi'_t(x, y, t) = \mathcal{L}_y^* \psi(x, y, t) + \lambda^*(t) \Theta(y) \psi(x, y, t) \\ \quad + \phi^*(y) \bar{\Lambda}^*(t) \int_E \Theta(z) \psi(x, z, t) dz, \quad 0 < t \leq T, \\ \psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y). \end{cases} \quad (13)$$

4. Заключение

В предложенной работе выведены уравнения, описывающие эволюцию распределения состояния скрытой марковской модели. Однако условия, накладываемые на систему (6) и гарантирующие вид (10) для ее переходной функции распределения, остаются достаточно обременительными. С точки зрения практических приложений актуальным является ослабление этих условий и, в частности, рассмотрение кусочно-гладких коэффициентов сноса и диффузии [22], [24].

Далее, ясно, что применение уравнений (11) для решения практических задач требует разработки эффективных численных методов его решения.

Наконец, представляется интересным решение задач оптимальной фильтрации состояния системы (6) по косвенным зашумленным наблюдениям. Частный случай этой задачи для традиционной скрытой марковской модели, описываемой линейной системой наблюдения и приводящей к конечномерному оптимальному фильтру, был

рассмотрен в [13], а в [12] для традиционных скрытых марковских систем приведены необходимые и достаточные условия существования конечномерного оптимального фильтра. Однако уравнения для эволюции условного распределения в общем случае выведены не были.

Перечисленные выше аспекты являются предметом дальнейших исследований.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Найдем уравнение, описывающее поведение функции r , используя подход, применяемый при выводе классического уравнения ФПК.

«Обобщенная» переходная плотность вероятности z_t , очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} p_{u,v,s}(x, y, t) &= \alpha_{v,s}(t) \delta_v(y) q_{u,v,s}(x, t) + r_{u,v,s}(x, y, t), \\ \alpha_{v,s}(t) &= \mathcal{T}^*(s, t) \Theta(v). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

При этом легко найти начальное условие для $r_{u,v,s}(x, y, t)$. Действительно, из (П.1) следует, что

$$p_{u,v,s}(x, y, s) = \delta_{u,v}(x, y) = \alpha_{v,s}(s) \delta_{u,v}(x, y) + r_{u,v,s}(x, y, s),$$

т.е.

$$r_{u,v,s}(x, y, s) \equiv 0. \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим произвольную функцию $\psi = \psi(x, y) = f(x)g(y)$ такую, что $f = f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем, $g = g(x): E \rightarrow \mathbf{R}$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\|\mathbf{E}_\pi g^2(y)\| < \infty \quad \text{и} \quad \int_E |g(u)| du < \infty.$$

Тогда, используя обобщенное правило дифференцирования Ито и учитывая, что $[w, \overline{M}^g]_t \equiv 0$ Р-п.н., для любых $0 \leq s < t \leq T$ получаем

$$\begin{aligned} \psi(x_t, y_t) &= f(x_s)g(y_s) + \int_s^t f(x_{\tau-}) dg(y_\tau) + \int_s^t df(x_\tau) g(y_{\tau-}) \\ &= \psi(x_s, y_s) + \int_s^t \left[\psi(x_{\tau-}, y_{\tau-}) \lambda^*(\tau) + f(x_{\tau-}) \mathbf{E}_\pi^* \{g(y)\} \overline{\Lambda}^*(\tau) \right] \Theta(y_{\tau-}) d\tau \\ &\quad + \int_s^t \left[\psi'_x(x_{\tau-}, y_{\tau-}) a(x_{\tau-}, y_{\tau-}, \tau) + \frac{1}{2} \psi''_{xx}(x_{\tau-}, y_{\tau-}) b^2(x_{\tau-}, y_{\tau-}, \tau) \right] d\tau \\ &\quad + \int_s^t f(x_{\tau-}) d\overline{M}_\tau^g + \int_s^t \psi'_x(x_{\tau-}, y_{\tau-}) b(x_{\tau-}, y_{\tau-}, \tau) dw_\tau. \end{aligned}$$

Из сделанных выше предположений относительно f и g следует, что последние два слагаемых в предыдущей формуле являются $\mathcal{F}_t$ -согласованными мартингалами. С учетом этого, а также того, что процесс x имеет п.н. непрерывные траектории, а число скачков процесса y на отрезке $[0, T]$ п.н. конечно, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\psi(x_t, y_t) \mid x_s = u, y_s = v\} &= \psi(u, v) \\ &+ \int_s^t \mathbf{E}\left\{ \left[\psi(x_\tau, y_\tau) \lambda^*(\tau) + f(x_\tau) \mathbf{E}_\pi^* \{g(y)\} \overline{\Lambda}^*(\tau) \right] \Theta(y_\tau) \mid x_s = u, y_s = v \right\} d\tau \\ &+ \int_s^t \mathbf{E}\left\{ \psi'_x(x_\tau, y_\tau) a(x_\tau, y_\tau, \tau) + \frac{\psi''_{xx}(x_\tau, y_\tau) b^2(x_\tau, y_\tau, \tau)}{2} \mid x_s = u, y_s = v \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Преобразуем интегралы в левой и правой частях (П.3), используя для этого формулу интегрирования по частям, теорему Фубини, а также формулы (9), (10) и (П.2):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\psi(x_t, y_t) \mid x_s = u, y_s = v\} &= \psi(u, v) + \int_s^t \int_{E \times \mathbf{R}} \psi(x, y) (r_{u,v,s})'_\tau(x, y, \tau) dx dy d\tau \\
 &\quad + \int_s^t \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) \left[(\alpha_{v,s})'_\tau(\tau) q_{u,v,s}(x, \tau) + \alpha_{v,s}(\tau) (q_{u,v,s})'_\tau(x, \tau) \right] dx d\tau, \\
 \mathbb{E}\left\{ \int_s^t \psi'_x(x_\tau, y_\tau) a(x, y, \tau) d\tau \mid x_s = u, y_s = v \right\} \\
 &= - \int_s^t \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) \alpha_{v,s}(\tau) \left(a(x, y, \tau) q_{u,v,s}(x, \tau) \right)'_x dx d\tau \\
 &\quad - \int_s^t \int_{E \times \mathbf{R}} \psi(x, y) \left(a(x, y, \tau) r_{u,v,s}(x, y, \tau) \right)'_x dx dy d\tau, \\
 \mathbb{E}\left\{ \int_s^t \psi''_{xx}(x_\tau, y_\tau) b^2(x, y, \tau) d\tau \mid x_s = u, y_s = v \right\} \\
 &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) \alpha_{v,s}(\tau) \left(b^2(x, y, \tau) q_{u,v,s}(x, \tau) \right)''_{xx} dx d\tau \\
 &\quad + \int_s^t \int_{E \times \mathbf{R}} \psi(x, y) \left(b^2(x, y, \tau) r_{u,v,s}(x, y, \tau) \right)''_{xx} dx dy d\tau, \\
 \mathbb{E}\left\{ \int_s^t \psi(x_\tau, y_\tau) \lambda^*(\tau) \Theta(y_\tau) d\tau \mid x_s = u, y_s = v \right\} \\
 &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) (\alpha_{v,s})'_\tau(\tau) q_{u,v,s}(x, \tau) dx d\tau \\
 &\quad + \int_s^t \int_{E \times \mathbf{R}} \psi(x, y) r_{u,v,s}(x, y, \tau) \lambda^*(\tau) \Theta(y) dx dy d\tau, \\
 \mathbb{E}\left\{ \int_s^t f(x_\tau) E_\pi^*\{g(y)\} \bar{\Lambda}^*(\tau) \Theta(y_\tau) d\tau \mid x_s = u, y_s = v \right\} \\
 &= \int_s^t \int_{E \times \mathbf{R}} \psi(x, y) \phi^*(y) \bar{\Lambda}^*(\tau) \Theta(y) \alpha_{v,s}(\tau) q_{u,v,s}(x, \tau) dx dy d\tau \\
 &\quad + \int_s^t \int_{E \times \mathbf{R}} \psi(x, y) \phi^*(y) \bar{\Lambda}^*(\tau) \left[\int_E \Theta(z) r_{u,v,s}(x, z, \tau) dz \right] dx dy d\tau.
 \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (П.3) и упростим. Функция $\psi(x, y)$ была выбрана произвольной, и множество линейных комбинаций таких функций плотно в $L_1(\mathbf{R} \times E)$. Поэтому равенство (П.3) выполняется, если только

$$\begin{aligned}
 (r_{u,v,s})'_t(x, y, t) &= \mathcal{L}_y^* r_{u,v,s}(x, y, t) + \lambda^*(t) \Theta(y) r_{u,v,s}(x, y, t) + \phi^*(y) \bar{\Lambda}^*(t) \\
 &\quad \times \left[\Theta(v) \alpha_{v,s}(t) q_{u,v,s}(x, t) + \int_E \Theta(z) r_{u,v,s}(x, z, t) dz \right].
 \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Траектории процесса $y = y_t(\omega^2)$, $t \in [0, T]$, п.н. принадлежат пространству Блекуэлла. При этом условия теоремы гарантируют (см. [25]), что для любого $u \in \mathbf{R}$ и любого фиксированного $\omega^2 \in \Omega^2$ существует и единственно решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} [p_{\omega^2, u}(x, t)]'_t = -[a(x, y_t(\omega^2), t) p_{\omega^2, u}(x, t)]'_x \\ \quad + \frac{1}{2} [b^2(x, y_t(\omega^2), t) p_{\omega^2, u}(x, t)]''_{xx}, & 0 < t \leq T, \\ p_{\omega^2, u}(x, 0) = \delta_u(x), \end{cases}$$

причем это решение дважды дифференцируемо по x , дифференцируемо по t и для функций $p_{\omega^2,u}(x,t)$, $[p_{\omega^2,u}(x,t)]'_x$ и $[p_{\omega^2,u}(x,t)]''_{xx}$ существуют равномерные по ω^2 мажоранты $\pi_k(u, x, t)$, $k = 0, 1, 2$:

$$|[p_{\omega^2,u}(x,t)]^{(k)}_x| \leq \pi_k(u, x, t) \quad \forall \omega^2 \in \Omega^2, \quad k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, условия 1)–5), 6') и 7') теоремы 2 гарантируют выполнение условия 6) теоремы 1.

Далее, по лемме 7.5 [5] для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_t(\omega^1, \omega^2) \in A \mid \mathcal{F}_T^y\} &= \mathbf{P}\{x_t(\omega^1, y(\omega^2)) \in A \mid \mathcal{F}^2\} = \mathbf{P}^1\{x_t(\omega^1, y(\omega^2)) \in A\} \\ &= \int_{A \times \mathbf{R}} p_{\omega^2,u}(x,t) \zeta_0(u) du dx, \end{aligned}$$

причем порядок интегрирования по x и u можно изменять. Далее, по лемме 7.4 [5]

$$\mathbf{P}(x_t(\omega^1, \omega^2) \in A \mid \mathcal{F}^2, x_0(\omega^1) = u) = \int_A p_{\omega^2,u}(x,t) dx,$$

и для любого $C \in \mathcal{F}^2$ верно равенство

$$\mathbf{P}(x_t(\omega^1, \omega^2) \in A, \omega^2 \in C \mid x_0(\omega^1) = u) = \int_A \left[\int_{\Omega^2} p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_C(\omega^2) \mathbf{P}^2(d\omega^2) \right] dx.$$

Рассмотрим на измеримом пространстве $(\Omega^2, \mathcal{F}^2)$ маргинальную меру $\mathbf{P}_t^{y,N}$, порожденную случайным вектором $(y_t(\omega^2), \mathbf{I}(N_t(\omega^2)))$. Очевидно, что $\mathbf{P}^2 \ll \mathbf{P}_t^{y,N}$, и имеет место равенство

$$Q(C) = \int_{\Omega^2} p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_C(\omega^2) \mathbf{P}^2(d\omega^2) = \int_{\Omega^2} p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_C(\omega^2) \frac{d\mathbf{P}^2}{d\mathbf{P}_t^{y,N}}(\omega^2) \mathbf{P}_t^{y,N}(d\omega^2).$$

Рассмотрим множество $C \in \mathcal{F}^2$ следующего вида:

$$C = \{\omega^2: y_t(\omega^2) \in B, N_t(\omega^2) > 0\}.$$

Из свойств условного математического ожидания и определения C следует, что

$$\begin{aligned} Q(C) &= \int_C \mathbf{E}\{p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_C(\omega^2) \mid y_t(\omega^2), \mathbf{I}(N_t(\omega^2))\} \mathbf{P}_t^{y,N}(d\omega^2) \\ &= \int_C \mathbf{E}\{p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_C(\omega^2) \mid y_t(\omega^2), N_t(\omega^2) > 0\} \mathbf{P}_t^{y,N}(d\omega^2). \end{aligned}$$

Используя переходную вероятность процесса y (3) и делая замену переменных $\omega^2 \rightarrow y$ под знаком интеграла, имеем

$$\begin{aligned} Q(C) &= Q(\{\omega^2: y_t(\omega^2) \in B, N_t(\omega^2) > 0\}) \\ &= \int_B \mathbf{E}\{p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_C(\omega^2) \mid y_t(\omega^2), N_t(\omega^2) > 0\} \\ &\quad \times \left[\int_E \phi^*(y) [\mathcal{P}(0,t) - \text{diag } \mathcal{T}(0,t)]^* \Theta(v) p_0^* \phi(v) dv \right] dy. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(x_t \in A, y_t \in B, N_t > 0 \mid x_0 = u, y_0 = v) \\ &= \int_{A \times B} \mathbf{E}\{p_{\omega^2,u}(x,t) \mathbf{I}_{\{y_t \in B\}}(\omega^2) \mid y_t = y, N_t > 0\} \phi^*(y) \\ &\quad \times [\mathcal{P}(0,t) - \text{diag } \mathcal{T}(0,t)]^* \Theta(v) dx dy, \end{aligned}$$

и порядок интегрирования по x и y можно менять. Таким образом, истинность формулы (10) доказана для случая $s = 0$. Доказательство (10) для случая

$0 < s \leq T$ проводится абсолютно аналогично. Дифференцируемость выражения $E\{p_{\omega^2,u}(x,t) I_{\{y_t \in B\}}(\omega^2) | y_t = y, N_t > 0\}$ дважды по x и один раз по t следует из существования и равномерной мажорируемости соответствующих производных у функции $p_{\omega^2,u}(x,t) I_{\{y_t \in B\}}(\omega^2)$ для любого $\omega^2 \in \Omega^2$.

Таким образом, условия 1)–5), 6') и 7') теоремы 2 гарантируют также и выполнение условия 7) теоремы 1. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гитман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 2, 3. М.: Наука, 1973, 639 с., 496 с.
2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 859 с.
3. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445 с.
4. Boel R., Varaiya P., Wong E. Martingales on jump processes. I: Representation results. — SIAM J. Control Optim., v. 13, № 5, 1975, p. 999–1021.
5. Liptser R. Sh., Shiriyayev A. N. Statistics of Random Processes. II. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1978, 339 p.
6. Wan C. B., Davis M. H. A. Existence of optimal controls for stochastic jump processes. — SIAM J. Control Optim., 1979, v. 14, № 4, p. 511–524.
7. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
8. Davis M. H. A. Markov Models and Optimization. London: Chapman & Hall, 1993, 295 p.
9. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966.
10. Elliott R. J., Aggoun L., Moore J. B. Hidden Markov Models. Estimation and Control. New York: Springer-Verlag, 1995, 361 p.
11. Mariton M. Jump Linear Systems in Automatic Control. New York: Marcel Decker, 1990.
12. Björk T. Finite optimal filters for a class of nonlinear diffusions with jumping parameters. — Stochastics, 1981/82, v. 2, № 2, p. 121–138.
13. Miller B. M., Runggaldier W. J. Kalman filtering for linear systems with coefficients driven by a hidden Markov jump process. — Systems Control Lett., 1997, v. 31, № 2, p. 93–102.
14. Cvitanich J., Liptser R. Sh., Rozovskii B. Tracking volatility. — Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Sydney, 2000), p. 1189–1193.
15. Zhou X. Y., Yin G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: a continuous-time model. — SIAM J. Control Optim., 2003, v. 42, № 4, p. 1466–1482.
16. Genon-Catalot V., Jeantheau T., Larédo C. Stochastic volatility models as hidden Markov models and statistical applications. — Bernoulli, 2000, v. 6, № 6, p. 1051–1079.
17. Elliott R. J., Malcolm W. P., Tsoi A. Hidden Markov volatility estimation. — Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control (Las Vegas, 2002), v. 1, p. 398–404.
18. Anisimov V. Switching processes: averaging principle, diffusion approximation and applications. — Acta Appl. Math., 1995, v. 40, № 2, p. 95–141.
19. Миллер Б. М., Авраченко К. Е., Степанян К. В., Миллер Г. Б. Задача оптимального стохастического управления потоком данных по неполной информации. — Проблемы передачи информации, 2005, т. 41, № 2, с. 89–110.
20. Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms, and Software. New York: Wiley, 2001.
21. Борисов А. В. Анализ и оценивание состояний специальных марковских скачкообразных процессов, I: мартингальное представление. — Автоматика и телемеханика, 2004, № 1, с. 50–65.
22. Портенко Н. И., Скороход А. В., Шуренков В. М. Марковские процессы. Итоги

- науки и техники, сер. соврем. пробл. матем., фундам. напр., т. 46. М.: ВИНТИ, 1989.
23. Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986, 351 с.
24. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Стохастическое исчисление. Итоги науки и техники, сер. соврем. пробл. матем., фундам. напр., т. 45. М.: ВИНТИ, 1989.
25. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.

Поступила в редакцию
30.IV.2004

© 2006 г.

КЛОКОВ С. А.*

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

В работе установлены нижние оценки скорости α -перемешивания для некоторых моделей из одного класса стационарных марковских процессов при выполнении условий возвратности. Дано сравнение с известными верхними оценками скорости β -перемешивания для этого же класса процессов в случаях полиномиальной и субэкспоненциальной сходимости. В последнем случае показано, что оценки являются в определенном смысле наилучшими.

Ключевые слова и фразы: марковские процессы, возвратность, инвариантная мера, коэффициенты перемешивания, полиномиальная скорость, субэкспоненциальная скорость.

1. Введение. Пусть (X_n) — случайный процесс со значениями в $\mathbf{R}^d$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\leq n} = \sigma\{X_j: j \leq n\}$ и $\mathcal{F}_{\geq n} = \sigma\{X_j: j \geq n\}$ «прошлое» и «будущее» этого процесса. Существует несколько способов определить понятие слабой зависимости между σ -алгебрами $\mathcal{F}_{\leq m}$ и $\mathcal{F}_{\geq m+n}$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим следующие три коэффициента перемешивания, введенные в 50–60-х годах М. Розенблаттом [14], А. Н. Колмогоровым и И. А. Брагимовым [9]:

$$\alpha(n) = \sup_{m \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_{\leq m}, B \in \mathcal{F}_{\geq m+n}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|, \quad (1)$$

$$\beta(n) = \sup_{m \geq 0} \mathbf{E} \varprojlim_{B \in \mathcal{F}_{\geq m+n}} (\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_{\leq m}) - \mathbf{P}(B)), \quad (2)$$

$$\varphi(n) = \sup_{m \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_{\leq m}, B \in \mathcal{F}_{\geq m+n}, \mathbf{P}(A) > 0} |\mathbf{P}(B | A) - \mathbf{P}(B)|, \quad (3)$$

где символ $\varprojlim$ обозначает полную вариацию заряда (меры со знаком).

Если $\alpha(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что имеет место α -перемешивание (или сильное перемешивание). Аналогично вводятся β -перемешивание и φ -перемешивание (или равномерно сильное перемешивание). Хорошо известны неравенства между этими коэффициентами:

$$\alpha(n) \leq \beta(n) \leq \varphi(n), \quad (4)$$

* Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; School of Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK; e-mail: klokov@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов EPSRC GR/R40746/01 (UK), NFGRF 2301863 (University of Kansas) и РФФИ 03-01-00045.