Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Ирхина, Об одном достаточном условии сводимости для принципа Ванга,
Теория вероятн. и ее примен., 2010, том 55, выпуск 1, 148–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:09:33

4. Совместное распределение $\zeta(t)$ и $\mu(t)$. В [1] показано, что полученный ветвящийся процесс Беллмана–Харриса является критическим и неразложимым. Там же проверены некоторые условия теоремы 1 статьи [9], что вместе с леммой 2 после стандартных вычислений позволяет применить указанную теорему и для критического КВСБ на двумерной решетке. Таким образом устанавливается теорема 3.

Автор выражает признательность своему научному руководителю Е. Б. Яровой за постановку задач и постоянное внимание, а также В. А. Ватутину за советы и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vatutin V. A., Topchii V. A., Yarovaya E. B.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. — *Theory Probab. Math. Statist.*, 2004, v. 69, p. 1–15.
2. *Topchii V. A., Vatutin V. A.* Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk. — *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, 2003, v. 6, p. 325–332.
3. *Яровая Е. Б.* Об исследовании ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам. — *Современные проблемы математики, механики и их приложений*, т. 4. М.: Изд-во МГУ, 2009, с. 119–136.
4. *Захарьева [Булinskaya] Е. В.* О вероятностях выживания частиц на $\mathbf{Z}^2$ в одной из моделей критического ветвящегося случайного блуждания. — *Труды Колмогоровских чтений* (Ярославль, 19–22 мая 2008 г.), с. 218–229.
5. *Яровая Е. Б.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: ЦПИ при мехмате МГУ, 2007, 104 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
7. *Ватутин В. А.* Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса. М.: МИАН, 2009, 112 с. (Лекционные курсы НОЦ, в. 12.)
8. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
9. *Ватутин В. А.* Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1979, т. 24, в. 3, с. 503–514.

Поступила в редакцию
19.VI.2009

© 2010 г.

ИРХИНА Н. А.*

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ СВОДИМОСТИ ДЛЯ ПРИНЦИПА ВАНГА

Изучается принцип Ванга подсчета премии в теории страхования. Предлагается одно из достаточных условий сводимости для принципа Ванга, приводятся примеры его применения. Рассматриваются случаи несводимости для принципа Ванга.

Ключевые слова и фразы: принцип подсчета премии, функция искажения, натуральное множество, сдвигово-масштабное семейство, сводимость принципов.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: irkhina.natalia@rambler.ru

1. Введение. Расчет премии в страховании является одной из фундаментальных задач актуарной науки. Традиционно под страховым риском X понимают неотрицательную случайную величину убытка, а принцип подсчета премии — это некий функционал, отображающий X в $[0, \infty)$. Поиск надежного принципа подсчета премии является предметом многочисленных актуарных исследований, однако вопрос о том, какой именно принцип предпочтителен, все еще не решен.

Интуитивно понятно и аналитически доказано, что если назначать премию за риск, руководствуясь соображениями равенства средних затрат страхователя и страховщика, то вероятность разорения последнего будет составлять $1/2$ в модели для совокупного убытка, что на практике недопустимо. Поэтому при расчете в тариф необходимо заложить некоторую рисковую надбавку, методы оценки которой активно исследуются учеными.

В последние десятилетия особый интерес вызывает так называемый принцип Ванга подсчета премии, изложенный С. С. Вангом в [1] и [2]. Еще в 1991 г. Г. Вентер [9], изучая вопросы безарбитражности в страховом ценообразовании, предложил использовать принципы подсчета премии на основе трансформации функции распределения. Развивая идеи Вентера, Ванг предложил определить премию за риск как полный интеграл от модифицированной функции дожития случайной величины убытка ($S_X(t) = \mathbf{P}(X > t)$). Первоначально [1] формула подсчета премии выглядела следующим образом: $\pi_\rho(X) = \int_0^\infty S_X(t)^{1/\rho} dt$, $\rho \geq 1$, где ρ — так называемый индекс неприятия риска, а принцип носил название Proportional Hazard Premium principle (PHp), т.е. «пропорционально степени риска».

Можно отметить несколько достоинств данного метода. Во-первых, рисковая надбавка является положительной величиной, но не чрезмерно увеличивает премию, т.е. общая премия за риск не оказывается больше максимально возможного убытка по данному риску. Во-вторых, нагрузка не является необоснованной в том смысле, что если риск фиксированный, то за него не назначается рисковая надбавка. В-третьих, данный принцип инвариантен относительно сдвигово-масштабных преобразований. В-четвертых, PHp субаддитивен по произвольным случайным слагаемым, т.е. не дает преимуществ страхователю в случае дробления риска на части. Страховщик, определяя фиксированную премию за каждый риск, тем самым неявно упорядочивает риски. Поэтому еще одним важным свойством PHp является сохранение стохастического порядка рисков. Более того, данный механизм не использует функцию полезности, в связи с чем относительно более легок в применении в сравнении с традиционными методами теории полезности. PHp отражает, с одной стороны, относительную «рискованность» котируемого риска, а с другой — нерасположенность к риску (как неопределенности возможного дохода или расхода) стороны, принимающей решение по данному риску. А именно, коэффициенты неприятия риска у страхователей, как правило, больше, чем у страховых компаний, которые, в свою очередь, больше, чем у перестраховочных компаний.

Несколько позднее Ванг [2] обобщил PHp, а именно, вместо степенной трансформации функции дожития случайной величины он предложил возрастающую вогнутую функцию искажения $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такую, что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$: $H_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(t)) dt$. Условия на граничные значения функции g необходимы для того, чтобы не назначать премию в случае отсутствия риска и брать премию в полном объеме в случае, если страховой случай произойдет наверняка. Вогнутость функции искажения обеспечивает субаддитивность.

Принцип Ванга обсуждался многими авторами, которые обобщили его для распределений на всей числовой оси, что позволило рассматривать преобразованные (например, центрированные) случайные величины и обеспечить линейность. Здесь необходимо отметить, что принципу Ванга подсчета премии в страховании соответствует очень важный класс когерентных мер риска в финансовой математике — $\mathbf{WV@R}$ [10]. Данное соответствие устанавливается заменой знака у случайной величины риска,

поскольку в страховании изучают убытки, а в финансовой математике — прибыли. Также последователи Ванга отказались от условия вогнутости функции искажения, тем самым расширив класс доступных функций, однако потеряв при этом свойство субаддитивности. Было установлено, что принцип Ванга является надежной мерой риска, обладая рядом важных практических свойств. Однако формула Ванга подсчета премии достаточно громоздка, а также требует знания всей функции распределения рассматриваемого риска, что не всегда доступно в реальных условиях. Поэтому важной задачей является определение условий, при которых данный принцип эквивалентен более удобному в применении принципу подсчета премии, например наиболее распространенному в страховой практике методу, основанному на двух первых моментах распределения. В качестве такого принципа рассматривался традиционный принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению (SDp — Standard Deviation Premium principle).

С. Кристофидес [3] изучал частный случай принципа Ванга — преобразование, пропорциональное степени риска, — и выяснил, что для некоторых явно заданных параметрических семейств PHp эквивалентен SDp.

В. Янг [4] обобщила выводы Кристофидеса и доказала, что для фиксированной функции искажения принцип Ванга (Wp) эквивалентен SDp на сдвигово-масштабном семействе распределений и некоторых других двухпараметрических семействах распределений, обладающих определенными свойствами.

Дж.-Л. Ванг [5] доказал фундаментальный результат о том, что для фиксированной функции искажения натуральное множество (т.е. множество, на котором принцип Ванга подсчета премии сводится к принципу подсчета премии по среднеквадратическому отклонению) является объединением сдвигово-масштабных семейств, удовлетворяющих определенным условиям, и, более того, никакое другое множество не является натуральным.

Однако более интересным вопросом является изучение свойств натуральных множеств не для фиксированной функции искажения, а для целого класса таких функций. Были исследованы различные классы функций, а именно: множество всех функций искажения [5], множество ступенчатых функций, принимающих два значения: 0 и 1 [5], множество сюръективных функций [6], множество степенных функций [6]. Для них изучался вопрос эквивалентности Wp и SDp.

В итоге для различных классов функций искажения было доказано, что пересечение соответствующих натуральных множеств является сдвигово-масштабным семейством. Здесь, однако, необходимо отметить следующий замечательный факт: из справедливости данного утверждения для более узкого класса функций следует его справедливость для более широкого, поэтому интерес представляет доказательство для достаточно узких классов функций искажения. Более того, до сих пор не было известно никаких общих критериев для проверки утверждения, и в каждом случае приходилось доказывать его отдельно, строя свои функции. В настоящей работе предлагается достаточное условие сводимости принципа Ванга к принципу подсчета премии по среднеквадратическому отклонению.

В дальнейшем автор предполагает работать над новыми достаточными условиями, применимыми и к некоторым классам вогнутых функций искажения, как это первоначально предполагал Ванг.

2. Основные определения и понятия.

О п р е д е л е н и е 1. *Принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению (Standard deviation premium principle):*

$$\pi(X) = \mathbf{E} X + \lambda \sqrt{\mathbf{D} X}, \quad (\text{SDp})$$

где X — риск, $\lambda > 0$, $\pi(X)$ — премия, назначаемая за риск X .

О п р е д е л е н и е 2. *Принцип Ванга подсчета премии (Wang's premium principle):*

$$H_g(X) = \int_{-\infty}^0 (g(S_X(t)) - 1) dt + \int_0^{\infty} g(S_X(t)) dt, \quad (\text{Wp})$$

где $S_X(t) = \mathbf{P}(X > t)$ — функция дожития для риска X , $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — неубывающая функция искажения.

Говорят, что для фиксированной функции g Wp сводится к SDp на множестве случайных величин с распределениями из некоторого семейства $\mathcal{F}$, если для любых X и Y с функциями распределения из $\mathcal{F}$ верно:

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E} X}{\sqrt{\mathbf{D} X}} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E} Y}{\sqrt{\mathbf{D} Y}},$$

поскольку в этом случае $H_g(X) = \pi(X)$ с некоторым λ .

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\mathcal{L}_2$ — множество распределений, имеющих среднее и дисперсию. *Натуральным множеством* для функции g в отношении распределения $F_X \in \mathcal{L}_2$ случайной величины X называется множество

$$N_g(X) = \left\{ F_Y \in \mathcal{L}_2: \frac{H_g(X) - \mathbf{E} X}{\sqrt{\mathbf{D} X}} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E} Y}{\sqrt{\mathbf{D} Y}} \right\}.$$

Введем следующее обозначение: $\bigcap_{g \in \mathcal{E}} N_g(X) \equiv N_{\mathcal{E}}(X)$, где $\mathcal{E}$ — некоторое семейство функций искажения.

О п р е д е л е н и е 4. Обозначим через $\mathcal{G}$ множество всех неубывающих функций $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

$\mathcal{D}_{0,1} \subset \mathcal{G}$ — множество ступенчатых функций, принимающих два значения: 0 и 1.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ — множество сюръективных функций.

$\mathcal{R}_k \subset \mathcal{G}$ — множество строго возрастающих ломаных из k звеньев.

$\mathcal{R}_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \subset \mathcal{G}$ — множество строго возрастающих ломаных из k звеньев с фиксированными точками излома $x_1, \dots, x_{k-1}$. (Принцип подсчета премии для функций искажения из множества $\mathcal{R}_2(1/2)$ соответствует принципу абсолютного отклонения Деннеберга [8].)

$\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ — множество степенных функций: $g(x) = x^c$, $c > 0$.

$\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{G}$ — множество, состоящее из склеек двух степенных функций:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [0, x_0], \\ g_2(x), & x \in (x_0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

где $g_1(x) = \alpha_1(x/\beta_1)^p$, $p > 1$, $g_2(x) = \alpha_2((x - x_0)/\beta_2)^q + g_1(x_0)$, $0 < q < 1$, $x_0 \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — константы.

$\mathcal{P}_2^* \subset \mathcal{G}$ — множество, состоящее из склеек (1) двух степенных функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ следующего вида: $g_1(x) = \alpha_1(x/\beta_1)^p$, $p > 1$, и

$$g_2(x) = 1 - [1 - g_1(x_0)] \left(\frac{1 - x}{1 - x_0} \right)^q = 1 - \left[1 - \alpha_1 \left(\frac{x_0}{\beta_1} \right)^p \right] \left(\frac{1 - x}{1 - x_0} \right)^q, \quad q > 1,$$

где $x_0 \in (0, 1)$ — точка пересечения кривых $g_1(x)$ и $g_2(x)$, α_1, β_1 — константы.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ — класс многочленов, проходящих через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

$\mathcal{M}_n \subset \mathcal{G}$ — класс многочленов степени не выше n , проходящих через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

О п р е д е л е н и е 5. *Сдвигово-масштабное семейство* — это двухпараметрическое семейство с параметром сдвига и масштабным параметром: $\{S_Z((t - \mu)/\sigma), \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0\}$, где S_Z — фиксированная функция дожития, или $\{X = \mu + \sigma Z, \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0\}$, где Z имеет распределение S_Z .

О п р е д е л е н и е 6. Если в принципе Ванга подсчета премии ограничиться случаем, когда $g(x) \in \mathcal{P}$, то получим *принцип подсчета премии пропорционально степени риска (Proportional hazard premium principle, PHp)*.

3. Результаты. В обозначениях п. 2 было доказано, что следующие множества являются сдвигово-масштабными семействами: $N_{\mathcal{G}}(X)$ [5], $N_{\mathcal{D}_{0,1}}(X)$ [5], $N_{\mathcal{S}}(X)$ [6], $N_{\mathcal{P}}(X)$, если функция дожития случайной величины X непрерывна, а носитель X — выпуклое множество [6], $N_{\mathcal{P}_2}(X)$ [7].

В данной работе будут приведены доказательства для $N_{\mathcal{D}}(X)$, $N_{\mathcal{D}_2^*}(X)$, $N_{\mathcal{M}}(X)$ и других специальных семейств функций.

4. Достаточное условие сводимости принципа Ванга.

Теорема 1. Если в некотором классе функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ для любых чисел a, b, c таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдется функция g такая, что

$$\begin{cases} g(x) \leq cx, & 0 < x < a, \\ g(x) \geq 1 - c(1 - x), & b < x < 1, \end{cases} \quad (2)$$

то пересечение натуральных множеств по данному классу $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{F} = N_{\mathcal{A}}(X)$. На этом множестве распределений Wp может быть сведен к SDp для любой $g \in \mathcal{A}$. Поскольку F_X заведомо лежит в $\mathcal{F}$, получаем, что $(H_g(X) - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X} = (H_g(Y) - \mathbf{E}Y)/\sqrt{\mathbf{D}Y}$ для любой случайной величины Y с распределением из $\mathcal{F}$ и для любой функции $g \in \mathcal{A}$. Положим $U = (X - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}$, $V = (Y - \mathbf{E}Y)/\sqrt{\mathbf{D}Y}$. Тогда

$$H_g(U) = H_g(V), \quad (3)$$

так как H_g обладает свойством линейности.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что если равенство $H_g(U) = H_g(V)$ имеет место для любой функции $g \in \mathcal{A}$, то распределения U и V совпадают.

Обозначим через $S_U(t)$ и $S_V(t)$ функции дожития для случайных величин U и V соответственно. Используя доказательство от противного, покажем, что $S_U(t) = S_V(t)$ для $t \geq 0$. Предположим, что существует $t_0 \geq 0$ такое, что $S_U(t_0) > S_V(t_0) = \alpha$. Тогда построим функцию $g \in \mathcal{A}$, удовлетворяющую (2), для которой $H_g(U) \neq H_g(V)$, что приведет к противоречию с (3) и докажет теорему.

Найдется такое ε , что

$$0 < \varepsilon < S_U(t_0) - \alpha. \quad (4)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные функции:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & \alpha + \varepsilon < x \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq \alpha + \varepsilon, \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} 1, & \alpha < x \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq \alpha, \end{cases}$$

и обозначим $u_i = \inf\{t: S_U(t) \leq \alpha + i\varepsilon/3\}$, $v_i = \inf\{t: S_V(t) \leq \alpha + i\varepsilon/3\}$, $i = 0, \dots, 3$.

Заметим, что $H_{h_1}(U) = u_3$, $H_{h_2}(V) = v_0 \leq t_0 < u_3$ в силу (4). Следовательно, $H_{h_1}(U) > H_{h_2}(V)$.

Рассмотрим функцию $g(x) \in \mathcal{A}$, удовлетворяющую (2) для $a = \alpha + \varepsilon/3$, $b = \alpha + 2\varepsilon/3$, $c = \min(c_1, c_2)$, где

$$c_1 = \frac{u_2 - u_3}{\int_{-\infty}^{u_2} F_U(t) dt}, \quad c_2 = \frac{v_0 - \int_0^{v_1} g(S_V(t)) dt}{\int_{v_1}^{+\infty} S_V(t) dt},$$

и докажем, что

$$H_g(U) \geq H_{h_1}(U) \quad \text{и} \quad H_g(V) \leq H_{h_2}(V). \quad (5)$$

1. Докажем, что выполнено первое неравенство в (5):

$$\begin{aligned} H_g(U) &= \int_{-\infty}^0 (g(S_U(t)) - 1) dt + \int_0^{+\infty} g(S_U(t)) dt \\ &\geq \int_{-\infty}^0 -c(1 - S_U(t)) dt + \int_0^{u_2} (1 - c(1 - S_U(t))) dt + \int_{u_2}^{+\infty} g(S_U(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{-\infty}^0 [-c(1 - S_U(t))] dt + \int_0^{u_2} (1 - c(1 - S_U(t))) dt \\
&= -c \int_{-\infty}^{u_2} F_U(t) dt + u_2 \geq u_3 = H_{h_1}(U).
\end{aligned}$$

2. Докажем, что выполнено второе неравенство в (5):

$$\begin{aligned}
H_g(V) &= \int_{-\infty}^0 (g(S_V(t)) - 1) dt + \int_0^{+\infty} g(S_V(t)) dt \\
&\leq \int_{-\infty}^0 (g(S_V(t)) - 1) dt + \int_0^{v_1} g(S_V(t)) dt + \int_{v_1}^{+\infty} cS_V(t) dt \\
&\leq \int_0^{v_1} g(S_V(t)) dt + \int_{v_1}^{+\infty} cS_V(t) dt \leq v_0 = H_{h_2}(V).
\end{aligned}$$

Таким образом, выполнены оба неравенства (5), т.е. $H_g(V) \leq H_{h_2}(V) < H_{h_1}(U) \leq H_g(U)$, что противоречит (3).

Следовательно, доказано, что $S_U(t) = S_V(t)$ для любого $t \geq 0$. Для доказательства теоремы в случае, когда $t < 0$, сделаем замену $\tilde{U} = -U$, $\tilde{V} = -V$, а для функций дожития $S_{\tilde{U}}(t)$ и $S_{\tilde{V}}(t)$ утверждение уже доказано.

5. Применение теоремы 1.

Предложение 1. Множество $N_{\mathcal{R}_k}(X)$ при $k \geq 3$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для любых фиксированных a, b и c построим функцию $g \in \mathcal{R}_k$, удовлетворяющую (2):

$$g(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq a, \\ 1 - c(1 - x), & b \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, построены первое и последнее звенья ломаной, все остальные звенья произвольным образом помещаем внутри интервала (a, b) . Тогда справедливость предложения 1 вытекает из теоремы 1.

Предложение 2. Множество $N_{\mathcal{P}_2}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для любых фиксированных a, b и c построим функцию $g \in \mathcal{P}_2$, удовлетворяющую (2).

Возьмем $x_0 = (a + b)/2$, $g_1(x) = x^p$ и

$$g_2(x) = \frac{1 - ((a + b)/2)^p}{(1 - (a + b)/2)^q} \left(x - \frac{a + b}{2} \right)^q + \left(\frac{a + b}{2} \right)^p.$$

Необходимо подобрать такие $p > 1$, $0 < q < 1$, что

$$\begin{cases} g_1(x) \leq cx, & 0 \leq x \leq a, \\ g_2(x) \geq 1 - c(1 - x), & b \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку $g_1(x)$ выпуклая, а $g_2(x)$ вогнутая, достаточно выполнения следующих условий:

$$g_1(a) \leq ca, \quad g_2(b) \geq 1 - c(1 - b),$$

т.е.

$$a^p \leq ca, \quad \left(1 - \left(\frac{a + b}{2} \right)^p \right) \left(\frac{b - a}{2 - (a + b)} \right)^q + \left(\frac{a + b}{2} \right)^p \geq 1 - c(1 - b).$$

Решая неравенства относительно p и q , получаем:

$$p \geq 1 + \log_a c, \quad q \leq \log_{(b-a)/(2-(a+b))} \left(1 - \frac{c(1-b)}{1 - ((b+a)/2)^p} \right).$$

Зафиксируем некоторое $p_0 = \max(1, 1 + \log_a c, \log_{(a+b)/2}(1 - c(1 - b)))$ (условие $p_0 \geq \log_{(a+b)/2}(1 - c(1 - b))$ необходимо, чтобы аргумент у логарифма в неравенстве для q оказался положительным). Тогда, поскольку у логарифма в неравенстве для q и основание, и аргумент меньше 1, можно выбрать такое q_0 , что условие $0 < q_0$ будет выполнено. Выполнение условия $q_0 < 1$ тоже легко проверяется, так как неравенство для q имеет знак « $\leq$ ».

Предложение 3. Множество $N_{\mathcal{P}_2^*}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для любых фиксированных a, b и c построим функцию $g \in \mathcal{P}_2^*$, удовлетворяющую (2).

Возьмем $x_0 = (a + b)/2$, $g_1(x) = x^p$ и

$$g_2(x) = 1 - \left[1 - \left(\frac{a+b}{2} \right)^p \right] \left(\frac{1-x}{1-(a+b)/2} \right)^q.$$

Необходимо подобрать $p, q > 1$, для которых будет выполнены неравенства (6). Поскольку $g_1(x)$ выпуклая, а $g_2(x)$ вогнутая, то достаточно выполнения следующих условий:

$$g_1(a) \leq ca, \quad g_2(b) \geq 1 - c(1 - b),$$

т.е.

$$a^p \leq ca, \quad 1 - \left[1 - \left(\frac{a+b}{2} \right)^p \right] \left(\frac{1-b}{1-(a+b)/2} \right)^q \geq 1 - c(1 - b).$$

Решая неравенства относительно p и q , получаем:

$$p \geq 1 + \log_a c, \quad q \geq \log_d \frac{c(1-b)}{1 - ((a+b)/2)^p}, \quad \text{где } d = \frac{1-b}{1-(a+b)/2}.$$

Зафиксировав некоторое $p_0 \geq \max(1, 1 + \log_a c)$, можем выбрать $q_0 > 1$, удовлетворяющее требуемому условию.

Предложение 4. Множество $N_{\mathcal{M}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В качестве функции искажения g выберем многочлен следующего вида:

$$g(x) = \int_0^x f(y) dy, \quad \text{где } f(y) = \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} y^m (1-y)^n.$$

Легко проверить, что точка $y_0 = m/(m+n)$ является точкой максимума функции $f(y)$. Положим $m = [sk]$, $n = [(1-s)k]$. Тогда $\lim_{m,n \rightarrow \infty} m/(m+n) = s$. Теперь посмотрим, к какому пределу стремится значение многочлена $f(y)$ при стремлении m и n к бесконечности выбранным способом.

Пусть сначала $y = s$. Тогда, воспользовавшись формулой Стирлинга, получим:

$$\begin{aligned} & \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} s^m (1-s)^n \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} (m+n+1) \frac{\sqrt{2\pi(m+n)} (m+n)^{m+n} e^{-(m+n)}}{\sqrt{2\pi m} m^m e^{-m} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} s^m (1-s)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{m,n \rightarrow \infty} (m+n+1) \sqrt{\frac{m+n}{mn}} = \infty. \end{aligned}$$

Если $y < s$, то $y/s < 1$ и $(y/s)^m \leq (y/s)^{sk-1}$, а $(1-y)/(1-s) > 1$ и $((1-y)/(1-s))^n \leq ((1-y)/(1-s))^{(1-s)k}$, откуда

$$\left(\frac{y}{s} \right)^m \left(\frac{1-y}{1-s} \right)^n \leq \frac{s}{y} \left[\left(\frac{y}{s} \right)^s \left(\frac{1-y}{1-s} \right)^{1-s} \right]^k.$$

Если $y > s$, то $y/s > 1$ и $(y/s)^m \leq (y/s)^{sk}$, а $(1-y)/(1-s) < 1$ и $((1-y)/(1-s))^n \leq ((1-y)/(1-s))^{(1-s)k-1}$, откуда

$$\left(\frac{y}{s}\right)^m \left(\frac{1-y}{1-s}\right)^n \leq \frac{1-y}{1-s} \left[\left(\frac{y}{s}\right)^s \left(\frac{1-s}{1-y}\right)^{1-s}\right]^k.$$

Рассмотрим функцию $h(x) = x^s(1-x)^{1-s}$. Она имеет максимум в точке s . Следовательно, $h(y) = y^s(1-y)^{1-s} \leq s^s(1-s)^{1-s}$ и равенство достигается только при $y = s$. Тогда при $y \neq s$ выполнено неравенство $(y/s)^s((1-s)/(1-y))^{1-s} < 1$ и $[(y/s)^s((1-s)/(1-y))^{1-s}]^k$ убывает со скоростью геометрической прогрессии, что заведомо быстрее роста $\sqrt{k}$.

Таким образом, при $y \neq s$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} s^m(1-s)^n = 0.$$

Теперь выберем такое k , чтобы построенная функция g удовлетворяла условию (2). Положим $(a+b)/2 = s \in (0,1)$. Так как при $y < s$ выполнено $f(y) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то для любого $c > 0$ существует K_1 такое, что для любого $k > K_1$ выполнено неравенство $f(y) < c$, следовательно, $g(x) = \int_0^x f(y) dy < cx$ для любого $x \in [0, a]$. А поскольку при $y > s$ выполнено $f(y) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то для любого $c > 0$ существует K_2 такое, что для любого $k > K_2$ выполнено неравенство $f(y) < c$, следовательно, $g(x) = \int_0^x f(y) dy = 1 - \int_x^1 f(y) dy < 1 - c(1-x)$ для любого $x \in [b, 1]$. Далее, выбрав $K = \max(K_1, K_2)$ и положив $k > K$, получим выполнение условия (2).

6. Пример несводимости.

Предложение 5. Множество $N_{\mathcal{R}_2(1/2)}(X)$ не является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Множество $\mathcal{R}_2(1/2)$ состоит из функций вида

$$g(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 1/2, \\ (2-a)(x-1) + 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим случайные величины U и V , имеющие следующие дискретные распределения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U = \pm 3) &= 0.05, & \mathbf{P}(V = \pm 3) &= 0.04, \\ \mathbf{P}(U = \pm 2) &= 0, & \mathbf{P}(V = \pm 2) &= 0.03, \\ \mathbf{P}(U = \pm 1) &= 0.05, & \mathbf{P}(V = \pm 1) &= 0.02, \\ \mathbf{P}(U = 0) &= 0.8, & \mathbf{P}(V = 0) &= 0.82. \end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{E}U = \mathbf{E}V = 0$, $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = 1$. Заметим, что случайные величины U и V уже центрированные и нормированные, поэтому они могут принимать отрицательные значения, между тем как исходные убытки X и Y можно сделать неотрицательными или положительными с помощью преобразований типа сдвига, например, $X = U + 5$, $Y = V + 5$.

Несложно проверить, что для обеих рассмотренных случайных величин U и V премии Ванга совпадают: $H_g(U) = H_g(V) = 0.4(a-1)$, однако распределения U и V , очевидно, различны.

Таким образом, мы показали, что принцип Деннеберга [8] не сводится к принципу подсчета премии по среднеквадратическому отклонению.

7. Контрпримеры.

Предложение 6. Множество $N_{\mathcal{R}_3(0.1;0.9)}(X)$ не является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Множество $\mathcal{R}_3(0.1;0.9)$ состоит из функций вида

$$g(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 0.1, \\ b(x-0.1) + 0.1a, & 0.1 \leq x < 0.9, \\ (10-a-8b)(x-1) + 1, & 0.9 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим те же центрированные и нормированные случайные величины U и V , что и в п. 6. Несложно проверить, что для этих случайных величин премии Ванга совпадают: $H_g(U) = H_g(V) = 0.4a + 1.6b - 2$, однако распределения U и V , очевидно, различны.

Из примеров, рассмотренных в предложениях 1, 5 и 6 данной работы, напрашивается вывод, что для сводимости принципа Ванга к принципу подсчета премии по среднеквадратическому отклонению важно не количество звеньев у ломаной, а тот факт, что точки ее излома подвижные.

Предложение 7. Множество $N_{\mathcal{M}_2}(X)$ не является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Множество $\mathcal{M}_2$ состоит из функций вида $g(x) = ax^2 + (1-a)x$, где $-1 \leq a \leq 1$.

Рассмотрим случайные величины U и V , имеющие следующие дискретные распределения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U = \pm 2) &= 0, & \mathbf{P}(V = \pm 2) &= 0.1, \\ \mathbf{P}(U = \pm 1) &= 0.5, & \mathbf{P}(V = \pm 1) &= 0.1, \\ \mathbf{P}(U = 0) &= 0, & \mathbf{P}(V = 0) &= 0.6. \end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{E}U = \mathbf{E}V = 0$, $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = 1$. Несложно проверить, что для рассмотренных случайных величин премии Ванга совпадают: $H_g(U) = H_g(V) = -0.5a$, однако распределения U и V , очевидно, различны.

Автор выражает благодарность за идеи, замечания и предложения своим научным руководителям Е. В. Булинской и А. В. Лебедеву.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang S. S. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. — Insurance Math. Econom., 1995, v. 17, № 1, p. 43–54.
2. Wang S. S. Premium calculation by transforming the layer premium density. — Astin Bull., 1996, v. 26, № 1, p. 71–92.
3. Christofides S. Pricing for risk in financial transactions. — Proceedings of the GISG/Astin Joint Meeting (Glasgow, 1998), p. 62–109.
4. Young V. R. Discussion of Christofides conjecture regarding Wang's premium principle. — Astin Bull., 1999, v. 29, № 2, p. 191–195.
5. Wang J.-L. A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle. — Astin Bull., 2000, v. 30, № 1, p. 13–17.
6. Wu X.-Y. The natural sets of Wang's premium principle. — Astin Bull., 2001, v. 31, № 1, p. 139–145.
7. Аржанова [Ирхина] Н. А. Принцип Ванга подсчета премии. — Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна — 2006. Воронеж: ВГУ, 2006, с. 16–20.
8. Denneberg D. Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation. — Astin Bull., 1990, v. 20, № 2, p. 181–190.
9. Venter G. G. Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. — Astin Bull., 1991, v. 21, № 2, p. 223–230.
10. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 3, p. 367–393.

Поступила в редакцию
24.XI.2008