Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Грибкова, Р. Хэлмерс, О состоятельности $M \lll N$ -бутстреп-аппроксимации распределений усеченного среднего, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 1, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:51:31

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука

Том 55

Выпуск 1, 2010 год

январь, февраль, март

© 2010 г.

ГРИБКОВА Н. В.^{*}, ХЭЛМЕРС Р.^{**}

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ $M \ll N$ -БУТСТРЕП-АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСЕЧЕННОГО СРЕДНЕГО

Мы доказываем, что $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимация (N — объем исходной выборки, M — объем бутстреп-выборки; $M/N \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$) распределения усеченного среднего является состоятельной без каких-либо предположений относительно исходного распределения F , тогда как классический бутстреп Эфрона (случай $M = N$) и нормальная аппроксимация не состоятельны, если имеются промежутки ненулевой длины, имеющие F -меру нуль, такие, что их границами являются квантили, в которых происходит усечение.

Ключевые слова и фразы: усеченное среднее, асимптотическая нормальность, $M \ll N$ -бутстреп, состоятельность, бутстреп-аппроксимация, модифицированный бутстреп.

1. Введение. Усеченное среднее — хорошо известная оценка параметра сдвига. Основной причиной его применения в статистике является его робастность. Центр распределения часто оценивается выборочным средним или выборочной медианой. Однако хорошо известно, что выборочное среднее чувствительно к присутствию в данных выделяющихся наблюдений и, следовательно, не робастно. С другой стороны, выборочная медиана робастна против таких наблюдений, но не очень эффективна, если исходное распределение, например, нормальное. Оценкой, демонстрирующей промежуточное поведение (и включающей в себя в качестве частных случаев как выборочное среднее, так и выборочную

---

^{*}С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 198504 Старый Петергоф, С.-Петербург, Россия; e-mail: nv.gribkova@gmail.com

^{**}Centre for Mathematics and Computer Science, P.O.Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands; e-mail: helmerts@cwi.nl

медиану), является усеченное среднее (см. [9], [11]). В сравнении с робастными M -оценками (оценками типа максимального правдоподобия), усеченное среднее не только имеет такую же асимптотическую дисперсию, но и гораздо проще вычисляется.

Предельное распределение этой статистики в общем случае произвольного исходного распределения было найдено С. Стиглером [12], в частности, он показал, что для того чтобы распределение усеченного среднего было асимптотически нормальным, необходимо и достаточно, чтобы усечение выборки производилось на уровне выборочных квантилей, для которых соответствующие теоретические квантили определялись бы однозначно. Результат Стиглера был обобщен в [5] на случай слегка усеченного среднего, когда доля отсекаемых данных с ростом N стремится к нулю.

В двух недавних работах [6], [7] доказана справедливость разложения Эджворта для (студентизованного) усеченного среднего и бутстре-пированного усеченного среднего и найдены простые явные формулы для ведущих членов разложений. С использованием этих результатов была доказана корректность второго порядка $M \neq N$ -бутстреп-аппроксимации (N — объем исходной выборки, M — объем бутстреп-выборки) при условии, что усеченное среднее надлежащим образом определено и выполнены некоторые условия гладкости F в окрестности квантилей, где происходит усечение; мы предполагали выполненным также определенное соотношение между M и N , если $M \gg N$ и $N \rightarrow \infty$.

В этой статье мы доказываем, что без каких-либо условий гладкости, налагаемых на исходную функцию распределения F , распределение $M \ll N$ -бутстре-пированного усеченного среднего сходится к тому же пределу, что и распределение усеченного среднего, если оба они (усеченное среднее и его бутстреп-версия) надлежащим образом нормированы и $M/N \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Следовательно, $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимация распределения этой статистики всегда состоятельна, если наблюдения независимы и одинаково распределены, включая негладкий случай с «промежутками» у исходного распределения, т. е. интервалами ненулевой длины с нулевой F -мерой, имеющими своей границей квантили, в которых происходит усечение, в то время как нормальная аппроксимация и эфроновский «простой» бутстреп ($M = N$) в этом негладком случае не работают.

Некоторые общие результаты, касающиеся $M \ll N$ -бутстрепа с замещением и без замещений, могут быть найдены в [2]. В настоящей статье мы устанавливаем, что $M \ll N$ -бутстреп с замещением работает для случая усеченного среднего и в том случае, когда обычный бутстреп Эфрона терпит неудачу. Наш основной результат — теорема 1 — дополняет очень общую теорему 2 работы [2]. Наше доказательство теоремы 1 — относительно простое: оно основано на аппроксимации усе-

ченного среднего и его $M \ll N$ -бутстреп-версии суммами независимых одинаково распределенных уинсоризованных случайных величин.

Наш результат дает новый пример, полезный в статистической практике, того, как $M \ll N$ -бутстреп работает в тех случаях, когда классический бутстреп Эфрона не состоятелен. В п. 3 мы иллюстрируем его применение конструкцией $M \ll N$ -бутстреп-доверительного интервала для параметра $\mu(\alpha, \beta)$ — теоретического усеченного среднего (ср. (1.3)), численный пример дан в п. 5. Ряд других реалистичных примеров того, как $M \ll N$ -бутстреп успешно аппроксимирует распределение статистики, в то время как обычный бутстреп терпит неудачу, может быть найден в [2]. Альтернативный путь доказательства утверждения (ii) нашей теоремы 1 мог бы состоять в проверке общих предположений теоремы 2 работы [2] для случая усеченного среднего.

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых одинаково распределенных вещественнозначных случайных величин с общей функцией распределения F , и пусть $X_{1:N} \leq \dots \leq X_{N:N}$ ($N = 1, 2, \dots$) обозначает вариационный ряд, построенный по первым N элементам последовательности, а F_N — соответствующую эмпирическую функцию распределения.

Обозначим $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$, $0 < u \leq 1$, непрерывную слева инверсию функции распределения F и F_N^{-1} — инверсию эмпирической функции распределения.

Будем рассматривать два варианта усеченного среднего:

$$T_{N_{(1)}} = \frac{1}{[\beta N] - [\alpha N]} \sum_{i=[\alpha N]+1}^{[\beta N]} X_{i:N}, \quad T_{N_{(2)}} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F_N^{-1}(u) du, \quad (1.1)$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$ — фиксированные числа, $[\cdot]$ обозначает функцию взятия целой части. Заметим, что $T_{N_{(1)}}$ — естественное определение усеченного среднего; $T_{N_{(2)}}$ — вариант усеченного среднего (полученный по методу подстановки эмпирической функции распределения и лишь слегка отличающийся от классического $T_{N_{(1)}}$), который очень полезен в контексте бутстрепа, в частности, он позволяет нам получить свойство корректности второго порядка M -бутстрепа ($M \neq N$) для (стьюдентизованного) усеченного среднего $T_{N_{(2)}}$ (см. [7]).

Пусть $X_1^*, \dots, X_M^*$ — бутстреп-выборка объема $M = M(N)$ из эмпирического распределения F_N , основанного на первых N наблюдениях $X_1, \dots, X_N$ исходной случайной величины; F_M^* обозначает бутстреп-эмпирическую функцию распределения, $X_{1:M}^* \leq \dots \leq X_{M:M}^*$ — соответствующие порядковые статистики. Здесь и далее мы используем сокращенное обозначение M , опуская аргумент N .

Определим $M \neq N$ -бутстреп-двойников усеченных средних:

$$T_{N,M(1)}^* = \frac{1}{[\beta M] - [\alpha M]} \sum_{i=[\alpha M]+1}^{[\beta M]} X_{i:M}^*, \quad T_{N,M(2)}^* = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (F_M^*)^{-1}(u) du, \quad (1.2)$$

где α и β те же, что и в (1.1).

Хорошо известно, что обе версии усеченного среднего служат статистическими оценками параметра сдвига

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F^{-1}(u) du \quad (1.3)$$

— теоретического усеченного среднего. Бутстреп-двойник параметра $\mu(\alpha, \beta)$ дается формулой $\mu_N(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} F_N^{-1}(u) du = T_{N(2)}$.

Введем ν -е ($0 < \nu < 1$) квантили F , F_N и F_M^* : $\xi_{\nu} = F^{-1}(\nu)$, $\xi_{\nu N:N} = F_N^{-1}(\nu)$, $\xi_{\nu M:M}^* = (F_M^*)^{-1}(\nu)$, и заметим, что справедливы следующие простые соотношения:

$$\begin{aligned} T_{N(2)} &= c_{\alpha,N}(T_{N(1)} - \xi_{\alpha N:N}) + T_{N(1)} - c_{\beta,N}(T_{N(1)} - \xi_{\beta N:N}), \\ T_{N,M(2)}^* &= c_{\alpha,M}(T_{N,M(1)}^* - \xi_{\alpha M:M}^*) + T_{N,M(1)}^* - c_{\beta,M}(T_{N,M(1)}^* - \xi_{\beta M:M}^*), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $c_{\nu,\kappa} = (\nu\kappa - [\nu\kappa])/((\beta - \alpha)\kappa) = O(1/\kappa)$, $\kappa = N, M$, и $\nu = \alpha, \beta$. Поскольку последовательности $\xi_{\nu N:N}$ и $T_{N(j)}$, $j = 1, 2$, ограничены с вероятностью единица ($\mathbf{P}$ -п.н.), то, ввиду (1.4), имеем

$$N^{1/2}(T_{N(2)} - T_{N(1)}) \rightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Кроме того, поскольку $\xi_{\nu M:M}^*$, $\nu = \alpha, \beta$, и $T_{N,M(j)}^*$, $j = 1, 2$, стохастически ограничены по $\mathbf{P}^*$ -вероятности $\mathbf{P}$ -п.н. (см. [7]), то

$$M^{1/2}(T_{N,M(2)}^* - T_{N,M(1)}^*) \xrightarrow{\mathbf{P}^*} 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \quad \min(N, M) \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Здесь и далее $\mathbf{P}^*$ обозначает вероятностную бутстреп-меру, имеющую атомы $1/N$ в точках $X_{i:N}$, а соответствующее математическое ожидание будет обозначаться через $\mathbf{E}^*$.

Из соотношений (1.5), (1.6) следует, что предельные распределения (если они существуют) обеих версий усеченного среднего, определенных в (1.1), одинаковы; то же замечание справедливо для распределений соответствующих бутстреп-двойников. Поэтому мы будем далее использовать следующие сокращенные обозначения:

$$T_N = T_{N(j)}, \quad T_{N,M}^* = T_{N,M(j)}^*, \quad j = 1, 2.$$

Наши результаты относительно предельных распределений и корректности $M \ll N$ -бутстрепа будут доказываться для усеченного среднего,

данного как $T_{N(2)}$, и его бутстреп-двойника $T_{N,M(2)}^*$, но ввиду сделанных замечаний эти результаты справедливы также и для $T_{N(1)}$ и его бутстреп-двойника $T_{N,M(1)}^*$.

Мы завершаем этот пункт замечанием, что асимптотические свойства второго порядка (разложения Эджворта) двух вариантов усеченного среднего и соответствующих их бутстреп-версий различны и что $T_{N(2)}$ является более подходящим определением усеченного среднего в контексте бутстрепа (см. [7]).

2. Асимптотическое распределение T_N и $T_{N,M}^*$, состоятельность $M \ll N$ -бутстрепа. Следуя работе [12], определим две величины

$$A = \sup\{x: F(x) \leq \alpha\} - F^{-1}(\alpha), \quad B = \sup\{x: F(x) \leq \beta\} - F^{-1}(\beta),$$

которые обращаются одновременно в нуль тогда и только тогда, когда инверсия F^{-1} непрерывна в точках α и β .

Введем вспомогательные случайные величины Y_i , имеющие функцию распределения $G(x)$:

$$Y_i = \begin{cases} X_i + A, & X_i \leq \xi_\alpha, \\ X_i, & \xi_\alpha < X_i \leq \xi_\beta, \\ X_i - B, & \xi_\beta < X_i. \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} F(x - A), & x < \xi_\alpha + A, \\ F(x), & \xi_\alpha + A \leq x < \xi_\beta, \\ F(x + B), & \xi_\beta \leq x, \end{cases} \quad (2.1)$$

$i = 1, \dots, N$. Определим обратную функцию $G^{-1}(u) = \inf\{x: G(x) \geq u\}$ и заметим, что эта функция непрерывна в точках α и β . Определим α - и β -квантили распределения G :

$$\eta_\alpha = G^{-1}(\alpha) = \xi_\alpha + A, \quad \eta_\beta = G^{-1}(\beta) = \xi_\beta. \quad (2.2)$$

Введем случайные величины Y_i , уинсоризованные вне интервала $(\eta_\alpha, \eta_\beta]$, т.е.

$$W_i = \eta_\alpha \vee (Y_i \wedge \eta_\beta), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

где $a \wedge b = \min(a, b)$ и $a \vee b = \max(a, b)$; соответствующая им квантильная функция имеет вид

$$Q(u) = \eta_\alpha \vee (G^{-1}(u) \wedge \eta_\beta).$$

Определим первые два центральных момента W_i :

$$\mu_W = \int_0^1 Q(u) du, \quad \sigma_W^2 = \int_0^1 (Q(u) - \mu_W)^2 du. \quad (2.4)$$

Заметим, что $\mu(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{-1} \int_\alpha^\beta G^{-1}(u) du$ (см. (1.3)).

Пусть (Z_1, Z_2, Z_3) обозначает нормально распределенный случайный вектор $\mathcal{N}(\mathbb{O}, \mathbb{C})$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & \alpha(\eta_\alpha - \mu_W) & -\alpha(1-\beta) \\ \alpha(\eta_\alpha - \mu_W) & \sigma_W^2 & (1-\beta)(\eta_\beta - \mu_W) \\ -\alpha(1-\beta) & (1-\beta)(\eta_\beta - \mu_W) & \beta(1-\beta) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Введем случайную величину

$$Z = (\beta - \alpha)^{-1}(-A \max(0, Z_1) + Z_2 + B \max(0, Z_3)), \quad (2.6)$$

ее первый момент $\mathbf{E} Z$ равен $(\sqrt{2\pi}(\beta - \alpha))^{-1}(-A(\alpha(1-\alpha))^{1/2} + B(\beta(1-\beta))^{1/2})$ (см. [12]). Используя (2.6) и ковариационную матрицу (2.5), мы легко находим второй момент случайной величины Z :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z^2 = (\beta - \alpha)^{-2} & \left\{ A^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} + \sigma_W^2 + B^2 \frac{\beta(1-\beta)}{2} - A\alpha(\eta_\alpha - \mu_W) \right. \\ & + B(1-\beta)(\eta_\beta - \mu_W) \\ & \left. - AB \frac{\alpha(1-\beta)}{\pi} \left(\sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha(1-\beta)}} - \arctg \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha(1-\beta)}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим F_Z функцию распределения случайной величины Z . Мы будем предполагать выполненным следующее условие невырожденности: $\eta_\alpha \neq \eta_\beta$ (т.е. $\xi_\alpha + A$ не является атомом распределения F с вероятностной массой, не меньшей $\beta - \alpha$; отметим, что это эквивалентно предположению $\sigma_W > 0$).

Следующая теорема есть наш основной результат, который состоит из двух частей: мы доказываем, во-первых, версию классической теоремы Стиглера [12], дающей асимптотическое распределение усеченного среднего, и, во-вторых, $M \ll N$ -бутстреп-аналог этой теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что $\sigma_W > 0$. Тогда*

- (i) $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}\{N^{1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta)) \leq x\} - F_Z(x)| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$;
- (ii) $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}^*\{M^{1/2}(T_{N,M}^* - T_N) \leq x\} - F_Z(x)| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $M \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$.

Кроме того,

- (ii') *если $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$, то соотношение (ii) справедливо $\mathbf{P}$ -п.н.*

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 4. Заметим, что первое соотношение (i) есть не что иное, как результат Стиглера [12]. Тем не менее, мы даем короткое доказательство теоремы Стиглера, поскольку наше доказательство немного отличается от данного в [12]; оно основано на стохастической аппроксимации (которая использовалась также

и в [6], [7]) суммой независимых одинаково распределенных унсоризованных случайных величин. Отметим также, что наше представление предельной случайной величины Z (но не само предельное распределение) отличается от данного в [12].

Как ясно из нашего доказательства соотношений (ii), (ii') теоремы 1 (см. п. 4), условие $M/N \rightarrow 0$ необходимо для сходимости к предельному распределению только в том случае, если длина хотя бы одного из промежутков A и B не равна нулю. Однако, если $A = B = 0$, то предельное распределение является нормальным при единственном условии, что $N \wedge M \rightarrow \infty$.

Следует отметить также, что условие $\sigma_W > 0$, предполагаемое в теореме 1, не требуется для сходимости в (i), (ii), (ii') (см. доказательство теоремы 1). Однако, если $\eta_\alpha = \eta_\beta$, то функция распределения F_Z может быть разрывна, и сходимость в (i), (ii), (ii') уже не будет равномерной (см. [12]). Однако этот вырожденный случай не представляет интересным для статистических приложений.

Следующее утверждение есть непосредственное следствие теоремы 1.

Следствие 1. *Предположим, что $\sigma_W > 0$. Тогда*

- (i) $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}^*\{M^{1/2}(T_{N,M}^* - T_N) \leq x\} - \mathbf{P}\{N^{1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta)) \leq x\}| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$
при $M \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$;
- (i') *если $M \rightarrow \infty$, $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$, то соотношение (i) справедливо $\mathbf{P}$ -п.н.*

Статистические выводы, основанные на усеченном среднем и использующие нормальную аппроксимацию, будут некорректны, если носитель распределения имеет промежутки, примыкающие к квантилям, в которых происходит усечение, что легко может произойти, например, когда мы имеем дело с группированными данными (см. [12]). Однако $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимация остается корректной и в том случае, когда нормальная аппроксимация не состоятельна, при единственном условии, что в точке η_α распределение F не имеет атома массы не меньшей $\beta - \alpha$ (это условие означает невырожденность статистики).

Теорема 1 и ее следствие покрывают тот случай, когда классический бутстреп не состоятелен, в то время как $M \ll N$ -бутстреп состоятелен без каких-либо предположений гладкости исходного распределения. Отметим попутно, что теорема 1 принадлежит к третьему случаю из трех разновидностей, выделенных в работе [3].

Остается вопрос, насколько хорошо $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимация приближает истинное распределение в случае конечных выборок; скорость сходимости может быть довольно медленной и будет зависеть от выбора M . Авторы предполагают исследовать этот вопрос в другой работе.

3. Некоторые применения. Так как предельное распределение $N^{1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta))$ имеет в общем случае ненулевое среднее $\mathbf{E}Z$, естественно оценивать параметр $\mu(\alpha, \beta)$ с помощью статистики $T_N - N^{-1/2}\widehat{\mathbf{E}}Z$ (см. (3.1) ниже). Асимптотическое смещение $\mathbf{E}Z$ зависит от неизвестных величин A и B (см. (2.6)), и нам нужна состоятельная оценка $\mathbf{E}Z$. К счастью, мы можем применить $M \ll N$ -бутстреп-процедуру для этих целей. Определим

$$\widehat{\mathbf{E}}Z = M^{1/2}\mathbf{E}^*(T_{N,M}^* - T_N), \quad \widehat{\sigma}_{N,M}^2 = M\mathbf{E}^*(T_{N,M}^* - T_N)^2 - (\widehat{\mathbf{E}}Z)^2. \quad (3.1)$$

Следующий результат означает состоятельность этих $M \ll N$ -бутстреп-оценок математического ожидания и дисперсии предельного распределения F_Z .

Утверждение 1. Если $\sigma_W > 0$, то

$$\widehat{\mathbf{E}}Z - \mathbf{E}Z \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad (\mathbf{D}Z)^{-1}\widehat{\sigma}_{N,M}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 1 \quad (3.2)$$

при $M \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$. Кроме того, соотношения (3.2) справедливы $\mathbf{P}$ -п.н., если $M \rightarrow \infty$, $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$.

Доказательство утверждения 1 приведено в п. 4. Отметим, что как $\mathbf{E}^*T_{N,M}^*$, так и $\widehat{\sigma}_{N,M}^2$ легко вычислить, используя метод Монте-Карло.

Теперь мы применим наши результаты к построению доверительного интервала для параметра $\mu(\alpha, \beta)$. Мы предполагаем, что $\xi_\alpha + A \neq \xi_\beta$, т.е. что естественное (в контексте оценивания) условие отсутствия вырожденности удовлетворено. Возьмем произвольное $p > 0$, близкое к нулю. Тогда мы получаем следующий асимптотический $M \ll N$ -бутстреп-доверительный интервал для теоретического усеченного среднего:

$$T_N - \frac{\hat{t}_{1-p/2} + \widehat{\mathbf{E}}Z}{\sqrt{N}} \leq \mu(\alpha, \beta) \leq T_N - \frac{\hat{t}_{p/2} + \widehat{\mathbf{E}}Z}{\sqrt{N}}, \quad (3.3)$$

имеющий доверительную вероятность, близкую к $1 - p$, где $\hat{t}_\gamma$ ($\gamma = p/2, 1 - p/2$) — γ -е квантили распределения статистики $M^{1/2}(T_{N,M}^* - \mathbf{E}^*T_{N,M}^*)$, которые можно вычислить методом Монте-Карло.

Как следствие теоремы 1 и утверждения 1 мы получаем следующий результат для студентизованного усеченного среднего.

Следствие 2. Предположим, что $\sigma_W > 0$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\{N^{1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta)) \leq \widehat{\sigma}_{N,M}x\} - F_Z(\widehat{\sigma}_{N,M}x) \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad (3.4)$$

если $M \rightarrow \infty$ и $M/N \rightarrow 0$.

Для того чтобы получить соответствующий доверительный интервал, основанный на студентизованной статистике, нам нужна $M \ll$

N -бутстреп-версия соотношения (3.4). Она может быть установлена с помощью двойной бутстреп-процедуры, при которой мы оцениваем $\hat{\sigma}_{N,M}$, используя бутстреп-выборки объема $m \ll M$ из эмпирической бутстреп-функции распределения F_M^* . Однако, чтобы получить двойную бутстреп-аппроксимацию, потребуется огромный объем вычислений методом Монте-Карло.

4. Доказательства. В этом пункте мы доказываем теорему 1 и утверждение 1, сформулированные в пп. 2 и 3.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем соотношение (i). Перепишем T_N в терминах $Y_{i:N}$ — порядковых статистик, соответствующих выборке $Y_1, \dots, Y_N$ с эмпирической функцией распределения G_N . Определим биномиальные случайные величины $N_\nu = \#\{i: X_i \leq \xi_\nu\} = \#\{i: Y_i \leq \eta_\nu\}$, $\nu = \alpha, \beta$. Пусть $\eta_{\nu N:N} = G_N^{-1}(\nu)$ обозначает ν -ю выборочную квантиль, $\nu = \alpha, \beta$. Тогда мы можем написать

$$(\beta - \alpha)T_N = -A \frac{N_\alpha - \alpha N}{N} \mathbb{I}\{N_\alpha \geq \alpha N\} + (\beta - \alpha)T_N(Y) + B \frac{\beta N - N_\beta}{N} \mathbb{I}\{N_\beta \leq \beta N\}, \quad (4.1)$$

где $\mathbb{I}(E)$ обозначает индикатор события E и

$$(\beta - \alpha)T_N(Y) = -\frac{\alpha N - [\alpha N]}{N} \eta_{\alpha N:N} + \frac{1}{N} \sum_{i=[\alpha N]+1}^{[\beta N]} Y_{i:N} + \frac{\beta N - [\beta N]}{N} \eta_{\beta N:N}.$$

Рассмотрим среднее независимых одинаково распределенных величин W_i :

$$\bar{W}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i = \frac{N_\alpha}{N} \eta_\alpha + \frac{1}{N} \sum_{i=N_\alpha+1}^{N_\beta} Y_{i:N} + \frac{N - N_\beta}{N} \eta_\beta,$$

$$\mathbf{E} \bar{W}_N = \mu_W \text{ (см. (2.4)).}$$

Имеем

$$\begin{aligned} & (\beta - \alpha)(T_N(Y) - \mu(\alpha, \beta)) - (\bar{W}_N - \mu_W) \\ &= -\frac{\alpha N - [\alpha N]}{N} (\eta_{\alpha N:N} - \eta_\alpha) + \frac{\beta N - [\beta N]}{N} (\eta_{\beta N:N} - \eta_\beta) \\ &+ S_{\alpha,N} - S_{\beta,N}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$S_{\nu,N} = \frac{\text{sign}(N_\nu - [\nu N])}{N} \sum_{i=(\lfloor \nu N \rfloor \wedge N_\nu)+1}^{N_\nu \vee [\nu N]} (Y_{i:N} - \eta_\nu), \quad \text{sign } 0 = 0,$$

$\nu = \alpha, \beta$. Очевидно, что $N^{1/2}|S_{\nu,N}| \leq N^{-1/2}|N_\nu - [\nu N]|(|\eta_{\nu N:N} - \eta_\nu| \vee |Y_{N_\nu:N} - \eta_\nu|)$.

Так как случайная величина $|N_\nu - [\nu N]|/N^{1/2}$ ограничена по вероятности и $\eta_{\nu N:N} - \eta_\nu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, $Y_{N_\nu:N} - \eta_\nu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ (поскольку инверсия G^{-1} функции распределения случайной величины Y_i непрерывна в точках α и β), мы получаем следующее соотношение:

$$N^{1/2}(\beta - \alpha)(T_N(Y) - \mu(\alpha, \beta)) = N^{1/2}(\bar{W}_N - \mu_W) + o_{\mathbf{P}}(1). \quad (4.3)$$

Определим случайные величины $Z_{1,N} = N^{-1/2}(N_\alpha - \alpha N)$, $Z_{2,N} = N^{1/2}(\bar{W}_N - \mu_W)$, $Z_{3,N} = N^{-1/2}(\beta N - N_\beta)$. Тогда из (4.1) и (4.3) вытекает

$$N^{1/2}(\beta - \alpha)(T_N - \mu(\alpha, \beta)) = -A(0 \vee Z_{1,N}) + Z_{2,N} + B(0 \vee Z_{3,N}) + o_{\mathbf{P}}(1).$$

Случайный вектор $(Z_{1,N}, Z_{2,N}, Z_{3,N})$ имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу $\mathbf{C}$ для каждого N , и из центральной предельной теоремы для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин следует (i).

Мы будем доказывать соотношения (ii) и (ii') одновременно, и наше доказательство будет основано на тех же аргументах, что и выше, адаптированных к бутстреп-пространству. Введем вспомогательные случайные величины

$$Y_i^* = \begin{cases} X_i^* + A, & X_i^* \leq \xi_\alpha, \\ X_i^*, & \xi_\alpha < X_i^* \leq \xi_\beta, \\ X_i^* - B, & \xi_\beta < X_i^*, \end{cases} \quad i = 1, \dots, M, \quad (4.4)$$

которые представляют собой бутстреп-выборку из $Y_1, \dots, Y_N$. Пусть $Y_{i:M}^*$ обозначают соответствующие порядковые статистики, $\eta_{\nu M:M}^*$ — ν -ю бутстрепированную квантиль, $\nu = \alpha, \beta$.

Обозначим $M_\nu^* = \#\{i: X_i^* \leq \xi_\nu, i = 1, \dots, M\}$, $\nu = \alpha, \beta$. Тогда мы можем переписать $T_{N,M}^*$ в терминах $Y_{i:M}^*$:

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)T_{N,M}^* &= -A \frac{M_\alpha^* - \alpha M}{M} \mathbb{I}\{M_\alpha^* \geq \alpha M\} + (\beta - \alpha)T_{N,M}^*(Y) \\ &\quad + B \frac{\beta M - M_\beta^*}{M} \mathbb{I}\{M_\beta^* \leq \beta M\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)T_{N,M}^*(Y) &= -\frac{\alpha M - [\alpha M]}{M} \eta_{\alpha M:M}^* + \frac{1}{M} \sum_{i=[\alpha M]+1}^{[\beta M]} Y_{i:M}^* \\ &\quad + \frac{\beta M - [\beta M]}{M} \eta_{\beta M:M}^*. \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$M^{1/2}(\beta - \alpha)(T_{N,M}^*(Y) - T_N) = M^{1/2}(\beta - \alpha)(T_{N,M}^*(Y) - T_N(Y)) + R_{N,M}, \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} R_{N,M} &= M^{1/2}(\beta - \alpha)(T_N(Y) - T_N) \\ &= M^{1/2}A \max\left(0, \frac{N_\alpha - \alpha N}{N}\right) - M^{1/2}B \max\left(0, \frac{\beta N - N_\beta}{N}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

(см. (4.1)). Заметим, что случайная величина $N^{-1/2}(\nu N - N_\nu)$ ($\nu = \alpha, \beta$) ограничена сверху по вероятности $\mathbf{P}$ и, поскольку $(M/N)^{1/2}$ стремится к нулю, $R_{N,M}$ стремится к нулю по вероятности $\mathbf{P}$ — этот факт будет использоваться при доказательстве (ii). Кроме того, заметим, что $(\nu N - N_\nu)/(N \ln \ln N)^{1/2}$ ограничено $\mathbf{P}$ -п.н., и если $((M \ln \ln N)/N)^{1/2}$ стремится к нулю, то $R_{N,M}$ стремится к нулю $\mathbf{P}$ -п.н., что мы будем использовать для доказательства (ii').

Рассмотрим Y_i^* , уинсоризованные вне $(\eta_{\alpha N:N}, \eta_{\beta N:N}]$: $W_i^* = \eta_{\alpha N:N} \vee (Y_i^* \wedge \eta_{\beta N:N})$, $i = 1, \dots, M$, и положим $N_\nu^* = \#\{i: Y_i^* \leq \eta_{\nu N:N}, i = 1, \dots, M\}$, $\nu = \alpha, \beta$. Определим среднее $\bar{W}_{N,M}^*$, его математическое ожидание вычисляется по формуле

$$\mathbf{E}^* \bar{W}_{N,M}^* = \frac{[\alpha N]}{N} \eta_{\alpha N:N} + \frac{1}{N} \sum_{i=[\alpha N]+1}^{[\beta N]} Y_{i:N} + \frac{N - [\beta N]}{N} \eta_{\beta N:N}.$$

Тогда мы получаем (см. правую часть (4.6)), что

$$\begin{aligned} &(\beta - \alpha)(T_{N,M}^*(Y) - T_N(Y)) - (\bar{W}_{N,M}^* - \mathbf{E}^* \bar{W}_{N,M}^*) \\ &= -\frac{\alpha M - [\alpha M]}{M} (\eta_{\alpha M:M}^* - \eta_{\alpha N:N}) \\ &\quad + \frac{\beta M - [\beta M]}{M} (\eta_{\beta M:M}^* - \eta_{\beta N:N}) + (S_{\alpha,M}^* - S_{\beta,M}^*), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$S_{\nu,M}^* = \frac{\text{sign}(N_\nu^* - [\nu M])}{M} \sum_{i=([\nu M] \wedge N_\nu^*)+1}^{N_\nu^* \vee [\nu M]} (Y_{i:M}^* - \eta_{\nu N:N}), \quad \nu = \alpha, \beta,$$

и мы имеем следующую оценку:

$$M^{1/2}|S_{\nu,M}^*| \leq \frac{|N_\nu^* - [\nu M]|}{M^{1/2}} \left(|\eta_{\nu M:M}^* - \eta_{\nu N:N}| \vee |Y_{N_\nu^*:M}^* - \eta_{\nu N:N}| \right). \quad (4.9)$$

Так как $|N_\nu^* - [\nu M]|/M^{1/2}$ ограничено по $\mathbf{P}^*$ -вероятности $\mathbf{P}$ -п.н. и $\eta_{\nu M:M}^* - \eta_{\nu N:N} \xrightarrow{\mathbf{P}^*} 0$, $Y_{N_\nu^*:M}^* - \eta_{\nu N:N} \xrightarrow{\mathbf{P}^*} 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. (поскольку обратная функция G^{-1}

непрерывна в точках α и β , см. [7]), мы получаем

$$\begin{aligned} & M^{1/2}(\beta - \alpha)(T_{N,M}^* - T_N) \\ &= M^{1/2}(\bar{W}_{N,M}^* - \mathbf{E}^* \bar{W}_{N,M}^*) - A \max \left(0, \frac{M_\alpha^* - \alpha M}{M^{1/2}} \right) \\ &+ B \max \left(0, \frac{\beta M - M_\beta^*}{M^{1/2}} \right) + R_{N,M} + R_{N,M}^*, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $R_{N,M}^* \xrightarrow{\mathbf{P}^*} 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. (см. (4.8), (4.9)), $R_{N,M}$ — то же, что и в (4.7).

Определим случайные величины $Z_{1,M}^* = M^{-1/2}(N_\alpha^* - \alpha M)$, $Z_{2,M}^* = M^{1/2}(\bar{W}_{N,M}^* - \mathbf{E}^* \bar{W}_{N,M}^*)$, $Z_{3,M}^* = M^{-1/2}(\beta M - N_\beta^*)$. Тогда из (4.10) следует

$$\begin{aligned} & M^{1/2}(\beta - \alpha)(T_{N,M}^* - T_N) \\ &= -A \max \left(0, Z_{1,M}^* + \frac{M_\alpha^* - N_\alpha^*}{M^{1/2}} \right) + Z_{2,M}^* \\ &+ B \max \left(0, Z_{3,M}^* + \frac{N_\beta^* - M_\beta^*}{M^{1/2}} \right) + R_{N,M} + R_{N,M}^*. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Случайный вектор $(Z_{1,M}^*, Z_{2,M}^*, Z_{3,M}^*)$ сходится по бутстреп-распределению к $\mathcal{N}(\mathbb{O}, \mathbb{C})$ (где $\mathbb{C}$ — ковариационная матрица, определенная в (2.5)) $\mathbf{P}$ -п.н., когда $N \wedge M \rightarrow \infty$ (см. [1]); остаточный член $R_{N,M} + R_{N,M}^*$ стремится к нулю по $\mathbf{P}^*$ -вероятности на множестве $\mathbf{P}$ -вероятности $1 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, когда $M/N \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$, и он стремится к нулю $\mathbf{P}$ -п.н., когда $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$ (см. аргументы, приведенные после (4.7)).

Остается заметить, что условно (при данных $X_1, \dots, X_N$) случайные величины $|M_\nu^* - N_\nu^*|$, $\nu = \alpha, \beta$, имеют биномиальное распределение с параметрами $(|N_\nu - \lfloor \nu N \rfloor|/N, M)$, и применение неравенства Чебышёва дает

$$\frac{|M_\nu^* - N_\nu^*|}{M^{1/2}} = \frac{|N_\nu - \lfloor \nu N \rfloor|}{N} M^{1/2} + r_{N,M}^* = \frac{|N_\nu - \lfloor \nu N \rfloor|}{N^{1/2}} \left(\frac{M}{N} \right)^{1/2} + r_{N,M}^*,$$

где $r_{N,M}^* = o_{\mathbf{P}^*}(1)$ $\mathbf{P}$ -п.н., а первое слагаемое в правой части стремится к нулю по $\mathbf{P}^*$ -вероятности на множестве $\mathbf{P}$ -вероятности $1 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, когда $M/N \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$ (что влечет за собой (ii)), и $\mathbf{P}$ -п.н., когда $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$ (что влечет за собой (ii')). Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 1. Мы начнем доказательство с соотношения (4.10), из которого непосредственно следует

$$\begin{aligned} & M^{1/2}(\beta - \alpha) \mathbf{E}^*(T_{N,M}^* - T_N) \\ &= -A \mathbf{E}^* \max \left(0, \frac{M_\alpha^* - \alpha M}{M^{1/2}} \right) \\ &+ B \mathbf{E}^* \max \left(0, \frac{\beta M - M_\beta^*}{M^{1/2}} \right) + R_{N,M} + \mathbf{E}^* R_{N,M}^*, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $R_{N,M}$ сходится к нулю по $\mathbf{P}$ -вероятности, когда $M \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$, и $\mathbf{P}$ -п.н., если $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$ (см. доказательство теоремы 1).

Теперь заметим, что $R_{N,M}^* \xrightarrow{\mathbf{P}^*} 0$ $\mathbf{P}$ -п.н., когда $N \wedge M \rightarrow \infty$. Так как случайная величина $R_{N,M}^*$ равномерно интегрируема (см. [4]), поскольку она имеет конечную дисперсию (по мере $\mathbf{P}^*$) $\mathbf{P}$ -п.н., то мы можем заключить, что $\mathbf{E}^* R_{N,M}^* \rightarrow 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. при $N \wedge M \rightarrow \infty$. Наконец заметим, что случайные величины $(M_\alpha^* - \alpha M)/M^{1/2}$ и $(\beta M - M_\beta^*)/M^{1/2}$ стремятся по бутстреп-распределению к случайным величинам Z_1 и Z_3 соответственно, по $\mathbf{P}$ -вероятности, если $M \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$, и $\mathbf{P}$ -п.н., если $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$. Остается заметить, что функция $f(x) = \max(0, x)$ непрерывна, и так как случайные величины $(M_\alpha^* - \alpha M)/M^{1/2}$ и $(\beta M - M_\beta^*)/M^{1/2}$ имеют конечные дисперсии $\mathbf{P}$ -п.н., то они равномерно интегрируемы. Таким образом, мы можем заключить, что (см. (4.12)) $M^{1/2} \mathbf{E}^*(T_{N,M}^* - T_N) \rightarrow \mathbf{E} Z$ по $\mathbf{P}$ -вероятности, если $M \rightarrow \infty$, $M/N \rightarrow 0$, и $\mathbf{P}$ -п.н., если $(M \ln \ln N)/N \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$.

Доказательство второго соотношения в (3.2) аналогично. Утверждение доказано.

5. Численный пример. В этом пункте мы дополняем наши результаты моделированием. Мы рассматриваем пример, где исходное распределение является равномерным на множестве $S = [-9, -5] \cup [-4, 4] \cup [23, 27]$, т.е. имеет плотность $f(x) = 1/16$, $x \in S$, и $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus S$.

Возьмем $\alpha = 1 - \beta = 0.25$, тогда теоретическое усеченное среднее $\mu(\alpha, \beta)$ равно нулю (см. (1.3)), $\xi_\alpha = -5$, $\eta_\alpha = -4$, $\xi_\beta = \eta_\beta = 4$, $A = 1$, $B = 19$. Мы $K = 10^6$ раз производим выборку объема $N = 1000$ из распределения «наблюдаемой» случайной величины и каждый раз вычисляем значение $N^{-1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta))$. В результате мы получаем выборку Монте-Карло объема K для этой статистики. Затем на базе одной выборки объема N из исходной функции распределения мы осуществляем бутстреп-моделирование и получаем выборки Монте-Карло объема 10^5 для случайной величины $M^{-1/2}(T_{N,M}^* - T_N)$ при $M = N = 1000$, $M = N/5 = 200$ и $M = N/20 = 50$. Наконец, мы производим выборку Монте-Карло из распределения случайной величины Z , используя K независимых реализаций нормально распределенного случайного вектора (Z_1, Z_2, Z_3) с данной ковариационной матрицей $\mathbb{C}$ (см. (2.5)), и применяем формулу (2.6), чтобы получить значение Z .

На рис. 1 представлены графики эмпирических плотностей. Мы выводим график гистограммы (ступенчатая линия), соответствующей выборке Монте-Карло для $N^{-1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta))$. Затем мы рисуем график плотности нормального закона $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, где a и σ^2 вычислены как эмпирические среднее и дисперсия по выборке Монте-Карло случайной величины $N^{-1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta))$. Наконец, мы выводим три гисто-

граммы (сглаженные сплайнами), соответствующие выборкам Монте-Карло предельной случайной величины Z и бутстреп-случайной величины $M^{-1/2}(T_{N,M}^* - T_N)$ с $M = N = 1000$ и $M = N/20 = 50$.

На рис. 2 представлены графики отклонений: функция распределения F_Z минус истинная функция распределения случайной величины $N^{-1/2}(T_N - \mu(\alpha, \beta))$, где значения как F_Z (функции распределения предельной случайной величины Z), так и истинной функции распределения вычислены на основе соответствующих выборок Монте-Карло объема $K = 10^6$. Кроме того, мы рисуем здесь графики отклонений: функция распределения случайной величины $M^{-1/2}(T_{N,M}^* - T_N)$ минус истинная функция распределения, где $M_1 = N = 1000$, $M_2 = N/5 = 200$, $M_3 = N/20 = 50$.

Моделирование подтверждает и иллюстрирует наш результат: мы видим, что нормальная аппроксимация и простой ($M = N$) бутстреп не состоятельны в общей ситуации, когда инверсия F^{-1} исходной функции распределения имеет скачок хотя бы в одной из точек α и β ; и мы видим также, что $M \ll N$ -бутстреп исправляет некорректность классического бутстрепа Эфрона.

Возьмем $1 - p = 0.95$ в качестве номинальной доверительной вероятности. В процессе моделирования мы получаем следующие результаты для параметра $\mu(\alpha, \beta) = 0$: $T_N = 0.0101$, 95-процентный доверительный интервал, основанный на точной функции распределения, полученный с использованием 10^6 выборок Монте-Карло объемом 1000: $[-1.2717, 0.4736]$. Кроме того, для $M = N = 1000$, $M = N/5 = 200$, $M = N/20 = 50$ мы получаем оценки величины $T_N - N^{-1/2} \mathbf{E} \widehat{Z}$, равные соответственно -0.0307 , -0.1008 , -0.1444 ; соответствующие 95-процентные $M \ll N$ -бутстреп-доверительные интервалы (определенные в (3.3)): $[-0.8148, 0.4487]$, $[-1.1343, 0.4592]$, $[-1.3368, 0.4510]$; их истинные (вычисленные методом Монте-Карло) доверительные вероятности равны 0.8590, 0.9290, 0.9490 соответственно.

Отметим, что если F^{-1} непрерывна в точках α и β (т.е. $A = B = 0$, что является необходимым и достаточным условием асимптотической нормальности усеченного среднего [12]), то $G \equiv F$, $Y_i = X_i$, $i = 1, \dots, N$ (см. (2.1)), $Y_j^* = X_j^*$, $j = 1, \dots, M$ (см. (4.4)), и предельное распределение в теореме 1 — нормальное с асимптотической дисперсией $(\beta - \alpha)^2 \sigma_W^2$ (см. (2.4), (2.5)); в этом случае оценка подстановки эмпирической функции распределения для асимптотической дисперсии состоятельна (см. [6], [7]), так же как и ее $M \neq N$ -бутстреп-версия (M и N изменяются независимо, $N \wedge M \rightarrow \infty$). Таким образом, $M \neq N$ -бутстреп и нормальная аппроксимация работают корректно (при выполненных необходимых и достаточных условиях Стиглера) как для усеченного среднего, так и для студентизованного усеченного среднего, когда $N \wedge M \rightarrow \infty$.

Рис. 1. Поведение плотностей.

Рис. 2. Отклонения функций распределения.

В заключение заметим, что совершенно иной путь приближения функции распределения усеченного среднего состоит в использовании седловых аппроксимаций. На хвостах распределения эти аппроксимации будут, по-видимому, работать лучше, чем $M \ll N$ -бутстреп-аппроксимация, рассмотренная в настоящей статье. Недавно эти седловые аппроксимации при соответствующих условиях были получены для усеченного среднего и студентизованного усеченного среднего. Для детального ознакомления мы отсылаем к [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bickel P. J., Freedman D. A.* Some asymptotic theory for the bootstrap. — *Ann. Statist.*, 1981, v. 9, № 6, p. 1196–1217.
2. *Bickel P. J., Götze F., van Zwet W. R.* Resampling fewer than n observations: gains, losses, and remedies for losses. — *Statist. Sinica*, 1997, v. 7, № 1, p. 1–31.
3. *Bickel P. J., Sakov A.* Extrapolation and the bootstrap. — *Sankhyā Ser. A*, 2002, v. 64, № 3, p. 640–652.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
5. *Csörgő S., Haeusler E., Mason D. M.* The asymptotic distribution of trimmed sums. — *Ann. Probab.*, 1988, v. 16, № 2, p. 672–699.
6. *Gribkova N. V., Helmers R.* The empirical Edgeworth expansion for a Studentized trimmed mean. — *Math. Methods Statist.*, 2006, v. 15, № 1, p. 61–87.
7. *Gribkova N. V., Helmers R.* On the Edgeworth expansion and the M out of N bootstrap accuracy for a Studentized trimmed mean. — *Math. Methods Statist.*, 2007, v. 16, № 2, p. 142–176.
8. *Hall P., Padmanabhan A. R.* On the bootstrap and the trimmed mean. — *J. Multivariate Anal.*, 1992, v. 41, № 1, p. 132–153.
9. *Хампель Ф. Р., Рончетти Э. М., Рассеу П. Д., Штаэль В. А.* Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989, 512 с.
10. *Helmers R., Jing B.-Y., Qin G., Zhou W.* Saddlepoint approximations to the trimmed mean. — *Bernoulli*, 2004, v. 10, № 3, p. 465–501.
11. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984, 303 с.
12. *Stigler S. M.* The asymptotic distribution of the trimmed mean. — *Ann. Statist.*, 1973, v. 1, p. 472–477.

Поступила в редакцию
21.XI.2007

Исправленный вариант
11.VI.2008