Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Бабилуа, И. Бокучава, Б. Дочвири, Задача оптимальной остановки для схемы Калмана–Бьюси, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 1, 133–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:08:24

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2010 г. БАБИЛУА П.*, БОКУЧАВА И.*, ДОЧВИРИ Б.*

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ ДЛЯ СХЕМЫ КАЛМАНА–БЬЮСИ

Задача оптимальной остановки по неполным данным в схеме Калмана–Бьюси сводится к задаче оптимальной остановки по полным данным. В случае непрерывной функции выигрыша доказано, что сходимость цен, имеет порядок $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, когда малые параметры возмущения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ наблюдаемого процесса стремятся к нулю.

Ключевые слова и фразы: частично наблюдаемый случайный процесс, функция выигрыша, цена, момент остановки, редукция, сходимость.

1. Введение. Рассмотрим следующую систему частично наблюдаемых случайных процессов в схеме Калмана–Бьюси:

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t]dt + b_1(t)dW_1(t) + b_2(t)dW_2(t), \quad (1)$$

$$d\xi_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = [A_0(t) + A_1(t)\theta_t + A_2(t)\xi_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}]dt + \varepsilon_1 dW_1(t) + \varepsilon_2 dW_2(t), \quad (2)$$

где коэффициенты $a_i(t)$, $i = 0, 1$, $b_j(t)$, $j = 1, 2$, $A_k(t)$, $k = 0, 1, 2$, — измеримые неслучайные функции, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$ — постоянные, $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — независимые винеровские процессы. Предполагается, что процесс θ_t — ненаблюдаемый, а процесс $\xi_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ — наблюдаемый и $A_1(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq T < \infty$ (см. [1]).

Рассмотрим непрерывную функцию выигрыша $g(t, x)$, $-\infty < x < \infty$, на отрезке $[0, T]$ и введем цены

$$s_T^0 = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^\theta} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \quad (3)$$

$$s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \quad (4)$$

где, как обычно, для случайного процесса $Y = (Y_t, \mathcal{F}_t^Y)$ мы обозначаем $\mathfrak{M}_T^Y$ класс всех моментов остановки относительно семейства σ -алгебр $\mathbb{F}^Y = (\mathcal{F}_t^Y)$ с $\mathcal{F}_t^Y = \sigma\{Y_s, s \leq t\}$, $0 \leq t \leq T < \infty$ (см. [1]).

Заметим, что выплата s_T^0 соответствует задаче оптимальной остановки по полным данным для процесса θ_t , тогда как выплата $s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ соответствует той же задаче

---

* Тбилисский государственный университет им. И.Джавахишвили, факультет точных и естественных наук, ул. Университетская, 2, 0143 Тбилиси, Грузия; e-mail: p.babilua@yahoo.com, petre.babilua@tsu.ge, ia.bokuchava@tsu.ge, besarion.dochviri@tsu.ge

с неполными данными. При этих предположениях мы изучаем, наряду с фундаментальными задачами отыскания выплат и оптимальных моментов остановки (см. [2]), следующие задачи.

Первая задача (задача редукции) заключается в сведении задачи оптимальной остановки по неполным данным для процесса θ_t к задаче оптимальной остановки для некоторого полностью наблюдаемого процесса. Вторая (фундаментальная) задача — доказательство сходимости выплат $s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ к выплате s_T^0 при $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ (см. [3], [4]).

В настоящей статье показывается, что скорость сходимости выплат имеет порядок $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Заметим также, что мы используем уравнения фильтрации для условного математического ожидания и условной дисперсии

$$\begin{aligned} m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \mathbf{E}(\theta_t | \mathcal{F}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}), \quad m_0^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0, \\ \gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \mathbf{E}(\theta_t - m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^2, \quad \gamma_0^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sigma\{\xi_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, 0 \leq s \leq t\}$, $0 \leq t \leq T$ (см. [1]).

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Главную роль в доказательстве скорости сходимости выплат играет оценка условной дисперсии $\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ через малые параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Напомним, что $\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (см. [1])

$$\dot{\gamma}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 2a_1(t)\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + b_1^2(t) + b_2^2(t) - \frac{A_1^2(t)(\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad (5)$$

с начальным условием $\gamma_0^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0$.

Пусть $\rho(t)$ — возрастающая непрерывная мажоранта для

$$\varphi_t = \left| \frac{\sqrt{b_1^2(t) + b_2^2(t)}}{A_1(t)} \right| \Phi_t^{-2}, \quad (6)$$

где детерминированная функция Φ_t определяется посредством равенства

$$\Phi_t = \exp \left\{ \int_0^t a_1(s) ds \right\}.$$

Предположим также, что выполнено следующее условие:

$$b_1^2(t) + b_2^2(t) \geq c > 0. \quad (7)$$

Теорема 1. *Предположим, что $\rho(t)$ — возрастающая непрерывная функция и $\rho(t) \geq \varphi(t)$. Тогда:*

1) *при всех $0 \leq t \leq T$ справедлива оценка*

$$\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \Phi_t^2 \rho(t); \quad (8)$$

2) *если выполнено условие (7), то при всех $0 < t \leq T$*

$$\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0. \quad (9)$$

Доказательство. Введем функцию $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ с помощью следующего преобразования:

$$\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \Phi_t^2 u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что функция $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{u}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} A_1^2(t) \Phi_t^2 \left[\left(\frac{\sqrt{b_1^2(t) + b_2^2(t)} \Phi_t^{-2}}{A_1(t)} \right)^2 - (u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^2 \right] \quad (11)$$

с начальным условием $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0$.

Покажем, что $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq \rho(t)$, $0 \leq t \leq T$. Предположим противное. Тогда, очевидно, существуют точки t_0 и t_1 , $t_0 < t_1$, такие, что $u_{t_0}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \rho(t_0)$ и $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > \rho(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$. Из (11) следует, что при $t \in [t_0, t_1]$

$$\dot{u}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} A_1^2(t) \Phi_t^2 [\rho^2(t) - (u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^2] < 0.$$

Поэтому $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} < u_{t_0}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \rho(t_0) \leq \rho(t)$, т.е. $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} < \rho(t)$, что противоречит нашему предположению.

Итак, $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq \rho(t)$, $0 \leq t \leq T$, откуда, принимая во внимание уравнение (1), мы получаем оценку (8).

Мы докажем, что $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$ при $t > 0$, а это в свою очередь и будет означать выполнение неравенства (9).

В силу условия (7) имеем

$$\dot{u}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} (b_1^2(0) + b_2^2(0)) > 0.$$

Следовательно, существует окрестность точки $t = 0$, в которой выполнено неравенство $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$. Пусть t_0 — первая точка после нуля такая, что $u_{t_0}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0$. Из (11) следует, что

$$\dot{u}_{t_0}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \Phi_{t_0}^2 (b_1^2(t_0) + b_2^2(t_0)) > 0.$$

Поэтому функция $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ является строго возрастающей в точке t_0 и должна быть отрицательной в левой окрестности этой точки, что невозможно по определению t_0 . Таким образом, $u_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$ при $t > 0$, и тем самым оценка (9) установлена. Теорема 1 доказана.

Представим случайные процессы θ_t и $m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ в виде

$$\theta_t = \Phi_t \left[\int_0^t \Phi_s^{-1} a_0(s) ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} \sqrt{b_1^2(s) + b_2^2(s)} d\bar{W}_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \right], \quad (12)$$

$$m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \Phi_t \left[\int_0^t \Phi_s^{-1} a_0(s) ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} \frac{A_1(s) \gamma_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} d\bar{W}_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \right], \quad (13)$$

где так называемый обновляющий винеровский процесс $\bar{W}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ определяется формулой (см. [1])

$$\bar{W}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \int_0^t \frac{d\xi_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - [A_0(s) + A_1(s)m_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}] ds}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}. \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$H_t = \Phi_t \int_0^t \Phi_s^{-1} a_0(s) ds, \quad (15)$$

$$h(t) = \int_0^t \Phi_s^{-2} (b_1^2(s) + b_2^2(s)) ds, \quad (16)$$

$$h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t) = \int_0^t \Phi_s^{-2} \left(\frac{A_1(s) \gamma_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \right)^2 ds, \quad (17)$$

$$n_t = \int_0^t \Phi_s^{-1} \sqrt{b_1^2(s) + b_2^2(s)} d\bar{W}_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \quad (18)$$

$$n_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \int_0^t \Phi_s^{-1} \frac{A_1(s) \gamma_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} d\bar{W}_s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}. \quad (19)$$

Используя (15), (18) и (19), соотношения (12) и (13) можно переписать в виде

$$\theta_t = H_t + \Phi_t n_t, \quad (20)$$

$$m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = H_t + \Phi_t n_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}. \quad (21)$$

Из формул (12) и (13) и равенства

$$\mathbf{E}(\theta_t - m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \mathbf{E}(\theta_t^2 | \mathcal{F}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - [\mathbf{E}(\theta_t | \mathcal{F}_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})]^2$$

немедленно следует, что

$$\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \Phi_t^2 [h(t) - h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t)]. \quad (22)$$

Везде в дальнейшем предполагается выполненным условие (7). Поскольку при $t > 0$ верно неравенство $\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$, мы заключаем, что $h(t) > h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t)$ при $t > 0$ и что функции $h(t)$ и $h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t)$ строго возрастающие.

Далее, обозначим

$$\ell = \exp \left\{ 2 \int_0^T |a_1(s)| ds \right\} \rho(T). \quad (23)$$

Теорема 2. Пусть $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ определяется формулой $h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(T) = h(T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$. Тогда выполнено неравенство

$$\sup_{t \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} |h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t)) - t| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c}, \quad (24)$$

где константа $c > 0$ определяется из условия (7).

Доказательство. Рассмотрим две строго возрастающие непрерывные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ на $[a, b] \subseteq [0, T]$. Пусть A обозначает пересечение областей их значений. Предположим, что множество A непусто и $f_1^{-1}(s) \neq f_2^{-1}(s)$, $s \in A$.

Кроме того, предположим, что функция $f_1(t)$ дифференцируема и

$$\inf_{t \in [a, b]} f_1'(t) > 0.$$

Тогда выполнено неравенство

$$\sup_{s \in A} |f_1^{-1}(s) - f_2^{-1}(s)| \leq \frac{1}{\inf_{t \in [a, b]} f_1'(t)} \sup_{t \in [a, b]} |f_2(t) - f_1(t)|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} |h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t)) - t| &= \sup_{t \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} |h^{-1}(h(t)) - h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t))| \\ &\leq \frac{1}{\inf_{t \leq T} h'(t)} \sup_{t \leq T} |h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t) - h(t)|. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \Phi_t^{-2} [b_1^2(t) + b_2^2(t)] \geq \Phi_t^{-2} c, \\ h(t) - h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t) &= \Phi_t^{-2} \gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho(t). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{\inf_{t \leq T} h'(t)} \leq \exp \left\{ 2 \int_0^T |a_1(s)| ds \right\} c^{-1}.$$

Учитывая последние соотношения, из неравенства (25) выводим оценку (24):

$$\sup_{t \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} |h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t)) - t| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \exp \left\{ 2 \int_0^T |a_1(s)| ds \right\} c^{-1} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c}.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что при $t = T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ выражение $h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t)) - t$ равно $T - T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ и поэтому из (24) имеем

$$T - T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c}. \quad (26)$$

Определим класс Δ функций $\delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t))$, $0 \leq t \leq T$, где $\delta_1(t)$ — неотрицательная непрерывная возрастающая функция и $\delta_2(t)$ — неотрицательная непрерывная функция такие, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и для всех $0 \leq t \leq T$

$$|\delta_1(t) - t| \leq \varepsilon_0 \frac{\ell}{c}, \quad \delta_2(t) \leq \varepsilon_0 \ell. \quad (27)$$

Пусть далее η — стандартная нормальная случайная величина, не зависящая от $\xi_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Для любой функции δ из класса Δ определим процесс θ_t^δ формулой

$$\theta_t^\delta = H_{\delta_1(t)} + \Phi_{\delta_1(t)} n_t + \eta \sqrt{\delta_2(t)}. \quad (28)$$

Теорема 3. Пусть для любой функции δ из класса Δ выполнено условие

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |g(\delta_1(t), \theta_t^\delta)| < \infty. \quad (29)$$

Тогда при $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$ соотношение

$$\mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau) = \mathbf{E} g(\tau, m_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) \quad (30)$$

справедливо для любого момента остановки $\tau \in \mathfrak{M}_T^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$.

Доказательство. По моменту остановки $\tau \in \mathfrak{M}_T^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$ построим моменты остановки $\tau_n \in \mathfrak{M}_T^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$ следующим образом:

$$\tau_n = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{если } \frac{k-1}{2^n} \leq \tau \leq \frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} < T, \quad k = 1, 2, \dots, \\ T & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что τ_n принимает лишь конечное число значений. Поскольку $\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$, $0 < t \leq T$, при $t > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(t, \theta_t) | \mathcal{F}_t^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}} \exp \left\{ -\frac{(x - m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^2}{2\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + y \sqrt{\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) e^{-y^2/2} dy \\ &= \mathbf{E} \left[g(t, m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) \middle| \mathcal{F}_t^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \right], \end{aligned}$$

где мы сначала сделали замену переменной $y = (x - m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) / \sqrt{\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$, а затем воспользовались независимостью случайной величины η от σ -алгебры $\mathcal{F}_t^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$. Из последнего равенства и в силу свойств условного математического ожидания получаем

$$\mathbf{E} [g(\tau_n, \theta_{\tau_n}) | \mathcal{F}_{\tau_n}^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}] = \mathbf{E} \left[g(\tau_n, m_{\tau_n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_{\tau_n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) \middle| \mathcal{F}_{\tau_n}^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \right]. \quad (31)$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} g(\tau_n, \theta_{\tau_n}) = \mathbf{E} g(\tau_n, m_{\tau_n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_{\tau_n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}). \quad (32)$$

Рассмотрим величины

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |g(t, \theta_t)|, \quad \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |g(t, m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}})| \quad (33)$$

и покажем, что они конечны. Это даст возможность перейти в (32) к пределу при $n \rightarrow \infty$, и тем самым теорема 3 будет доказана.

Конечность первого математического ожидания в (33) становится очевидной, если в (29) взять $\delta_1(t) = 0$, $\delta_2(t) = 0$.

Пусть $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$. Покажем, что второе математическое ожидание в (33) также конечно. Для этого рассмотрим преобразование $t = h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))$, $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \leq T} \left| g(t, m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) \right| \\ &= \sup_{u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \left| g\left(h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u)), m_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Далее, выберем функции $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \begin{cases} h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t)), & \text{если } t \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \\ T, & \text{если } T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq t \leq T, \end{cases} \\ \delta_2(t) &= \begin{cases} \gamma_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(t))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, & \text{если } t \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \\ \gamma_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, & \text{если } T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

При $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ из (8) и (24) мы получаем неравенства

$$|\delta_1(t) - t| \leq \varepsilon_0 \frac{\ell}{c}, \quad \delta_2(t) \leq \varepsilon_0 \ell, \quad t \leq T.$$

Таким образом, функции $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ принадлежат определенному выше классу Δ . Обозначим

$$\tilde{n}_u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = n_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \quad u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

При $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ имеем

$$\begin{aligned} m_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} &= m_{\delta_1(u)}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\delta_2(u)} \\ &= H_{\delta_1(u)} + \Phi_{\delta_1(u)} \tilde{n}_u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\delta_2(u)}. \end{aligned}$$

Заметим, что процессы $\tilde{n}_u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, и n_u , $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, имеют одинаковые распределения, поскольку они являются непрерывными процессами с независимыми приращениями и их приращения на интервале $[u_1, u_2]$ нормально распределены со средним нуль и дисперсией $h(u_2) - h(u_1)$. Отсюда очевидным образом следует, что процесс

$$H_{\delta_1(u)} + \Phi_{\delta_1(u)} \tilde{n}_u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\delta_1(u)}, \quad u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2},$$

имеет то же самое распределение, что и процесс

$$\theta_u^\delta = H_{\delta_1(u)} + \Phi_{\delta_1(u)} n_u + \eta \sqrt{\delta_1(u)}, \quad u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

Ввиду условия (29) мы получаем, что

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} \left| g(t, m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}) \right| = \mathbf{E} \sup_{t \leq T} \left| g(\delta_1(t), \theta_t^\delta) \right| < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

3. Основной результат.

Теорема 4. Пусть функция $g(t, x)$ имеет непрерывные производные $g'_t(t, x)$, $g'_x(t, x)$, $g''_{xx}(t, x)$ и выполнено условие (29). Тогда при $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} 0 \leq s_T^0 - s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \left\{ \sup_{t \leq T} \mathbf{E} |Lg(t, \theta_t)| \right. \\ &+ \sup_{\delta} \mathbf{E} \sup_{\substack{t \leq T, \\ 0 \leq u \leq 1}} \left| g'_t(t + u(\delta_1(t) - t), \theta_t^\delta) \right| + \mathbf{E} \left[\tilde{n} \sup_{t \leq T} |g'_x(t, \theta_t)| \right] \\ &+ \sup_{\delta} \mathbf{E} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \tilde{n}^2 + \eta^2 c \right] \left[\sup_{\substack{t \leq T, \\ 0 \leq u \leq 1}} |g''_{xx}(t, \theta_t + u(\theta_t^\delta - \theta_t))| \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$Lg(t, x) = g'_t(t, x) + g'_x(t, x)[a_0(t) + a_1(t)x] + \frac{1}{2} g''_{xx}(t, x)[b_1^2(t) + b_2^2(t)],$$

$$\tilde{n} = \sup_{t \leq T} |H'_t| + \sup_{t \leq T} |\Phi'_t| \sup_{t \leq T} |n_t|.$$

Доказательство. Легко проверить справедливость неравенства $s_T^0 \geq s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$.

Из теоремы 3 и совпадения σ -алгебр $\mathcal{F}_t^{\xi^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$ и $\mathcal{F}_t^{\bar{W}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$ следует, что при $\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \leq \varepsilon_0$ имеет место равенство

$$s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^{\bar{W}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}} \mathbf{E} g(\tau, m_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}). \quad (35)$$

Процесс $m_t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $0 \leq t \leq T$, является марковским относительно семейства $\mathbb{F}^{\bar{W}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} = (\mathcal{F}_t^{\bar{W}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}})$, $0 \leq t \leq T$, и в этом случае, как хорошо известно, класс $\mathfrak{M}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ является достаточным, т.е.

$$s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g(\tau, m_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}). \quad (36)$$

Введем вспомогательную выплату

$$\tilde{s}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^\theta, \tau \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau). \quad (37)$$

Нетрудно видеть, что

$$0 \leq s_T^0 - \tilde{s}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^\theta, \tau \leq T} \left[\mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau) - \mathbf{E} g(\tau \wedge T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \theta_\tau \wedge T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) \right].$$

Далее, по формуле Ито

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[g(\tau, \theta_\tau) - g(\tau \wedge T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \theta_\tau \wedge T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) \right] \\ &= \mathbf{E} \int_{\tau \wedge T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}^T Lg(t, \theta_t) dt \leq \int_{T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}^T \mathbf{E} |Lg(t, \theta_t)| dt \\ &\leq (T - T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) \sup_{t \leq T} \mathbf{E} |Lg(t, \theta_t)| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \sup_{t \leq T} \mathbf{E} |Lg(t, \theta_t)|, \end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено в силу оценки (26). Таким образом,

$$s_T^0 - \tilde{s}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \sup_{t \leq T} \mathbf{E} |Lg(t, \theta_t)|. \quad (38)$$

Из (15)–(19) немедленно следует, что $\mathfrak{M}_T^0 = \mathfrak{M}_T^n$, $\mathfrak{M}_T^{m^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} = \mathfrak{M}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{s}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^n, \tau \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \\ s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^{m^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}, \tau \leq T} \mathbf{E} g(\tau, m_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_\tau^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}). \end{aligned} \quad (39)$$

Сделаем замену времени $t = h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))$, $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, и, как и при доказательстве теоремы 3, обозначим

$$\tilde{n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = n_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \quad u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

Очевидно, что функция $h^{-1}(h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}): \tau \rightarrow \sigma = h^{-1}(h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\tau))$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между моментами остановки из класса $\mathfrak{M}_T^{m^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$ и моментами остановки из класса $\mathfrak{M}_T^{\tilde{n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$. Следовательно,

$$s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}_T^{\tilde{n}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}, \sigma \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g\left(h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(\sigma)), m_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(\sigma))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(\sigma))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}\right). \quad (40)$$

Предположим, что класс Δ функций $\delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t))$, $0 \leq t \leq T$, определен так же, как перед теоремой 3. При $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ имеем

$$m_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\gamma_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(u))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} = H_{\delta_1(u)} + \Phi_{\delta_1(u)} \tilde{n}_u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \eta \sqrt{\delta_2(u)}.$$

Учитывая, что процессы $\tilde{n}_u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ и n_u , $u \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, одинаково распределены, из (40) получаем

$$s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^n, \tau \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g(\delta_1(\tau), \theta_\tau^\delta). \quad (41)$$

Теперь оценим разность $\tilde{s}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - s_T^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^n, \tau \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau) - \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^n, \tau \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} g(\delta_1(\tau), \theta_\tau^\delta) \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^n, \tau \leq T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \mathbf{E} [g(\tau, \theta_\tau) - g(\delta_1(\tau), \theta_\tau^\delta)]. \end{aligned}$$

Используем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$\begin{aligned} g(t, x) - g(t_0, x) &= (t - t_0) \int_0^1 g'_t(t_0 + u(t - t_0), x) du + (x - x_0) g'_x(t_0, x_0) \\ &\quad + (x - x_0)^2 \int_0^1 g''_{xx}(t_0, x_0 + u(x - x_0))(1 - u) du. \end{aligned}$$

В нашем случае последнее выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g(\delta_1(\tau), \theta_\tau^\delta) - g(\tau, \theta_\tau) &= (\delta_1(\tau) - \tau) \int_0^1 g'_t(\tau + u(\delta_1(\tau) - \tau), \theta_\tau^\delta) du + (\theta_\tau^\delta - \theta_\tau) g'_x(\tau, \theta_\tau) \\ &\quad + (\theta_\tau^\delta - \theta_\tau)^2 \int_0^1 g''_{xx}(\tau, \theta_\tau + u(\theta_\tau^\delta - \theta_\tau))(1 - u) du. \end{aligned} \quad (42)$$

Далее, $\theta_\tau^\delta - \theta_\tau = H_{\delta_1(\tau)} - H_\tau + (\Phi_{\delta_1(\tau)} - \Phi_\tau) n_\tau + \eta \sqrt{\delta_2(\tau)}$. Поскольку случайная величина η независима от процесса n (и, значит, от процесса θ) и $\mathbf{E} \eta = 0$, то

$$\mathbf{E} \left[\eta \sqrt{\gamma_{h_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{-1}(h(\tau))}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} g'_x(\tau, \theta_\tau) \right] = 0.$$

Следовательно, используя оценки $|\delta_1(t) - t| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\ell/c$ и $\delta_2(t) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\ell$, из (42) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [g(\tau, \theta_\tau) - g(\delta_1(\tau), \theta_\tau^\delta)] &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \int_0^1 \mathbf{E} |g'_t(\tau + u(\delta_1(\tau) - \tau), \theta_\tau^\delta)| du \\ &\quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \mathbf{E} \left[\left(\sup_{t \leq T} |H'_t| + \sup_{t \leq T} |\Phi'_t| |n_\tau| \right) |g'_x(\tau, \theta_\tau)| \right] \\ &\quad + 2\mathbf{E} \left\{ \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \frac{\ell^2}{c^2} \left(\sup_{t \leq T} |H'_t| + \sup_{t \leq T} |\Phi'_t| |n_\tau| \right)^2 \eta^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ell \right] \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^1 |g''_{xx}(\tau, \theta_\tau + u(\theta_\tau^\delta - \theta_\tau))| (1 - u) du \right\} \\ &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \sup_{\delta} \mathbf{E} \sup_{t \leq T, 0 \leq u \leq 1} |g'_t(t + u(\delta_1(t) - t), \theta_t^\delta)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\ell}{c} \mathbf{E} \left[\tilde{n} \sup_{t \leq T} |g'_x(t, \theta_t)| \right] \\ &\quad + \sup_{\delta} \mathbf{E} \left\{ \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \frac{\ell^2}{c^2} \tilde{n}^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \eta^2 \ell \right] + \sup_{t \leq T, 0 \leq u \leq 1} |g''_{xx}(t, \theta_t + u(\theta_t^\delta - \theta_t))| \right\}, \end{aligned}$$

откуда, используя оценку (38), мы приходим к оценке (34). Теорема 4 доказана.

Пример. Рассмотрим следующий частный случай системы (1), (2). Предположим, что $a_0(t) \equiv 0$, $a_1(t) \equiv 0$, $b_1(t) \equiv 1$, $b_2(t) \equiv 0$, $A_0(t) \equiv 0$, $A_1(t) \equiv 1$, $A_2(t) \equiv 0$ для всех $t \leq T$, и пусть $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon \geq 0$. Тогда

$$d\theta_t = dW_1(t), \quad (43)$$

$$d\xi_t^\varepsilon = W_1(t) dt + \varepsilon dW_2(t). \quad (44)$$

Далее, пусть линейная функция выигрыша $g(t, x)$ имеет вид

$$g(t, x) = f(t) + h(t)x, \quad (45)$$

где

$$f(t) = \frac{u}{b+t}, \quad h(t) = \frac{1}{b+t}, \quad -\infty < u < \infty, \quad b > 0. \quad (46)$$

Введем цены для случая $0 \leq t \leq T < \infty$:

$$s_T^0(u, b) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^\theta} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \quad s_T^\varepsilon(u, b) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^{\xi^\varepsilon}} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \quad (47)$$

где $\mathfrak{M}_T^\theta$ и $\mathfrak{M}_T^{\xi^\varepsilon}$ — классы моментов остановки относительно семейств σ -алгебр $\mathcal{F}_t^\theta = \sigma\{\theta_s, s \leq t\}$ и $\mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon} = \sigma\{\xi_s^\varepsilon, s \leq t\}$ соответственно, $0 \leq t \leq T < \infty$. Введем также цены для случая $t \geq 0$:

$$s^0(u, b) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^\theta} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \quad s^\varepsilon(u, b) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} \mathbf{E} g(\tau, \theta_\tau), \quad (48)$$

где $\mathfrak{M}^\theta$ и $\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}$ — классы моментов остановки относительно семейств σ -алгебр $\mathcal{F}_t^\theta = \sigma\{\theta_s, s \leq t\}$ и $\mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon} = \sigma\{\xi_s^\varepsilon, s \leq t\}$ соответственно.

В [6] для функции выигрыша (45) была решена задача оптимальной остановки процесса θ_t , $t \geq 0$, по полным данным. В частности, был найден явный вид цены $s^0(u, b)$:

$$s^0(u, b) = \begin{cases} (1 - \alpha^2) \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\lambda u - \lambda^2 b}{2}\right\} d\lambda, & \text{если } u \leq \alpha b^{1/2}, \\ \frac{u}{b}, & \text{если } u > \alpha b^{1/2}, \end{cases} \quad (49)$$

где α есть решение уравнения

$$\alpha = (1 - \alpha^2) \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\lambda u - \lambda^2 b}{2}\right\} d\lambda. \quad (50)$$

В [7] для функции выигрыша (45) была решена задача оптимальной остановки процесса θ_t , $t \geq 0$, по неполным данным и получено явное выражение для цены s^ε :

$$s^\varepsilon(u, b) = \int_0^\infty dr \int_{v(r)}^\infty \frac{y e^{-(u-y)^2/(2I_r^\varepsilon(0))}}{(b+r)^2 (2\pi I_r^\varepsilon(0))^{1/2}} dy, \quad (51)$$

где $v(s)$ есть решение уравнения

$$v(s) = (b+s) \int_0^\infty dr \int_{v(r+s)}^\infty \frac{y e^{-(v(s)-y)^2/(2I_r^\varepsilon(s))}}{(b+r+s)^2 (2\pi I_r^\varepsilon(s))^{1/2}} dy, \quad (52)$$

и

$$I_r^\varepsilon(s) = \int_0^r t h^2\left(\frac{s+z}{\varepsilon}\right) dz. \quad (53)$$

Сходимость порядка $\sqrt{\varepsilon}$ цены $s^\varepsilon(u, b)$ к цене $s^0(u, b)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется неравенствами

$$0 \leq s^0(u, b) - s^\varepsilon(u, b) \leq \frac{1}{b} \left(\frac{4 \ln 2 - 2}{\pi} \right)^{1/2} \sqrt{\varepsilon}. \quad (54)$$

Используя лемму 6 и теорему из [5], для конечного интервала $[0, T]$ можно доказать равенства $s_T^0(u, b) = s^0(u, b)$ и $s_T^\varepsilon(u, b) = s^\varepsilon(u, b)$ (можно показать также, что $s_T^0(u, b) \rightarrow s^0(u, b)$ и $s_T^\varepsilon(u, b) \rightarrow s^\varepsilon(u, b)$ при $T \rightarrow \infty$). Тогда по теореме 4 мы получаем, что $s_T^\varepsilon(u, b) \rightarrow s_T^0(u, b)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и сходимость имеет порядок ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
2. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ: Оптимальные правила остановки. М.: Наука, 1969, 231 с.
3. *Dochviri V. M.* On optimal stopping with incomplete data. — *Lecture Notes in Math.*, 1988, v. 1299, p. 64–68.
4. *Babilua P., Bokuchava I., Dochviri B., Shashiashvili M.* Convergence of costs in an optimal stopping problem for a partially observable model. — *Appl. Math. Inform. Mech.*, 2006, v. 11, № 1, p. 6–11; <http://www.viam.science.tsu.ge/AMIM>.
5. *Дочвири В., Шашиашвили М.* Об оптимальной остановке однородного марковского процесса на конечном интервале времени. — *Math. Nachr.*, 1992, v. 156, p. 269–281.
6. *Shepp L. A.* Explicit solutions to some problems of optimal stopping. — *Ann. Math. Statist.*, 1969, v. 40, p. 993–1010.
7. *Ферманн Х.* Об оптимальной остановке винеровского процесса по неполным данным. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1978, т. 23, в. 1, с. 143–148.

Поступила в редакцию
31.VIII.2009

© 2010 г.

БУЛИНСКАЯ Е. Вл.*

КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ВЕТВЯЩЕЕСЯ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ ПО ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ¹⁾

Исследуется на двумерной решетке критическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем, в котором частицы могут производить потомство и гибнуть только в источнике ветвления, расположенном в начале координат. Установлено асимптотическое поведение по времени вероятности невырождения в нуле. Доказана условная предельная теорема для числа частиц в источнике ветвления, а также найдено предельное условное совместное распределение числа частиц в источнике и вне его.

Ключевые слова и фразы: критическое ветвящееся случайное блуждание, процесс Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, условные предельные теоремы, вероятность невырождения.

1. Введение. Модель критического каталитического ветвящегося случайного блуждания (КВСБ) по решетке $\mathbf{Z}$ была предложена В. А. Ватутиным, В. А. Топчием и Е. Б. Яровой [1], это исследование продолжилось в статье [2]. В случае произвольной размерности решетки $\mathbf{Z}^d$ в работе [3] рассматривалось надкритическое КВСБ и был выявлен экспоненциальный рост процесса. Для модели же критического КВСБ характерен «фазовый переход» по размерности решетки. Подтверждением этого служит тот факт, что асимптотическое поведение по времени вероятности невырождения имеет скорость убывания $t^{-1/4}$ (см. [1]) на решетке $\mathbf{Z}$ и соответственно $(\ln t)^{-1/2}$ на $\mathbf{Z}^2$ (см. [4]). Цель данной заметки состоит в дальнейшем изучении критического КВСБ

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: bulinskaya@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00362а).