Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Конаровский, О бесконечной системе диффундирующих частиц со склеиванием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 1, 157–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:11:31

© 2010 г.

КОНАРОВСКИЙ В. В.*

О БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФУНДИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ
СО СКЛЕИВАНИЕМ¹⁾

Построена система мартингалов, описывающая движение бесконечной системы диффундирующих частиц, склеивающихся при встрече и меняющих коэффициент диффузии в момент склейки.

Ключевые слова и фразы: система бесконечного числа частиц со склеиванием, поток Арраты, квадратично интегрируемый мартингал.

Введение. Настоящая работа посвящена построению совокупности процессов с взаимодействием. Ярким представителем этого класса является поток Арраты [1]–[4], который можно интерпретировать как описание совместного движения броуновских частиц на $\mathbf{R}$, стартовавших из каждой точки прямой и движущихся независимо до момента встречи, а затем склеивающихся и движущихся вместе. Основным характерным признаком такого потока является то, что каждый процесс, описывающий движение одной частицы, — винеровский и склеивание никоим образом не изменяет его свойств. С физической точки зрения более естественно предполагать, что частицы в момент склеивания могут изменять свою массу, инерцию движения и т.д. В работе [5] рассмотрены конечный и бесконечный случаи склеивающихся частиц, которые имеют массу и скорость; их движение подчиняется законам сохранения массы и инерции; выписаны мерозначные уравнения для распределения массы и инерции; доказано существование слабых решений этих уравнений. В настоящей работе с помощью мартингаловых методов строится система процессов, которую можно интерпретировать как описание системы диффузионных частиц (частицы имеют бесконечную скорость), которые стартовали из каждой целой точки прямой и движутся независимо до момента встречи, а затем склеиваются, изменяя свою массу или коэффициент диффузии.

При построении математической модели описанной системы частиц возникают новые сложности по сравнению с построением потока Арраты. Эта сложность состоит в том, что из-за изменения коэффициента диффузии при склеивании движение каждой конечной системы частиц уже не может быть описано без учета влияния остальных (они могут приклеиваться к выделенным нами). В настоящей работе для преодоления возникшего препятствия совокупность процессов, отвечающих всей бесконечной системе частиц, получается как предел при увеличении объема конечных систем частиц. Соответственно, статья состоит из двух частей. В первой строится математическое описание конечной системы диффузионных частиц, меняющих при склеивании коэффициент диффузии. Во второй части с помощью предельного перехода получено математическое описание системы из бесконечного числа частиц.

1. Система конечного числа частиц. Пусть $\mathcal{M}_2^c([0, T], \mathcal{F})$ — множество непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов на $[0, T]$ относительно некоторой фильтрации $\mathcal{F}$.

Теорема 1. *Существует набор случайных процессов $\{x_n(k, t); k = -n, \dots, n, t \in [0, 1]\}$ таких, что*

* Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, 01601 Киев, Украина; e-mail: vitalik@imath.kiev.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российско-Украинского гранта № 104 «Асимптотическое поведение стохастических потоков» от 02.04.2008.

- 1) $x_n(k, \cdot) \in \mathcal{M}_2^c([0, 1], \mathcal{F}^{(n)})$, $k = -n, \dots, n$, и $\mathcal{F}^{(n)} = \sigma(x_n(k, s); k = -n, \dots, n, s \leq t)_{t \in [0, 1]}$;
- 2) $x_n(k, 0) = k$, $k = -n, \dots, n$;
- 3) для любого $l < k$ и любого $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство $x_n(l, t) \leq x_n(k, t)$;
- 4) для любого $t \in [0, 1]$ $\langle x_n(k, \cdot) \rangle_t = \int_0^t (1/m_n(k, s)) ds$, где $m_n(k, t) = |A_n(k, t)|$, а $A_n(k, t) = \{i = -n, \dots, n: \exists s \leq t, x_n(k, s) = x_n(i, s)\}$;
- 5) совместная характеристика $\langle x_n(l, \cdot), x_n(k, \cdot) \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l,k}^{(n)}\}$, где $\tau_{l,k}^{(n)} = \inf\{t: x_n(l, t) = x_n(k, t)\}$, равна нулю.

Теорема 1 описывает совместное движение конечного числа частиц, движущихся независимо до момента встречи, а затем склеивающихся, изменяя свою диффузию согласно условию 4).

Доказательство. Обозначим $\mathcal{W}$ совокупность винеровских процессов с единичной диффузией и $\mathcal{W}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{W}$ множество винеровских процессов относительно потока σ -алгебр $\mathcal{F}$. Рассмотрим независимые процессы $\{w_k; k \in \mathbf{Z}\} \subset \mathcal{W}$ такие, что $w_k(0) = k$. Из $\{w_k; k = -n, \dots, n\}$ построим систему процессов $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$, которая обладает нужными свойствами.

Пусть $\tau^{(0)} = 0$, $\mathfrak{S}^{(0)} = \{\{i\}; i = -n, \dots, n\}$ и $w_k^{(0)}(t) = w_k(t)$, $k = -n, \dots, n$, $t \in [0, 1]$. По индукции построим систему процессов $\{w_k^{(p)}; k = -n, \dots, n\}$, $p = 1, \dots, 2n$. Рассмотрим для $k = -n, \dots, n-1$

$$\tau_k^{(p)} = \inf\{t: w_k^{(p-1)}(t) = w_{k+1}^{(p-1)}(t)\} \wedge 1.$$

Положим

$$\tau^{(p)} = \inf\{\tau_k^{(p)} > \tau^{(p-1)}; k = -n, \dots, n-1\} \wedge 1.$$

Рассмотрим $\mathfrak{S}^{(p)}$ — класс подмножеств множества $\{-n, \dots, n\}$, который обладает следующими свойствами:

- 1) для любого множества $A \in \mathfrak{S}^{(p)}$ и любых $k, l \in A$ если $l \leq i \leq k$, то $i \in A$;
- 2) для любого множества $A \in \mathfrak{S}^{(p)}$ и любых $k, l \in A$ верно $w_l^{(p-1)}(\tau^{(p)}) = w_k^{(p-1)}(\tau^{(p)})$;
- 3) для любого множества $A \in \mathfrak{S}^{(p)}$ и любых $k \in A$, $l \in \{-n, \dots, n\} \setminus A$ верно $w_l^{(p-1)}(\tau^{(p)}) \neq w_k^{(p-1)}(\tau^{(p)})$.

Если $\tau^{(p)} = 1$, то положим $w_k^{(p)}(t) = w_k^{(p-1)}(t)$, $t \in [0, 1]$, а если $\tau^{(p)} < 1$, то при $k \in A \in \mathfrak{S}^{(p)}$

$$w_k^{(p)}(t) = \begin{cases} w_k^{(p-1)}(t), & 0 \leq t < \tau^{(p)}, \\ w_j^{(p-1)}(\tau^{(p)}) \left(1 - \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}\right) + \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}} w_j^{(p-1)}(t), & \tau^{(p)} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где j — минимальный по абсолютной величине элемент в A , $m_2 = |A|$ и $m_1 = |B|$, где $B \in \mathfrak{S}^{(p-1)}$, $j \in B$.

В качестве системы процессов $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ возьмем $\{w_k^{(2n)}; k = -n, \dots, n\}$, т.е. $x_n(k, \cdot) = w_k^{(2n)}$, $k = -n, \dots, n$.

З а м е ч а н и е 1. Правило, по которому системе $\{w_k; k = -n, \dots, n\}$ ставится в соответствие система $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$, обозначим через F_n . Тогда F_n — измеримое отображение пространства $(C_n, \mathcal{B}_n)$ в себя, где $C_n = \{f \in C([0, 1], \mathbf{R}^{2n+1}): f(0) = (-n, \dots, n)\}$ и $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(C([0, 1], \mathbf{R}^{2n+1})) \cap C_n$.

Легко видеть, что процессы из системы $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ обладают следующими свойствами:

- (а) для любых $l, k \in \{-n, \dots, n\}$ и любого $t \in [0, 1]$ если $l < k$, то $x_n(l, t) \leq x_n(k, t)$;
- (б) для любого $k = -n, \dots, n$ верно $x_n(k, 0) = k$;
- (с) если $\tau_{l,k}^{(n)} = \inf\{t: x_n(l, t) = x_n(k, t)\}$, то

$$(x_n(l, t) - x_n(k, t)) \mathbf{I}\{t > \tau_{l,k}^{(n)}\} = 0, \quad k, l \in \{-n, \dots, n\}, \quad t \in [0, 1].$$

Осталось доказать, что система $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ удовлетворяет условиям 1), 4), 5) теоремы.

Построим аналогично $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ систему процессов $\{\tilde{x}_{n,m}(k, \cdot); k = m, \dots, n \text{ sign } m\}$ из системы $\{w_k; k = m, \dots, n \text{ sign } m\}$, $m \in \{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$.

Так как для $m \in \{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$ выполнено равенство $\tilde{x}_{n,m}(m, t) = x_n(m, t)$ при $t \in [0, \tau_{m,m \boxplus 1}^{(n)}]$, где $m \boxplus p = m - p \text{ sign } m$ и $x_n(m, t) = x_n(m \boxplus 1, t)$ при $t \in (\tau_{m,m \boxplus 1}^{(n)}, 1]$ (последнее в силу свойства (с)), то

$$x_n(m, t) = \tilde{x}_{n,m}(m, t) \mathbf{I}\{t \leq \tau_{m,m \boxplus 1}^{(n)}\} + x_n(m \boxplus 1, t) \mathbf{I}\{t > \tau_{m,m \boxplus 1}^{(n)}\}. \quad (1)$$

Для произвольного $k \in \{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$ определим

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k(t) &= w_k(t) \mathbf{I}\{t \leq \tau_{k,k \boxplus 1}^{(n)}\} \\ &\quad + (\tilde{w}_{k \boxplus 1}(t) + w_k(\tau_{k,k \boxplus 1}^{(n)}) - \tilde{w}_{k \boxplus 1}(\tau_{k,k \boxplus 1}^{(n)})) \mathbf{I}\{t > \tau_{k,k \boxplus 1}^{(n)}\}, \\ \tilde{w}_0(t) &= w_0(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя (1), методом математической индукции можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. $\tilde{w}_k \in \mathcal{W}(\mathcal{F}^{(n)})$, причем имеет место представление

$$x_n(k, t) = k + \int_0^t \frac{d\tilde{w}_k(s)}{\sqrt{m_n(k, s)}},$$

где $m_n(k, t) = |A_n(k, t)|$ и

$$A_n(k, t) = \{i = -n, \dots, n: \exists s \leq t, x_n(k, s) = x_n(i, s)\}.$$

Из леммы 1 сразу же следует, что система $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ удовлетворяет условиям 1) и 4) теоремы.

Осталось показать, что $\langle x_n(l, \cdot), x_n(k, \cdot) \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l,k}^{(n)}\} = 0$.

Из рекуррентного соотношения (2) для $\tilde{w}_k$ при $k \in \{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k(t) &= \int_0^t \prod_{j=k}^{\text{sign } k} \mathbf{I}\{s > \tau_{j,j \boxplus 1}^{(n)}\} d\tilde{w}_0(s) \\ &\quad + \sum_{i=\text{sign } k}^{k \boxplus 1} \int_0^t \prod_{j=k}^{i \boxplus 1} \mathbf{I}\{s > \tau_{j,j \boxplus 1}^{(n)}\} \mathbf{I}\{s \leq \tau_{i,i \boxplus 1}^{(n)}\} d\tilde{w}_i(s) \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{I}\{s \leq \tau_{k,k \boxplus 1}^{(n)}\} d\tilde{w}_k(s). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $k \boxplus p = k + p \text{ sign } k$.

Используя представление (3) и соотношение

$$\tau_{l,k}^{(n)} = \max\{\tau_{i,i+1}^{(n)}; i = l, \dots, k-1\}, \quad l, k \in \{-n, \dots, n\}, \quad l < k,$$

имеем $\langle \tilde{w}_l, \tilde{w}_k \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l,k}^{(n)}\} = 0$, а это и доказывает то, что система $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ удовлетворяет условию 5), поскольку

$$\langle x_n(l, \cdot), x_n(k, \cdot) \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l,k}^{(n)}\} = \int_0^t \frac{d\langle \tilde{w}_l, \tilde{w}_k \rangle_s}{\sqrt{m_n(l, s) m_n(k, s)}} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Заметим, что в условиях теоремы не указано явно, что процессы после встречи совпадают. Следующая лемма показывает, что условия 1), 3) это обеспечивают.

Лемма 2. Пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{M}_2^c([0, T], \mathcal{F})$. Если $y_1(t) \leq y_2(t)$ для всех $t \in [0, T]$, то

$$(y_2(t) - y_1(t)) \mathbf{I}\{t > \sigma\} = 0,$$

где $\sigma = \inf\{t: y_1(t) = y_2(t)\} \wedge T$.

Доказательство. Рассмотрим

$$z_i(t) = y_i(t \vee \sigma) - y_i(\sigma), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T].$$

Поскольку σ — ограниченный марковский момент, то $z_i \in \mathcal{M}_2^c([0, T], \mathcal{F})$ и $\mathbf{E} z_1(t) = \mathbf{E} z_2(t) = 0$, $t \in [0, T]$, причем $z_1(t) \leq z_2(t)$. А это значит, что для любого $t \in [0, T]$ выполнено равенство $z_1(t) = z_2(t)$. В силу непрерывности z_i утверждение леммы справедливо.

Докажем единственность распределения $(x_n(-n, \cdot), \dots, x_n(n, \cdot))$.

Лемма 3. Условия 1)–5) теоремы 1 однозначно определяют распределение $(x_n(-n, \cdot), \dots, x_n(n, \cdot))$ в пространстве $(C([0, 1], \mathbf{R}^{2n+1}), \mathcal{B}(C([0, 1], \mathbf{R}^{2n+1})))$.

Доказательство. Пусть $\{x_n(k, t); k = -n, \dots, n, t \in [0, 1]\}$ определяется условиями 1)–5). В силу теоремы Дуба [6, теорема 5.4.12] существует последовательность $\{w_k; k = -n, \dots, n\} \subset \mathcal{W}(\mathcal{F}^{(n)})$ (так как $x_n(k, \cdot) \in \mathcal{M}_2^c([0, 1], \mathcal{F}^{(n)})$, $k = -n, \dots, n$) такая, что

$$x_n(k, t) = k + \int_0^t \frac{dw_k(s)}{\sqrt{m_n(k, s)}}, \quad t \in [0, 1].$$

В силу условия 5) верно $\langle w_l, w_k \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l,k}^{(n)}\} = 0$.

Рассмотрим (возможно, на расширенном вероятностном пространстве) систему независимых стандартных винеровских процессов $\{\eta_k; k = -n, \dots, n\}$, которые не зависят от системы $\{w_k; k = -n, \dots, n\}$. Возьмем

$$\tilde{w}_0(t) = w_0(t),$$

$$\tilde{w}_k(t) = k + w_k(t) \mathbf{I}\{t \leq \tau_{k,k \oplus 1}^{(n)}\} + \left(\eta_k(t) + w_k(\tau_{k,k \oplus 1}^{(n)}) - \eta_k(\tau_{k,k \oplus 1}^{(n)}) \right) \mathbf{I}\{t > \tau_{k,k \oplus 1}^{(n)}\},$$

$$k \in \{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}, \quad t \in [0, 1].$$

Легко проверить, что $\tilde{w}_k$, $k = -n, \dots, n$, — квадратично интегрируемые мартингалы и $\langle \tilde{w}_l, \tilde{w}_k \rangle_t = \delta_{k,l} t$. Как известно (см. [7, теорема 2.6.1]), отсюда следует, что $(\tilde{w}_{-n}, \dots, \tilde{w}_n)$ — винеровский процесс в $\mathbf{R}^{2n+1}$. Теперь из построения F_n и леммы 2 следует, что $F_n(\tilde{w}_{-n}, \dots, \tilde{w}_n) = (x_n(-n, \cdot), \dots, x_n(n, \cdot))$. А это и доказывает единственность распределения $(x_n(-n, \cdot), \dots, x_n(n, \cdot))$. Лемма 3 доказана.

Заметим еще одно свойство отображений F_n , $n \in \mathbf{N}$, из которого будет следовать существование предела последовательности $\{x_n(k, \cdot)\}_{n \geq k}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Лемма 4. Пусть $\{f_k; k \in \mathbf{Z}\} \subset C[0, 1]$ и $f_k(0) = k$. Обозначим

$$(g_{-n}^{(n)}, \dots, g_n^{(n)}) = F_n(f_{-n}, \dots, f_n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

(i) Если для некоторого $m \in \mathbf{N}$ существуют $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\max_{k=0, \dots, m} \max_{t \in [0, 1]} f_k(t) < C, \quad \min_{t \in [0, 1]} f_{m+1}(t) > C + \delta,$$

то для любого $n > m$ и любого $k = -n, \dots, m$

$$\max_{t \in [0, 1]} g_k^{(n)}(t) \leq \max_{t \in [0, 1]} g_m^{(n)}(t) < C, \quad \min_{t \in [0, 1]} g_{m+1}^{(n)}(t) > C + \delta.$$

(ii) Если для некоторого $-m \in \mathbf{N}$ существуют $C < 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\min_{k=m, \dots, 0} \min_{t \in [0, 1]} f_k(t) > C, \quad \max_{t \in [0, 1]} f_{m+1}(t) < C - \delta,$$

то для любого $n > -m$ и любого $k = m, \dots, n$

$$\min_{t \in [0, 1]} g_k^{(n)}(t) \geq \min_{t \in [0, 1]} g_m^{(n)}(t) > C, \quad \max_{t \in [0, 1]} g_{m+1}^{(n)}(t) < C - \delta.$$

Доказательство леммы непосредственно вытекает из конструкции отображений F_n , $n \in \mathbf{N}$.

2. Система бесконечного числа частиц. Цель настоящего пункта — доказать основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. (i) Существует система случайных процессов $\{x(k, t); k \in \mathbf{Z}, t \geq 0\}$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $x(k, \cdot) \in \mathcal{M}_2^c(\mathbf{R}^+, \mathcal{F})$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\mathcal{F} = \sigma(x(k, s); k \in \mathbf{Z}, s \leq t)_{t \geq 0}$;
- 2) $x(k, 0) = k$, $k \in \mathbf{Z}$;
- 3) для любых $l < k$ и любого $t \geq 0$ выполнено неравенство $x(l, t) \leq x(k, t)$;
- 4) для любого $t \geq 0$ выполнено равенство $\langle x(k, \cdot) \rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{m(k, s)}$, где

$$m(k, t) = |A(k, t)|, \quad A(k, t) = \{i \in \mathbf{Z}: \exists s \leq t, x(k, s) = x(i, s)\};$$

5) совместная характеристика $\langle x(l, \cdot), x(k, \cdot) \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l, k}\}$, где $\tau_{l, k} = \inf\{t: x(l, t) = x(k, t)\}$, равна нулю.

(ii) Условия 1)–5) пункта (i) однозначно определяют распределение $(\dots, x(-n, \cdot), \dots, x(n, \cdot), \dots)$ в пространстве $((\mathbf{C}(\mathbf{R}^+))^\infty, \mathcal{B}((\mathbf{C}(\mathbf{R}^+))^\infty))$.

З а м е ч а н и е 2. Из условий 1)–5) теоремы 2 следует, что последовательность $\{x(k, \cdot); k \in \mathbf{Z}\}$ стационарна по k .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $k \in \mathbf{Z}$ покажем, что существует предел последовательности $\{x_n(k, t)\}_{n \geq k}$, построенной в п. 1, и возьмем его в качестве $x(k, \cdot)$. Для этого докажем вспомогательную лемму.

Лемма 5. Пусть $\{w_k; k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \subset \mathcal{W}$ и $w_k(0) = k$. Обозначим

$$\xi_k = \max_{t \in [0, 1]} w_k(t), \quad \eta_k = \min_{t \in [0, 1]} w_k(t).$$

Тогда для любого $\delta \in (0, 1/2)$

$$\mathbf{P}\left\{\text{для бесконечного числа номеров } n \in \mathbf{N} \right. \\ \left. \max_{k=0, \dots, n} \xi_k \leq n + \frac{1}{2}, \quad \eta_{n+1} > n + \frac{1}{2} + \delta\right\} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta, \varepsilon \in (0, 1/2)$. Поскольку $\{\xi_k; k = 0, \dots, N\}$ и η_{N+1} независимы, то, используя распределение максимума для винеровского процесса (см. [8, предложение 2.4.9]), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\max_{k=0, \dots, N} \xi_k \leq N + \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \eta_{N+1} > N + \frac{1}{2} + \delta\right\} \\ &= \prod_{k=0}^N \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N-k+1/2-\varepsilon} e^{-x^2/2} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2-\delta} e^{-x^2/2} dx \\ &= \prod_{k=0}^N \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{k+1/2-\varepsilon} e^{-x^2/2} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2-\delta} e^{-x^2/2} dx \\ &= \prod_{k=0}^N \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k+1/2-\varepsilon}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2-\delta} e^{-x^2/2} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что произведение в (4) сходится к положительному числу при $N \rightarrow +\infty$, так как $\sum_{k=2}^{+\infty} \int_k^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \int_1^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx < +\infty$. Обозначим

$$p = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k+1/2-\varepsilon}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2-\delta} e^{-x^2/2} dx > 0.$$

Возьмем $p_1 \in (0, p)$. Тогда

$$\exists N_1 > 0 \quad \mathbf{P} \left\{ \max_{k=0, \dots, N_1} \xi_k \leq N_1 + \frac{1}{2} - \varepsilon, \eta_{N_1+1} > N_1 + \frac{1}{2} + \delta \right\} \geq p_1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \max_{k=N_1+2, \dots, N} \xi_k \leq N + \frac{1}{2} - \varepsilon, \eta_{N+1} > N + \frac{1}{2} + \delta \right\} \\ &= \prod_{k=N_1+2}^N \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N-k+1/2-\varepsilon} e^{-x^2/2} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2-\delta} e^{-x^2/2} dx \\ &= \prod_{k=0}^{N-N_1-2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{k+1/2-\varepsilon} e^{-x^2/2} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2-\delta} e^{-x^2/2} dx \rightarrow p \end{aligned}$$

при $N \rightarrow +\infty$. Следовательно, существует $N'_2 > N_1 + 2$ такое, что для любого $N \geq N'_2$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{k=N_1+2, \dots, N} \xi_k \leq N + \frac{1}{2} - \varepsilon, \eta_{N+1} > N + \frac{1}{2} + \delta \right\} \geq p_1.$$

Пусть $\zeta_N^{(N_0)} = \max_{k=0, \dots, N} \xi_k - \max_{k=N_0, \dots, N} \xi_k$, $N, N_0 \in \mathbf{N}$, $N > N_0$. Тогда для любого $N_0 \in \mathbf{N}$

$$\zeta_N^{(N_0)} \rightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad \text{при } N \rightarrow +\infty,$$

а значит, для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(N_0)} \leq \varepsilon_1 \right\} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow +\infty.$$

Используя сходимость последовательности $\{\zeta_N^{(N_0)}\}_{N > N_0}$ по вероятности, получаем, что существует $N''_2 > N_1 + 2$ такое, что для любого $N \geq N''_2$ выполнено неравенство $\mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(N_1+2)} \leq \varepsilon \right\} > 1 - 1/2$. Возьмем $N_2 = N'_2 \vee N''_2$.

По индукции построим последовательность индексов $\{N_m\}_{m \geq 1}$. Существует $N'_{m+1} > N_m + 2$ такое, что для любого $N \geq N'_{m+1}$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{k=N_m+2, \dots, N} \xi_k \leq N + \frac{1}{2} - \varepsilon, \eta_{N+1} > N + \frac{1}{2} + \delta \right\} \geq p_1.$$

Кроме того, существует $N''_{m+1} > N_m + 2$ такое, что для любого $N \geq N''_{m+1}$

$$\mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(N_m+2)} \leq \varepsilon \right\} > 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Положим $N_{m+1} = N'_{m+1} \vee N''_{m+1}$.

Используя лемму Бореля–Кантелли, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \forall M \exists m \geq M \max_{k=N_m+2, \dots, N_{m+1}} \xi_k \leq N_{m+1} + \frac{1}{2} - \varepsilon, \right. \\ & \left. \eta_{N_{m+1}+1} > N_{m+1} + \frac{1}{2} + \delta \right\} = 1 \end{aligned}$$

и $\mathbf{P} \left\{ \exists M \forall m \geq M \zeta_{N_{m+1}}^{(N_m+2)} \leq \varepsilon \right\} = 1$.

Отсюда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \forall M \exists m \geq M \max_{k=0, \dots, N_{m+1}} \xi_k \leq N_{m+1} + \frac{1}{2}, \eta_{N_{m+1}+1} > N_{m+1} + \frac{1}{2} + \delta \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ \forall M \exists m \geq M \max_{k=0, \dots, N_{m+1}} \xi_k - \max_{k=N_m+2, \dots, N_{m+1}} \xi_k \leq \varepsilon, \right. \\ & \left. \max_{k=N_m+2, \dots, N_{m+1}} \xi_k \leq N_{m+1} + \frac{1}{2} - \varepsilon, \eta_{N_{m+1}+1} > N_{m+1} + \frac{1}{2} + \delta \right\} \end{aligned}$$

$$\geq \mathbf{P} \left\{ \left\{ \exists M \forall m \geq M \max_{k=0, \dots, N_{m+1}} \xi_k - \max_{k=N_m+2, \dots, N_{m+1}} \xi_k \leq \varepsilon \right\} \cap \left\{ \forall M \exists m \geq M \max_{k=N_m+2, \dots, N_{m+1}} \xi_k \leq N_{m+1} + \frac{1}{2} - \varepsilon, \right. \right. \\ \left. \left. \eta_{N_{m+1}+1} > N_{m+1} + \frac{1}{2} + \delta \right\} \right\} = 1.$$

Лемма 5 доказана.

Пусть теперь $\{x_n(k, t); k = -n, \dots, n, t \in [0, 1]\}$ — набор случайных процессов, построенный в п. 1. Из лемм 4 и 5 следует, что для любого $k \in \mathbf{Z}$

$$\mathbf{P}\{\exists N \forall n \geq N x_n(k, \cdot) = x_N(k, \cdot)\} = 1,$$

т.е. для каждого целого k последовательность $\{x_n(k, \cdot)\}_{n \geq k}$ стабилизируется с вероятностью 1. В качестве $x(k, \cdot)$ возьмем предел $\{x_n(k, \cdot)\}_{n \geq k}$. Из стабилизации $\{x_n(k, \cdot)\}_{n \geq k}$ следует, что

$$\mathbf{P}\{\exists N \forall n \geq N m_n(k, \cdot) = m_N(k, \cdot)\} = 1,$$

и в качестве $m(k, \cdot)$ возьмем предел $\{m_n(k, \cdot)\}_{n \geq k}$. Ясно, что

$$m(k, t) = |A(k, t)|,$$

где $A(k, t) = \{i \in \mathbf{Z}: \exists s \leq t, x(k, s) = x(i, s)\}$.

Как и для $x_n(k, \cdot)$, можно показать, что для любого $k \in \mathbf{Z}$

$$x(k, t) = k + \int_0^t \frac{d\tilde{w}_k(s)}{\sqrt{m(k, s)}},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k(t) &= k + w_k(t) \mathbf{I}\{t \leq \tau_{k, k \boxplus 1}\} \\ &\quad + (\tilde{w}_{k \boxplus 1}(t) + w_k(\tau_{k, k \boxplus 1}) - \tilde{w}_{k \boxplus 1}(\tau_{k, k \boxplus 1})) \mathbf{I}\{t > \tau_{k, k \boxplus 1}\}, \\ \tilde{w}_0(t) &= w_0(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

А отсюда уже следует непосредственно, что система процессов $\{x(k, t); k \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условиям 1)–5) теоремы 2 для $t \in [0, 1]$.

Обозначим $\{x^T(k, t); k \in \mathbf{Z}, t \in [0, T]\}$ систему процессов, построенную таким же образом, как и система $\{x(k, t); k \in \mathbf{Z}, t \in [0, 1]\}$. Заметим, что при любых $T_2 > T_1 > 0$ выполнено равенство $x^{T_1}(k, t) = x^{T_2}(k, t)$ для каждого $k \in \mathbf{Z}, t \in [0, T_1], \omega \in \Omega$. Отсюда следует доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части теоремы достаточно показать, что условия 1)–5) для $t \in [0, 1]$ однозначно определяют распределения $(\dots, x(-n, \cdot), \dots, x(n, \cdot), \dots)$ в пространстве $((C[0, 1])^\infty, \mathcal{B}((C[0, 1])^\infty))$.

Пусть $\{x(k, \cdot); k \in \mathbf{Z}\}$ определяется условиями 1)–5). Аналогично п. 1, существует последовательность $\{w_k; k \in \mathbf{Z}\} \subset \mathcal{W}(\mathcal{F})$ такая, что

$$x(k, t) = k + \int_0^t \frac{dw_k(s)}{\sqrt{m(k, s)}}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad t \in [0, 1],$$

и $\langle w_l, w_k \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l, k}\} = 0$.

Рассмотрим систему независимых стандартных винеровских процессов $\{\eta_k; k \in \mathbf{Z}\}$, которые не зависят от системы $\{w_k; k \in \mathbf{Z}\}$, и возьмем

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0(t) &= w_0(t), \\ \tilde{w}_k(t) &= k + w_k(t) \mathbf{I}\{t \leq \tau_{k, k \boxplus 1}\} + (\eta_k(t) + w_k(\tau_{k, k \boxplus 1}) - \eta_k(\tau_{k, k \boxplus 1})) \mathbf{I}\{t > \tau_{k, k \boxplus 1}\}, \\ &\quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Пусть $(x_n(-n, \cdot), \dots, x_n(n, \cdot)) = F_n(\tilde{w}_{-n}, \dots, \tilde{w}_n)$, $n \geq 1$. Тогда для любых чисел $k_1 < \dots < k_m$ и $h = \max_{i=1, \dots, m} |k_i|$ последовательность $\{(x_n(k_1, \cdot), \dots, x_n(k_m, \cdot))\}_{n \geq h}$ стабилизируется при росте n . Поскольку $\{x_n(k, \cdot); k = -n, \dots, n\}$ удовлетворяет условиям 1)–5) теоремы 1, то распределение $(x_n(-n, \cdot), \dots, x_n(n, \cdot))$ единственно, а отсюда следует единственность распределения $(\dots, x(-n, \cdot), \dots, x(n, \cdot), \dots)$. Теорема 2 доказана.

Приведем некоторые свойства системы процессов $\{x(k, t); k \in \mathbf{Z}\}$ из теоремы 2.

1°. *Интегральное представление.* Существует система $\{w_k; k \in \mathbf{Z}\} \subset \mathcal{W}(\mathcal{F})$ такая, что

$$x(k, t) = k + \int_0^t \frac{dw_k(s)}{\sqrt{m(k, s)}}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad t \geq 0,$$

и $\langle w_l, w_k \rangle_t \mathbf{I}\{t < \tau_{l, k}\} = 0$.

2°. *Встреча с запаздыванием.* Пусть $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ — независимые процессы. Для $s \in \mathbf{R}$ обозначим $\sigma_s = \inf\{t: w_1(t) - w_2(t) = s\}$. Тогда для любых $k \in \mathbf{Z}$ и $t \geq 0$ выполняется неравенство $\mathbf{P}\{\tau_{k, k+p} \leq t\} \leq \mathbf{P}\{\sigma_p \leq t\}$.

В самом деле, в силу свойства 1°

$$x(i, t) = i + \int_0^t \frac{dw_i(s)}{\sqrt{m(i, s)}}, \quad i = k, k+p, \quad t \geq 0.$$

Как и ранее, построим независимые процессы $\tilde{w}_k, \tilde{w}_{k+p} \in \mathcal{W}$ такие, что $(\tilde{w}_i(t) - w_i(t)) \mathbf{I}\{t < \tau_{k, k+p}\} = 0$, $i = k, k+p$, $t \geq 0$.

Определим

$$x(t) = \int_0^t \frac{d\tilde{w}_k(s)}{\sqrt{m(k, s)}} - \int_0^t \frac{d\tilde{w}_{k+p}(s)}{\sqrt{m(k+p, s)}}.$$

Очевидно, что $\tau_{k, k+p} = \inf\{t: x(t) = p\}$.

Легко видеть, что x — квадратично интегрируемый мартингал и

$$\langle x \rangle_t = \int_0^t \left(\frac{1}{m(k, s)} + \frac{1}{m(k+p, s)} \right) ds.$$

Так как $1/m(i, s) \leq 1$, $i = k, k+p$, то $\langle x \rangle_t \leq 2t$. В силу теоремы представления (см. [7, теорема 2.7.2']) существует $w \in \mathcal{W}$ такой, что $x(t) = w(\langle x \rangle_t)$.

Пусть $\tilde{\sigma}_p = \inf\{t: w(2t) = p\}$, тогда $p = x(\tau_{k, k+p}) = w(\langle x \rangle_{\tau_{k, k+p}}) = w(2\tilde{\sigma}_p)$.

В силу монотонности $\langle x \rangle$ выполнено неравенство $2\tilde{\sigma}_p = \langle x \rangle_{\tau_{k, k+p}} \leq 2\tau_{k, k+p}$, или $\sigma_p \stackrel{d}{=} \tilde{\sigma}_p \leq \tau_{k, k+p}$. Следовательно $\mathbf{P}\{\tau_{k, k+p} \leq t\} \leq \mathbf{P}\{\tilde{\sigma}_p \leq t\} = \mathbf{P}\{\sigma_p \leq t\}$. Утверждение доказано.

3°. *Ограничение на асимптотику роста массы при $t \rightarrow +\infty$.*

Для каждого целого k

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{m(k, t)}{4\sqrt{t \ln \ln t}} \leq 1 \right\} = 1. \quad (5)$$

Действительно, равенство (5) эквивалентно следующему равенству:

$$\mathbf{P}\{\forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \forall n \geq n_1(\varepsilon) m(k, n) \leq (1 + \varepsilon)\varphi(n)\} = 1,$$

где $\varphi(t) = 4\sqrt{t \ln \ln t}$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\lambda = 1 + \varepsilon$, $n_k = \lambda^k$, где $k \geq k_0$, а k_0 выбирается так, чтобы $\ln \ln k_0$ был определен. Обозначим также

$$A_p := \{m(k, n) > \lambda\varphi(n) \text{ для некоторого } n \in (n_p, n_{p+1}]\}.$$

Оценим вероятность $\mathbf{P}(A_p)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_p) &\leq \mathbf{P}\{m(k, n) > \lambda\varphi(n_p) \text{ для некоторого } n \in (n_p, n_{p+1}]\} \\ &\leq \mathbf{P}\{m(k, n) > \lambda\varphi(n_p) \text{ для некоторого } n \leq n_{p+1}\} \\ &\leq \mathbf{P}\{m(k, n_{p+1}) > \lambda\varphi(n_p)\}. \end{aligned}$$

При $t > 0$ и $l > 2$

$$\mathbf{P}\{m(k, t) > l\} \leq \mathbf{P}\{\tau_{k, k+[l/2]} \leq t\} + \mathbf{P}\{\tau_{k, k-[l/2]} \leq t\} \leq 2\mathbf{P}\{\sigma_{[l/2]} \leq t\},$$

где σ_s определено в свойстве 2°.

Положим $\varkappa = \lambda\varphi(n_p)/(2\sqrt{2n_{p+1}})$. Используя асимптотику хвоста функции распределения стандартного нормального закона (см. [9, лемма 4.4.2]), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_p) &\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{[\varkappa]}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varkappa-1}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &\sim \frac{4}{\sqrt{2\pi}} (\varkappa-1)^{-1} e^{-(\varkappa-1)^2/2} \leq C_1 \exp\left\{-\lambda \ln \ln \lambda^p + \sqrt{2\lambda \ln \ln \lambda^p}\right\} \\ &= C_1 \exp\{-(1-\varepsilon_1)\lambda \ln \ln \lambda^p\} \exp\left\{-\varepsilon_1 \lambda \ln \ln \lambda^p + \sqrt{2\lambda \ln \ln \lambda^p}\right\} \\ &\leq C_2 \exp\{-(1-\varepsilon_1)\lambda \ln p\} = C_2 \frac{1}{p^{\lambda(1-\varepsilon_1)}}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ выбираем так, чтобы $(1-\varepsilon_1)\lambda > 1$.

Поскольку $\sum_{p=1}^{\infty} 1/p^{\lambda(1-\varepsilon_1)} < +\infty$, то в силу леммы Бореля–Кантелли получаем $\mathbf{P}\{\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} A_p\} = 0$.

4°. *Конечность моментов склеивания.* Для каждого $k \in \mathbf{Z}$ и $p \in \mathbf{N}$ процессы $x(k, \cdot)$ и $x(k+p, \cdot)$ встретятся за конечное время, другими словами $\mathbf{P}\{\tau_{k, k+p} < +\infty\} = 1$.

Действительно, как и в доказательстве свойства 3°, построим такой процесс x , что

$$\tau_{k, k+p} = \inf\{t: x(t) = p\}, \quad \langle x \rangle_t = \int_0^t \left(\frac{1}{m(k, s)} + \frac{1}{m(k+p, s)} \right) ds.$$

Используя свойство 3°, получаем

$$\int_0^t \frac{1}{m(k, s)} ds \geq \sum_{n=1}^{[t]} \frac{1}{m(k, n)} \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

а это значит, что $\langle x \rangle_t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Из теоремы представления (см. [7, теорема 2.7.2]) следует, что $\eta(t) = x(\langle x \rangle_t^{-1}) \in \mathscr{W}$. Пусть

$$\sigma_p = \inf\{t: \eta(t) = p\}.$$

Как известно,

$$\mathbf{P}\{\sigma_p < +\infty\} = 1. \quad (6)$$

Запишем $p = \eta(\sigma_p) = x(\langle x \rangle_{\sigma_p}^{-1}) = x(\tau_{k, k+p})$. Отсюда следует, что $\tau_{k, k+p} = \langle x \rangle_{\sigma_p}^{-1}$. Из последнего равенства и свойства (6) вытекает, что $\mathbf{P}\{\tau_{k, k+p} < +\infty\} = 1$.

5°. *Ограничение на асимптотику движения частиц при $t \rightarrow +\infty$.* Для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2t \ln t}} = 0\right\} = 1, \quad \mathbf{P}\left\{\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt[4]{t^{1-\varepsilon}}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right\} = 1.$$

Докажем первое равенство.

Как и при доказательстве свойства 4°, можно показать, что $\langle x(0, \cdot) \rangle_t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Из теоремы представления (см. [7, теорема 2.7.2]) следует, что существует стандартный винеровский процесс w такой, что $x(0, t) = w(\langle x(0, \cdot) \rangle_t)$.

Используя закон повторного логарифма для винеровского процесса (см. [8, следствие 2 теоремы 2.2.5]), имеем

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|w(\langle x(0, \cdot) \rangle_t)|}{\sqrt{2\langle x(0, \cdot) \rangle_t \ln \langle x(0, \cdot) \rangle_t}} = 1\right\} = 1.$$

Возьмем произвольное $p \in \mathbf{N}$ и выберем t_0 так, чтобы $m(0, t_0) \geq p$. Тогда для $t \geq t_0$

$$\langle x(0, \cdot) \rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{m(0, s)} = \int_0^{t_0} \frac{ds}{m(0, s)} + \int_{t_0}^t \frac{ds}{m(0, s)} \leq c(t_0) + \frac{1}{p} t.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2 \langle x(0, \cdot) \rangle_t \ln \langle x(0, \cdot) \rangle_t}} \\ &\geq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2(c(t_0) + t/p) \ln \ln(c(t_0) + t/p)}} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2t/p \ln \ln t}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \right\} = 1.$$

Устремляя p к бесконечности, получаем доказательство первого равенства.

Докажем второе равенство.

В обозначениях из доказательства свойства 3°, существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что для любого $p \geq N$ выполнено неравенство $m(0, n_{p+1}) \leq \lambda \varphi(n_p)$.

Возьмем $t \in [n_p, n_{p+1})$, тогда в силу монотонности $m(0, \cdot)$ получим $m(0, t) \leq m(0, n_{p+1}) \leq \lambda \varphi(n_p) \leq \lambda \varphi(t)$.

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $t_0 = n_N \vee \sup\{t: \ln \ln t > t^\varepsilon\}$ и $t \geq t_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle x(0, \cdot) \rangle_t &= \int_0^t \frac{ds}{m(0, s)} = \int_0^{t_0} \frac{ds}{m(0, s)} + \int_{t_0}^t \frac{ds}{m(0, s)} \\ &\geq a(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda \varphi(s)} = a(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda \cdot 4\sqrt{s \ln \ln s}} \\ &\geq a(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda \cdot 4\sqrt{s^{1+\varepsilon}}} = b(t_0) + \frac{1}{2\lambda(1-\varepsilon)} \sqrt{t^{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2 \langle x(0, \cdot) \rangle_t \ln \langle x(0, \cdot) \rangle_t}} \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2(b(t_0) + \sqrt{t^{1-\varepsilon}}/(2\lambda(1-\varepsilon)))}} \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{2\sqrt{t^{1-\varepsilon}}/(2\lambda(1-\varepsilon))}} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt{\sqrt{t^{1-\varepsilon}}/(\lambda(1-\varepsilon))}} \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(0, t)|}{\sqrt[4]{t^{1-\varepsilon}}/\sqrt{\lambda(1-\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Устремляя λ к единице, получаем желаемое равенство.

З а м е ч а н и е 3. Условия 3° и 5° устанавливают ограничения на асимптотику движения частиц и рост массы. К сожалению, точная асимптотика нам пока не известна.

З а м е ч а н и е 4. Исходной задачей является математическое описание совместного движения совокупности частиц, которые стартовали с каждой точки прямой $\mathbf{R}$, движутся независимо до момента встречи, а затем склеиваются, изменяя свою массу согласно закону ее сохранения. Данная работа является первым приближением к решению этой задачи.

Автор благодарит профессора А. А. Дороговцева за поставленную задачу и за помощь в написании этой работы. Также автор благодарит анонимных рецензентов за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arratia R. A. Brownian motion on the line. Ph.D. Thesis. Madison: Univ. of Wisconsin, 1979.
2. Le Jan Y., Raimond O. Flows, coalescence and noise. — Ann. Probab., 2004, v. 32, № 2, p. 1247—1315.
3. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. — Theory Stoch. Process., 2004, v. 10, № 3–4, p. 21–25.
4. Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007, 289 с.
5. Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. — Comm. Math. Phys., 1996, v. 177, p. 349–380.
6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
7. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
8. Худа Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987, 304 с.
9. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.

Поступила в редакцию
15.VII.2008

Исправленный вариант
7.X.2009

© 2010 г.

КОНОВАЛОВ Л. А.*

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ ДЛЯ КОГЕРЕНТНЫХ МЕР РИСКА

Данная работа посвящена исследованию связи между обычным и факторным рисками в факторной модели. В частности показано, что при определенных условиях в простейшей факторной модели с ростом числа активов в портфеле разность между этими рисками стремится к конечному числу, несмотря на то, что сами они стремятся к бесконечности.

Ключевые слова и фразы: измерение риска, когерентные меры риска, факторный риск, факторная модель, предельные теоремы, хвостовой $V@R$, взвешенный $V@R$.

1. Введение.

1.1. Измерение риска. Предположим, что приращение стоимости некоторой ценной бумаги (или портфеля ценных бумаг) за единичный промежуток времени (например, один день) описывается случайной величиной X . Со стороны обладателя этой ценной бумаги естественно интересоваться следующим вопросом: насколько велик риск того, что ее стоимость упадет? Таким образом, возникает задача измерения риска, связанного со случайной величиной X .

Классическими мерами финансового риска являются стандартное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{DX}$ и мера Value-at-Risk ($V@R$), определяемая формулой

$$V@R_\lambda(X) = -q_\lambda(X),$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: leonid.knv@gmail.com